УДК 531.36:533.6

Д-р техн. наук В.С. Шеховцов

О МИНИМАЛЬНОМ АЭРОДИНАМИЧЕСКОМ СОПРОТИВЛЕНИИ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ПРИ НУЛЕВОМ УГЛЕ АТАКИ В ГИПЕРЗВУКОВОМ НЕВЯЗКОМ ПОТОКЕ

Для решения задачи предложена процедура, в основе которой лежат два условия экстремальности функционала, одним из которых является уравнение Эйлера. Использование процедуры позволяет получать множество экстремалей, каждая из которых определяется значением одной из констант. Показано, что при таком подходе получаемые экстремали для определенного диапазона упомянутой константы могут доставлять функционалу более сильные результаты, чем при использовании классического решения.

Для вирішення задачі запропоновано процедуру, в основі якої лежать дві умови екстремальності функціонала, одним з яких є рівняння Ейлера. Використання процедури дозволяє отримувати безліч екстремалей, кожну з яких визначають значенням однієї з констант. Показано, що за такого підходу отримувані екстремалі для певного діапазону згаданої константи можуть доставляти функціоналу сильніші результати, ніж за використання класичного рішення.

To solve the problem, procedure is suggested forming the basis for two functional extremeness conditions, one of which is Euler equation. Application of this procedure enables to obtain set of extremals, each of them is defined by a value of one of constants. It is shown that with such an approach extremals, obtained for a definite range of the above constant, can give to functional stronger results than when applying a classical solution.

Решению задачи выбора тела вращения минимального аэродинамического сопротивления в гиперзвуковом невязком потоке при нулевом угле атаки при различных ограничениях посвящено множество работ. Среди них следует отметить известные работы А. Миеле [1], А. Эггерса, М. Резниковой, Д. Дениса [2] .

В работах [1, 2] при выборе формы тела, имеющего минимальное аэродинамическое сопротивление при заданных длине и диаметре, авторы, используя приближенную модель Ньютона распределения давления[1], показали, что искомая форма тела описывается степенной функцией с показателем 0,75. При этом было установлено, что результат, получаемый при использовании точной модели Ньютона, незначительно отличается от результатов при использовании приближенной модели.

Для решения задачи в статье предложена процедура, в основе которой лежат два условия экстремальности функционала, одним из которых является уравнение Эйлера. Процедура построена с использованием метода вариационного исчисления с учетом нескольких дополнительных допущений и ограничений, а также с использованием вариации функции *y(x)* в виде

$$\delta y = \alpha\varphi(x),$$

где α – бесконечно малое постоянное число;

$\varphi(x)$ – некоторая непрерывная функция, участвующая при выводе предлагаемых условий экстремальности.

Формулировка задачи. Сформулируем задачу выбора формы тела вращения, имеющего минимальное аэродинамическое сопротивление при заданных длине и диаметре, следуя работам [1, 2]. Для функционала

$$I = \int_{x_0}^{x_k} y(x)\dot{y}^3(x)dx; \qquad (1)$$

$$y_0(x_0 = a) = b; \quad y_k(x_k = L) = R$$

определить такую функцию y(x), при которой функционал принимает экстремальное

[1] В рассматриваемом случае под точной моделью Ньютона понимается распределение коэффициента давления по формуле $C_p = 2\sin^2\theta = 2\dot{y}^2/(1+\dot{y}^2)$, где θ – угол наклона контура тела к его оси; x – осевая координата; y – радиальная координата; $\dot{y}$ – производная dy/dx; при приближенной модели ($\dot{y}^2 \ll 1$) $C_p = 2\dot{y}^2$.

значение. Здесь $\dot{y}$ – производная функции y(x) по независимой переменной x.

Определение условий экстремальности. Запишем первую вариацию функционала (1)

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_k} \left(F_{\dot{y}} \delta\dot{y} + F_y \delta y \right) dx. \qquad (2)$$

Предположим, что в некотором заданном классе непрерывных функций существует множество кривых, каждая из которых доставляет локальный экстремум функционалу[2].

Вариацию функции *y(x)* и ее производную представим в таком виде:

$$\begin{aligned} &\delta y(x) = \alpha\varphi(x); \ \delta\dot{y}(x) = \alpha\dot{\varphi}(x); \\ &x_0 \le x \le x_k, \end{aligned} \qquad (3)$$

где α – бесконечно малая постоянная величина;

$\varphi(x), \dot{\varphi}(x)$ – неизвестные пока непрерывные функции:

$$\varphi(x) \ne 0; \ \dot{\varphi}(x) \ne 0; \quad x_0 \le x \le x_k. \qquad (4)$$

С учетом (3) вариация функционала (2) имеет такой вид:

$$\delta J = \alpha \int_{x_0}^{x_k} \left(F_{\dot{y}} \dot{\varphi} + F_y \varphi \right) dx. \qquad (5)$$

Будем также полагать, что частные производные по y и $\dot{y}$ от подынтегральной функции функционала (1) на рассматриваемом отрезке независимой переменной принимают ненулевые значения

$$F_y \ne 0; F_{\dot{y}} \ne 0; \quad x_0 \le x \le x_k. \qquad (6)$$

Вариация функционала (5) будет равна нулю, если

$$F_{\dot{y}}\dot{\varphi}(x) + F_y\varphi(x) = 0; \quad x_0 \le x \le x_k. \qquad (7)$$

Учитывая условие (6), разделим уравнение (7) на F_y и проинтегрируем его:

$$\left.\frac{F_{\dot{y}}}{F_y}\varphi(x)\right|_{x_0}^{x_k} - \int_{x_0}^{x_k} \varphi(x)\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{F_{\dot{y}}}{F_y}\right) - 1 \right) dx = 0. \qquad (8)$$

Пусть выражение в скобках подынтегральной функции равно нулю:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{F_{\dot{y}}}{F_y}\right) - 1 = 0. \qquad (9)$$

Тогда интеграл в уравнении (8) должен равняться нулю. Для выполнения (8) его первый член также должен равняться нулю.

$$\left.\frac{F_{\dot{y}}}{F_y}\varphi(x)\right|_{x_0}^{x_k} = 0; \quad x_0 \le x \le x_k. \qquad (10)$$

Проинтегрировав уравнение (9), получим

$$F_{\dot{y}} = (x + c)F_y. \qquad (11)$$

Уравнение (11) представляет собой условие экстремальности функционала (1). Легко убедиться в том, что это условие неинвариантно относительно системы координат.

Заметим, что в классическом случае уравнение (8) будет иметь такой вид:

$$\left. F_{\dot{y}}\varphi(x) \right|_{x_0}^{x_k} - \int_{x_0}^{x_k} \varphi(x)\left(\frac{d}{d_x}F_{\dot{y}} - F_y \right) d_x = 0. \qquad (12)$$

Уравнение (12) будет иметь место, если

$$\frac{d}{dx}F_{\dot{y}} - F_y = 0; \qquad (13)$$

$$\left. F_{\dot{y}}\varphi(x) \right|_{x_0}^{x_k} = 0. \qquad (14)$$

Таким образом, при выполнении предположений (4), (6), (10), (14) искомая экстремаль должна удовлетворять уравнениям (11) и (13):

$$F_{\dot{y}} = (x + c)F_y; \qquad (15)$$

$$\frac{d}{dx}F_{\dot{y}} - F_y = 0. \qquad (16)$$

Определим условие совместного выполнения уравнений (15) и (16). Продифференцируем уравнение (15):

---

[2] На первый взгляд шаткость такого предположения очевидна, так как подразумевает существование множества экстремалей без всякого на то обоснования. Причем предположение задается явно, а затем используется для получения решений, которые были постулизированы. Сомнительность такого подхода в свое время была убедительно показана Л. Янгом [3]. Но классическое вариационное исчисление базируется на подобном предположении с той лишь разницей, что оно касается существования только одной экстремали в классе заданных непрерывных функций. Вряд ли кто-либо сегодня станет отрицать эффективность современного метода вариационного исчисления, построенного на базе такого необоснованного предположения.

$$\frac{dF_{\dot{y}}}{dx} = F_y + (x + c)\frac{dF_y}{dx}. \qquad (17)$$

Подставив в (17) уравнение (16), с учетом (6) получим:

$$F_y = c_1; \quad c_1 \neq 0. \qquad (18)$$

Из условий (6) и (18) следует, что для того, чтобы уравнения (15) и (16) определяли искомую экстремаль, необходимо, чтобы частная производная по *y* от подынтегральной функции функционала (1) на рассматриваемом отрезке была ненулевой постоянной величиной.

С учетом (6) и (18) уравнение (15) будет иметь такой вид:

$$F_{\dot{y}} = c_1 x + c_2; \; c_1 \neq 0; \; x_0 \le x \le x_k. \qquad (19)$$

Первый интеграл уравнения Эйлера (16) имеет такой вид:

$$F - \dot{y}F_{\dot{y}} = c_3; \; x_0 \le x \le x_k. \qquad (20)$$

Таким образом, при выполнении условий (4), (6), (10), (14) искомая экстремаль должна удовлетворять одновременно уравнениям (19) , (20):

$$\begin{aligned} &F_{\dot{y}} = c_1 x + c_2; \; c_1 \neq 0; \; x_0 \le x \le x_k; \\ &F - \dot{y}F_{\dot{y}} = c_3; \; x_o \le x \le x_k. \end{aligned} \qquad (21)$$

Выполнение допущений (10) и (14). Условия (4), (6) определяют ограничения на значения функций $\varphi(x), F_{\dot{y}}, F_y$, с учетом которых находят искомое решение. Допущения (10) и (14) выполняются при соблюдении условия (18) и первого уравнения (21). Действительно, подставив в уравнение (7) условие (18) и первое уравнение (21), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\dot{\varphi}(x)}{\varphi(x)} = -\frac{c_1}{c_1 x + c_2}. \qquad (22)$$

Решение уравнения (22) можно представить в таком виде:

$$\varphi(x) = \frac{c_0}{c_1 x + c_2}; \qquad c_0 > 0. \qquad (23)$$

Подставив выражение (23) в условия (10), (14), получим

$$\frac{F_{\dot{y}}}{F_y}\varphi(x)\Bigg|_{x_0}^{x_k} = \frac{c_0}{c_1}\Bigg|_{x_0}^{x_k} = 0; \; x_0 \le x \le x_k; \qquad (24)$$

$$F_{\dot{y}}\varphi(x)\Bigg|_{x_0}^{x_k} = c_0\Bigg|_{x_0}^{x_k} = 0; \quad x_0 \le x \le x_k. \qquad (25)$$

Выполнение условия (25) означает выполнение уравнения Эйлера (13). Следует заметить, что уравнение (13) определяет классическую экстремаль, проходящую через начальную и конечную заданные точки [4].

Особый случай. Умножим уравнение (8) на α, подставив в подынтегральную функцию полученное выражение для $\varphi(x)$:

$$\frac{F_{\dot{y}}}{F_y}\delta y(x)\Bigg|_{x_0}^{x_k} - \int_{x_0}^{x_k} \alpha \frac{c_0}{c_1 x + c_2}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{F_{\dot{y}}}{F_y}\right) - 1\right)dx = 0. \qquad (26)$$

Если при каком-то значении $\bar{x}$

$$f(\bar{x}) = c_1\bar{x} + c_2 = 0, \qquad (27)$$

значение подынтегральной функции в уравнении (26) станет неопределенным:

$$\alpha c_0 \frac{0}{0}.$$

Раскроем неопределенность. Продифференцируем функцию $f(x)$ и определим ее значение в окрестности точки $\bar{x}$:

$$f(\bar{x} + \Delta x) = c_1 dx. \qquad (28)$$

Рассмотрим дифференциал *dx* как бесконечно малую разность, введенную в свое время Г. Лейбницем как бесконечно малую постоянную величину (которая меньше всякой конечной величины и все же не равна нулю). Подставим (28) в подынтегральную функцию уравнения (26), записав

$$\int_{x_0}^{x_k} \alpha \frac{c_0}{c_1 dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{F_{\dot{y}}}{F_y}\right) - 1\right)dx = 0. \qquad (29)$$

По предположению, α – также бесконечно малая постоянная величина, которую можно рассматривать как бесконечно малую разность *dx*. Сократив α и *dx* в выражении (29), получим, что в точке $\bar{x}$ выражение, стоящее перед скобками в подынтегральной функции уравнения (26), примет ненулевое конечное значение, что и требовалось доказать.

Уравнение экстремали в параметрическом виде. Уравнения (21) можно представить в параметрическом виде, приняв, например,

$$\dot{y} = \text{ctg}t. \qquad (30)$$

С учетом (30) уравнения (21) можно записать в виде системы двух уравнений:

$$\begin{cases} F_{\dot{y}}\left(y, \text{ctg}t\right) = c_1 x + c_2; \\ F\left(y, \text{ctg}t\right) - \text{ctg}t\left(c_1 x + c_2\right) = c_3. \end{cases} \qquad (31)$$

При заданных граничных условиях уравнения (31) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} y &= F_1\left(\text{ctg}t, c_1 c_2 c_3\right); \\ x &= F_2\left(\text{ctg}t, c_1 c_2 c_3\right). \end{aligned} \qquad (32)$$

Уравнения (32) будут представлять искомую экстремаль в параметрическом виде.

Для того чтобы экстремаль проходила через две заданные точки (1), достаточно решить систему уравнений (32) с учетом заданных граничных условий, выбрав четыре постоянных, например $\text{ctg}t_0$, $\text{ctg}t_k$,c_1,c_2. Одна постоянная, например c_3, «свободная». При заданном значении c_3 и выбранных четырех постоянных уравнения (32) можно определить одну экстремаль. Задавая различные численные значения c_3, мы можем построить семейство кривых, каждая из которых будет удовлетворять условиям экстремальности функционала.

Результаты расчетов. С учетом полученных результатов построим образующую тела вращения при c_3=0,01, доставляющую экстремум функционалу (1) при граничных условиях

$$y_0(x_0=1)=0{,}1; \;\; y_k(x_k=3)=1{,}1. \qquad (33)$$

Уравнения (21) для рассматриваемого функционала можно записать в виде

$$\begin{aligned} 3y\dot{y}^2 &= c_1 x + c_2; \\ y\dot{y}^3 &= c_3; \end{aligned} \quad x_0 \le x \le x_k. \qquad (34)$$

Подставив в уравнения (34) выражение (30) и решив полученную систему уравнений относительно y и x, получим

$$\begin{aligned} y &= c_3 \text{tg}^3 t; \\ x &= 3\frac{c_3}{c_1}\text{tg}t - \frac{c_2}{c_1}; \end{aligned} \quad t_0 \le t \le t_k. \qquad (35)$$

Два уравнения – два решения. Приведенные уравнения позволяют получить два решения: первое представлено в уравнении (35), позволяющее получать искомые *y(t)* и *x(t)* в параметрическом виде. Причем уравнения (35) имеют «свободную» постоянную. Например, c_3. Каждой c_3 будет соответствовать своя экстремаль. Второе решение можно получить, записав уравнения (35) в виде

$$\begin{aligned} &y\text{ctg}^3 t = c_3; \\ &(c_1 x + c_2)\text{ctg}t = 3c_3. \end{aligned} \qquad (36)$$

Подставив в (36) выражение (30), получим

$$y\dot{y}^3 = c_3. \qquad (37)$$

Уравнение (37) представляет собой первый интеграл Эйлера[3]. Его решение [1], [5] имеет вид

$$y = \left(\bar{c}_1 x + \bar{c}_2\right)^{\frac{3}{4}}; \;\; \bar{c}_1 = \frac{4}{3} c_3^{\frac{1}{3}}. \qquad (38)$$

Заметим, что постоянная c_3 входит как в (36), так и в (37), связывая таким образом классическое решение с предлагаемым.

Выразим функционал (1) при переменной *t*, подставив в него уравнения (35) и выражение (30), полагая «свободной» константу c_3. В результате получим уравнение для определения значения функционала

$$I = c_3(x_k - x_0). \qquad (39)$$

На рис. 1 приведена зависимость величины функционала для заданных x_k , x_0 и значений c_3, построенная с использованием уравнения (39).

Из рис. 1 следует, что для определенного диапазона значений c_3 можно получить величину функционала меньше, чем при использовании классического решения.

[3] В то же время уравнение (33) является вторым уравнением в системе (21), что подтверждает возможность получения первого решения.

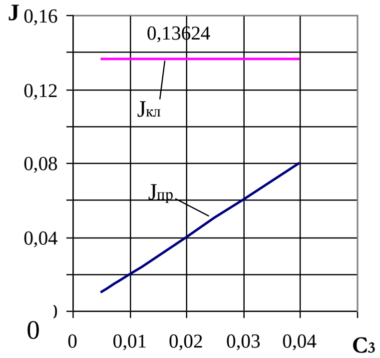
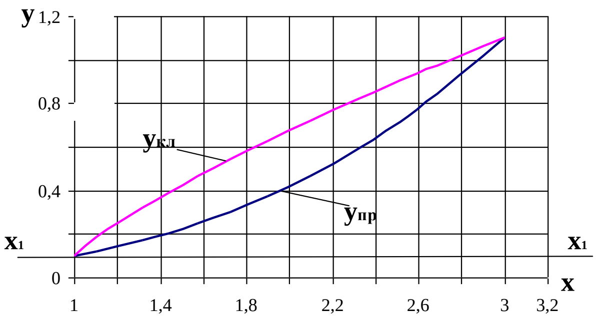


Рис. 1. Зависимость функционала при классической $I_{кл}$ и предлагаемой $I_{пр}$ экстремалях от значений c_3 (для граничных условий $y_0\,(x_0=1)=0{,}1$; $y_к=(x_г=3)=1{,}1$)

На рис. 2 для тех же граничных условий приведены классическая и предлагаемая экстремали.



x_1x_1 – ось вращения

Рис. 2. Классическая $y_{кл}(x)$ и предлагаемая $y_{пр}(x)$ образующие тел вращения (для граничных условий $y_0(x_0=1)=0{,}1$; $y_k(x_k=3)=1{,}1$; $c_3=0{,}01$)

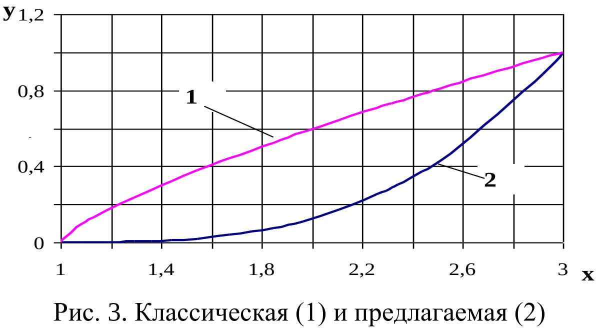


Рис. 3. Классическая (1) и предлагаемая (2) экстремали для тел вращения (для граничных условий $y_0(x_0=1)=0$; $y_k(x_k=3)=1$); $c_3=0{,}01$)

На рис. 3 приведены классическая (1) и предлагаемая (2) экстремали для граничных условий $y_o(x_0=1)=0$; $y_k(x_k=3)=1$.

Координаты экстремалей $y(x)$ при $c_3=0{,}01$ и $c_3=0{,}05$ приведены в табл. 1; отличия в координатах – в табл. 2.

Таблица 1

Координаты экстремалей при различных значениях c_3

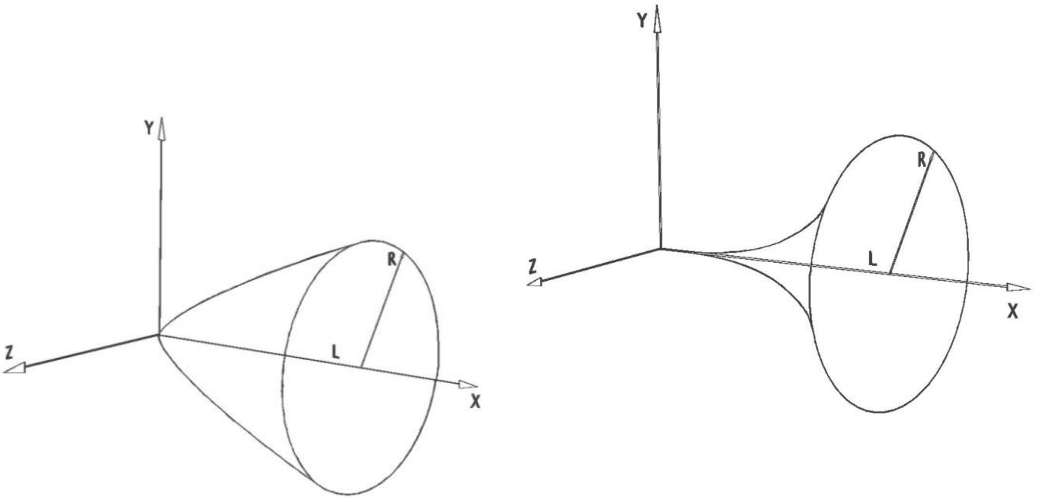
t	$C_3=0{,}05$		$C_3=0{,}01$	
	x	*y*	*x*	*y*
0	1	0	1	0
0,1	1,07392	0,00005	1,00432	0,00001
0,3	1,22792	0,00148	1,13328	0,00029
0,5	1,40251	0,00815	1,23539	0,00163
0,7	1,62060	0,02987	1,36293	0,00597
0,9	1,92849	0,10005	1,54298	0,02001
1,1	2,44764	0,37922	1,84658	0,07584
1,21782	3,00001	1,00002	2,16961	0,20000
1,255			2,31878	0,28670
1,28		C_3	2,43974	0,37304
1,35859			2,99999	0,99999

Таблица 2

Отличия в координатах экстремалей при $c_3=0{,}05$ и $c_3=0{,}01$

t	Δx	Δy
0	0	0
0,1	0,06960	0,00004
0,3	0,09463	0,00118
0.5	0,16712	0,00652
0,7	0,25767	0,02390
0,9	0,38550	0,07999
1,1	0,60105	0,30338
1,217824	0,83040	0,80001

На рис. 4 приведен общий вид тел вращения с использованием классической (a) и предлагаемой (b) экстремалей.



a b

Рис. 4. Аэродинамическая форма
тел вращения при использовании
известной (a) и предлагаемой (b) экстремалей

Заключение

1. Для решения рассматриваемой задачи предложена процедура, в основе которой лежат два условия экстремальности функционала, одним из которых является уравнение Эйлера.

2. Использование полученных условий позволяет получать множество кривых, доставляющих функционалу экстремальные значения. Каждая экстремаль соответствует заданному значению одной из констант.

3. С использованием предлагаемой процедуры могут быть построены образующие тел вращения, доставляющие функционалу численные значения меньшие, чем при использовании классического решения.

4. Полученные условия экстремальности могут быть использованы при решении других вариационных задач.

Список использованной литературы

1. Теория оптимальных аэродинамических форм/Под ред. А. Миеле. – М.: Мир, 1969. – 507 с.

2. Eggers A.J., Jr., Resnikoff M.M., Dennis D.H. Bodies of revolution having minimum drag at high supersonic airspeeds// NACA, Report. – №1306. – 1957.

3. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. – М.: Мир, 1974. – 488 с.

4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965. – 420 с.

5. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. – М.: Наука, 1973. – 71 с.

Статья поступила 18.05.2016