УДК 519.87

Канд. техн. наук Э.Г. Гладкий

НОРМИРОВАНИЕ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНФОРМАЦИОННОГО ПОДХОДА

Показаны возможности использования информационного подхода применительно к решению задачи нормирования надежности, когда требования к показателю безотказности технической системы заданы в виде нижней односторонней доверительной границы. Сформулирована и решена задача математического программирования для перехода от требований к нижней доверительной границе надежности технической системы к требованиям к точечной оценке надежности и ее среднему квадратическому отклонению. Предложенный подход был адаптирован для решения задачи непосредственного распределения требований к надежности подсистем и агрегатов технической системы в виде нижних доверительных границ.

Показано можливості використання інформаційного підходу для розв'язання задачі нормування надійності у випадку, коли вимоги до показника безвідмовності технічної системи задано у вигляді нижньої односторонньої довірчої межі. Сформульовано й розв'язано задачу математичного програмування для переходу від вимог до нижньої довірчої межі надійності технічної системи до вимог до точкової оцінки надійності та її середнього квадратичного відхилення. Запропонований підхід адаптовано до розв'язання задачі безпосереднього розподілу вимог до надійності підсистем і агрегатів технічної системи у вигляді нижніх довірчих меж.

The information approach capabilities to solve the problem of reliability normalization are considered for the case, when the requirements for reliability index of technical system are specified as lower one-sided confidence limit. The mathematical programming problem is defined and solved as to change-over from the requirements for lower confidence limit of the technical system reliability to the requirements for reliability point estimate and its root-mean-square deviation. The proposed approach was adapted to solution of the problem of direct reliability apportionment of the technical system subsystems and units as lower confidence limits.

Одной из задач, которую приходится решать разработчикам при проектировании новых технических систем (ТС), является нормирование надежности. Ее суть: исходя из заданных требований к надежности ТС, назначить уровни надежности для ее составных частей, подсистем и агрегатов.

Рассмотрим задачу нормирования применительно к показателю безотказности для систем однократного применения, к которым относятся ракеты-носители (РН). Для жидкостных ракетных двигателей и ракетных двигателей твердого топлива РН, а в некоторых случаях и для РН в целом требования к надежности могут задаваться для нижней односторонней доверительной границы в виде $\underline{P}_{c_\gamma}^{(тр)}$, где γ – требуемый уровень доверия. Нижняя односторонняя доверительная граница надежности определяется следующим образом:

$$Вер\left\{\underline{P}_\gamma \le P\right\} = \gamma\,,$$

где P – случайная величина показателя безотказности.

В этом случае при создании ТС разработчику необходимо стремиться к выполнению следующего неравенства:

$$\underline{P}_{c_\gamma} \ge \underline{P}_{c_\gamma}^{(тр)}\,, \tag{1}$$

где $\underline{P}_{c_\gamma}$ – нижняя односторонняя доверительная граница достигнутого уровня надежности системы.

Для решения задачи нормирования показателя безотказности в случае, когда для ТС задано требование в виде $\underline{P}_{c_\gamma}^{(тр)}$, используется несколько способов. Наиболее распространенный из них предполагает преобразование требования к нижней доверительной границе $\underline{P}_{c_\gamma}^{(тр)}$ в требования к точечной оценке надежности системы и ее среднему квадратическому отклонению, характеризующему точность получаемой оценки:

$$\underline{P_c}_{\gamma}^{(mp)} \to \begin{cases} P_c^{(mp)}, \\ \sigma_{P_c}^{(mp)}, \end{cases} \qquad (2)$$

где $P_c^{(mp)}$ – требуемый уровень для точечной оценки надежности ТС; $\sigma_{P_c}^{(mp)}$ – требуемый уровень среднего квадратического отклонения.

Таким образом, задание требования в виде (1) оказывается эквивалентным заданию пары требований

$$\begin{cases} P_c \ge P_c^{(mp)}, \\ \sigma_{P_c} \le \sigma_{P_c}^{(mp)}. \end{cases} \qquad (3)$$

Далее задача нормирования сводится к распределению требования $P_c^{(mp)}$ на подсистемы и агрегаты нижнего уровня известными методами. Необходимо отметить, что большинство существующих методов нормирования надежности (например, [5]) построено применительно к точечным оценкам надежности основной системы и ее подсистем. Таким образом, при решении задачи нормирования надежности вышеуказанным способом прежде всего необходимо определить требуемую точечную оценку надежности, соответствующую $\underline{P_c}_{\gamma}^{(mp)}$ (а вместе с ней и среднее квадратическое отклонение). В большинстве практических случаев переход (2) осуществляется через эквивалентное количество безотказных испытаний. Для этого используется нормальное или биномиальное распределение, описывающее оценку надежности ТС.

Исходя из нормального распределения оценки надежности, нижнюю доверительную границу определяют следующим образом:

$$\underline{P_c}_{\gamma} = P_c - t_{\gamma}\sigma_{P_c}, \qquad (4)$$

где P_c – точечная оценка надежности ТС; σ_{P_c} – среднее квадратическое отклонение оценки P_c; t_{γ} – односторонний квантиль стандартного нормального распределения, соответствующий доверительной вероятности γ.

В случае безотказных испытаний P_c и σ_{P_c} могут быть определены с использованием следующих соотношений [4]:

$$P(n) = 1 - \frac{1}{2(n+1)}; \qquad (5)$$

$$\sigma_P(n) = \frac{1}{2(n+1)}\sqrt{\frac{2n+1}{n+2}}, \qquad (6)$$

где n – количество безотказных испытаний ТС.

Таким образом, решая относительно n уравнение $\underline{P_c}_{\gamma} = P_c(n) - t_{\gamma} \cdot \sigma_{P_c}(n)$, вытекающее из (4), можно затем определить точечную оценку надежности и ее среднее квадратическое отклонение согласно (5) и (6).

В табл. 1 приведены значения эквивалентного количества испытаний и соответствующие им точечные оценки надежности и их средние квадратические отклонения для различных уровней $\underline{P_c}_{\gamma}$ и γ. В ячейках таблицы первое число – эквивалентное количество безотказных испытаний n, второе – точечная оценка надежности P_c, третье – среднее квадратическое отклонение оценки надежности σ_{P_c}.Таблица 1

Значения n, P_c и σ_{P_c}, соответствующие различным $\underline{P_c}_{\gamma}$ и γ

$\underline{P_c}_{\gamma}$	$\gamma(t_{\gamma})$		
	0,8 (0,842)	0,9 (1,282)	0,95 (1,645)
0,90	9,533 0,953 0,063	12,497 0,963 0,050	15,064 0,969 0,042
0,91	10,72 0,957 0,057	14,125 0,967 0,045	16,818 0,972 0,038
0,92	12,224 0,962 0,051	16,01 0,971 0,040	19,234 0,975 0,034
0,93	14,22 0,967 0,044	18,586 0,974 0,035	22,119 0,978 0,030
0,94	16,714 0,972 0,038	21,849 0,978 0,030	25,819 0,981 0,026

Продолжение табл. 1

$\underline{P_c}_\gamma$	$\gamma(t_\gamma)$		
	0,8 (0,842)	0,9 (1,282)	0,95 (1,645)
0,95	20,438 0,977 0,032	26,22 0,982 0,025	31,607 0,985 0,021
0,96	25,606 0,981 0,026	33,468 0,985 0,020	39,443 0,988 0,017
0,97	34,818 0,986 0,019	44,177 0,989 0,015	53,498 0,991 0,013
0,98	52,944 0,991 0,013	67,164 0,993 0,010	78,007 0,994 0,0089

Исходя из биномиального распределения, описывающего результаты испытаний ТС, эквивалентное количество безотказных испытаний определяется по формуле

$$n = \frac{\lg(1-\gamma)}{\lg(\underline{P_c}_\gamma)}, \qquad (7)$$

которая непосредственно следует из известного соотношения [3]

$$\underline{P_c}_\gamma = (1-\gamma)^{1/n}.$$

Полученное согласно (7) эквивалентное количество безотказных испытаний ТС n, соответствующее различным $\underline{P_c}_\gamma$ и γ, приведено в табл. 2.

Таблица 2

Эквивалентное количество безотказных испытаний для различных $\underline{P_c}_\gamma$ и γ

$\underline{P_c}_\gamma$	0,8	0,9	0,95
0,90	15,3	21,8	28,4
0,91	17,1	24,4	31,8
0,92	19,3	27,6	35,9
0,93	22,2	31,7	41,3
0,94	26,0	37,2	48,4
0,95	31,4	44,9	58,4
0,96	39,4	56,4	73,4
0,97	52,8	75,6	98,4
0,98	79,7	114,0	148,3

Теперь для полученных значений n необходимо определить P_c и σ_{P_c}, например, с использованием соотношений (5) и (6).

Сравнительный анализ данных табл. 1 и 2 показывает, что эквивалентное количество безотказных испытаний, получаемое согласно (7) для биномиального распределения, значительно превышает соответствующее количество испытаний, получаемое с использованием нормального распределения. Это, естественно, будет приводить к более высоким требуемым значениям точечной оценки надежности.

Теперь рассмотрим возможности использования информационного подхода для преобразования требований к надежности ТС согласно (2). Будем полагать, что распределение оценки надежности ТС подчиняется бета-распределению

$$f(p;\alpha,\beta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}, \qquad (8)$$

где $p \in [0,1]$, $\alpha, \beta \ge 0$, $B(\alpha, \beta)$ – бета-функция, которая выражается через гамма-функцию $\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Будем искать такое бета-распределение оценки надежности (8), которое при заданном $\underline{P_c}_\gamma$ является наименее информативным. Последнее определяется с использованием энтропии, которая является мерой априорной неопределенности [1]. Таким образом, необходимо определить максимум функции энтропии распределения (8)

$$H(\alpha,\beta) =$$

$$= -\int_0^1 \ln(f(p;\alpha,\beta)) f(p;\alpha,\beta)dp \underset{\alpha,\beta}{\rightarrow} \max \qquad (9)$$

при условии типа равенства

$$\int_{\underline{P}_\gamma}^1 f(p;\alpha,\beta)dp = \gamma. \qquad (10)$$

Отметим некоторые свойства функции $H(\alpha, \beta)$. Поверхность функции $H(\alpha, \beta)$ показана на рис. 1. Максимум функции $H(\alpha, \beta) = 0$ достигается при $\beta = \alpha = 1$. Этим подтверждается известный факт, что в случае отсутствия ограничений на параметры α и β наименее информативным является равномерное распределение, которое представляет частный случай бета-распределения при $\alpha = \beta = 1$.

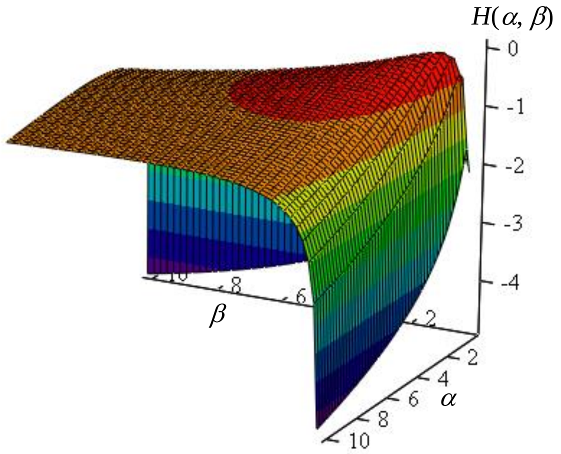


Рис. 1. График поверхности $H(\alpha, \beta)$

Функция $H(\alpha, \beta)$ обладает свойством симметрии, так что $H(\alpha, \beta) = H(\beta, \alpha)$. На рис. 2 показаны кривые $H(\alpha, \beta)$ при определенных значениях параметра β. Их анализ показывает, что с увеличением β максимум функции $H(\alpha, \beta)$ смещается в сторону больших значений α.

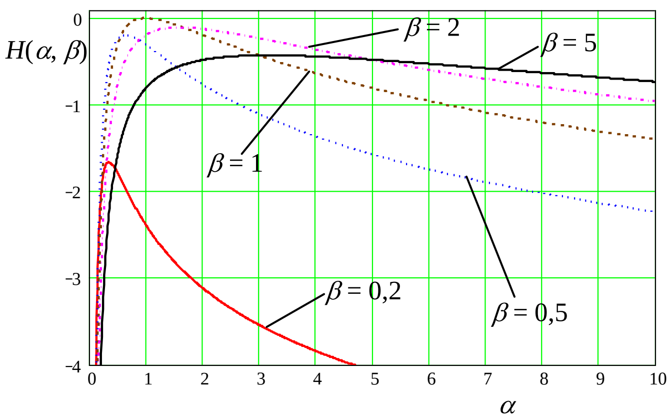


Рис. 2. График функции $H(\alpha, \beta)$ при заданном β

Задача определения максимума (9) при ограничении типа равенства (10) относится к классу задач математического программирования. Ее решение можно получить с использованием пакета математических вычислений MathCAD. В табл. 3 приведены значения P_c и σ_{P_c} для соответствующих α и β (в скобках), полученные в результате решения указанной задачи условной оптимизации с использованием стандартной функции Maximize. Значения P_c и σ_{P_c} для бета-распределения (8) определялись по формулам

$$P_c = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}; \tag{11}$$

$$\sigma_{P_c}^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}. \tag{12}$$

Таблица 3

Значения P_c и σ_{P_c}, а также α и β, соответствующие различным $\underline{P}_{c\gamma}$ и γ

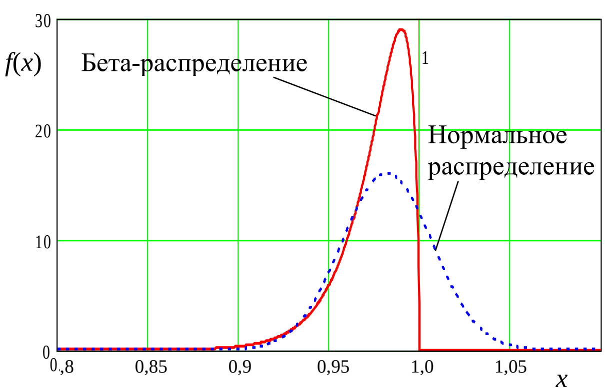
$\underline{P}_{c\gamma}$	γ		
	0,8	0,9	0,95
0,90	0,938 0,055 (17,47; 1,164)	0,951 0,037 (31,226; 1,626)	0,9565 0,0292 (45,575; 2,07)
0,91	0,944 0,050 (19,54; 1,165)	0,956 0,034 (34,995; 1,631)	0,9609 0,0263 (51,316; 2,091)
0,92	0,950 0,044 (22,158; 1,168)	0,960 0,030 (39,739; 1,637)	0,9653 0,0234 (58,119; 2,091)
0,93	0,956 0,039 (25,481; 1,169)	0,965 0,026 (45,793; 1,641)	0,9696 0,0205 (67,192; 2,107)
0,94	0,962 0,034 (29,936; 1,170)	0,970 0,022 (53,662; 1,637)	0,9740 0,0176 (79,181; 2,118)
0,95	0,969 0,028 (36,175; 1,172)	0,975 0,019 (65,327; 1,655)	0,9783 0,0146 (95,904; 2,127)
0,96	0,975 0,023 (45,49; 1,172)	0,980 0,015 (82,388; 1,661)	0,9827 0,0117 (120,945; 2,134)
0,97	0,981 0,017 (61,098; 1,175)	0,985 0,011 (110,773; 1,666)	0,9870 0,0088 (161,504; 2,119)
0,98	0,987	0,9901	0,9928

	0,012 (92,316; 1,177)	0,0076 (168,087; 1,678)	0,0065 (169,399; 1,228)

Приведенные в табл. 3 значения P_c и σ_{P_c} получены для значений α и β, превышающих 1. В то же время необходимо отметить, что при значениях $\underline{P}_{c_\gamma}$ и γ, достаточно близких к 1, MathCAD-процедура определения максимума может давать решение задачи и для J-образного бета-распределения, т.е. для случая, когда $0 < \beta < 1$.

Сравнение данных табл. 1 и 3 показывает, что использование нормального распределения приводит к более высоким требуемым значениям точечной оценки надежности ТС, соответствующим заданному нижнему доверительному уровню, по сравнению со значениями, полученными путем решения задачи условной оптимизации (9), (10). Последнее объясняется тем, что нормальное распределение, используемое для описания оценки надежности, в отличие от бета-распределения имеет неограниченную вариацию и соответственно выходит за предельное значение вероятности, равное 1 (как показано на рис. 3).

Рис. 3. Функции плотности нормального
и бета-распределений оценки надежности,



соответствующие $\underline{P}_{c_\gamma} = 0{,}95$ при $\gamma = 0{,}9$

В большинстве случаев при решении задачи нормирования требования к надежности составных частей, подсистем и агрегатов необходимо задавать в той же форме, что и требование к надежности ТС в целом. Таким образом, для требуемого уровня надежности ТС $\underline{P}_{c_\gamma}^{(тр)}$ требования к надежности ее составных частей также следует задавать в виде нижних доверительных границ. Для определенности будем рассматривать ТС, которая представляется в виде последовательного соединения N составных частей (компонент). Надежность такой последовательной системы определяется следующим образом:

$$P_c = \prod_{i=1}^{N} P_i \,, \tag{13}$$

где P_i – надежность i-того компонента ТС.

В случае использования нормального распределения для описания оценок надежности ТС и ее компонентов и полагая один и тот же уровень доверия γ, в работе [2] получено соотношение, связывающее нижние доверительные уровни надежности системы и ее составных частей:

$$\underline{P}_{c_\gamma} = P_c\left(1-\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(1-\frac{\underline{P}_{i_\gamma}}{P_i}\right)^2}\right), \tag{14}$$

где $\underline{P}_{i_\gamma}$ – нижний доверительный уровень надежности для i-того компонента ТС.

Соотношение (14) с учетом (13) позволяет задавать требования к надежности подсистем в виде нижних границ. Однако при этом необходимо увязать нижние границы с точечными оценками надежности отдельных составных частей ТС. Значительного упрощения можно добиться в случае равномерного распределения требований к надежности подсистем и агрегатов. Соотношение (14) упростится и примет такой вид:

$$\frac{\underline{P}_{c_\gamma}}{P^N} = 1-\sqrt{N}\left(1-\frac{\underline{P}_\gamma}{P}\right).$$

Использование информационного подхода позволяет решить задачу нормирования надежности и непосредственно назначить требования к нижним границам надежности составных частей ТС. Пусть показатели безотказности составных частей ТС описываются бета-распределениями (8) со своими параметрами (α_i, β_i) для $i = \overline{1, N}$. Соответственно

$$P_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i}; \tag{15}$$

$$\sigma^2_{P_i} = \frac{\alpha_i \beta_i}{(\alpha_i + \beta_i)^2 (\alpha_i + \beta_i + 1)}. \tag{16}$$

В этом случае надежность ТС в соответствии с (13) и (15) определяется следующим образом:

$$P_c(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = \prod_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i}. \tag{17}$$

Среднее квадратическое отклонение оценки надежности ТС определим так:

$$\sigma^2_{P_c} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{P_c}{P_i} \right)^2 \sigma^2_{P_i}$$

или с учетом (16) и (17)

$$\sigma^2_{P_c}(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{P_c(\overline{\alpha}, \overline{\beta})}{\dfrac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i}} \right)^2 \times$$

$$\times \frac{\alpha_i \beta_i}{(\alpha_i + \beta_i)^2 (\alpha_i + \beta_i + 1)}. \tag{18}$$

В итоге параметры бета-распределения оценки надежности ТС в целом определяются по формулам [6]

$$\alpha_c(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = P_c(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) \times$$

$$\times \left[\frac{P_c(\overline{\alpha}, \overline{\beta})[1 - P_c(\overline{\alpha}, \overline{\beta})]}{\sigma^2_{P_c}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})} - 1 \right]; \tag{19}$$

$$\beta_c(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = (1 - P_c(\overline{\alpha}, \overline{\beta})) \times$$

$$\times \left[\frac{P_c(\overline{\alpha}, \overline{\beta})[1 - P_c(\overline{\alpha}, \overline{\beta})]}{\sigma^2_{P_c}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})} - 1 \right], \tag{20}$$

где $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$, $\overline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_N)$ – векторы параметров бета-распределений оценок надежности компонент ТС.

Для определения значений векторов параметров $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ необходимо определить максимум функции $H(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ (9) при условии типа равенства (10).

Наиболее простое решение рассмотренной задачи получается для равномерного распределения требований к надежности, при котором $P_i = P$ и соответственно $\alpha_i = \alpha$ и $\beta_i = \beta$ для $i = \overline{1, N}$. В этом случае задача сводится к поиску значений всего лишь двух параметров α и β. При этом для (17) и (18) имеем

$$P_c(\alpha, \beta) = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^N;$$

$$\sigma^2_{P_c}(\alpha, \beta) = N \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^{2(N-1)} \times$$

$$\times \frac{\alpha \beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}.$$

Рассмотрим следующий пример использования предложенного способа нормирования надежности. Пусть система состоит из трех последовательно соединенных элементов. Требования к надежности системы заданы на уровне $\underline{P}_{c_\gamma}$ = 0,95 для γ = 0,8. Используется равномерное распределение требований к надежности на составные части ТС. Путем решения задачи определения максимума (9) с учетом ограничения (10) для каждого компонента ТС находим

P = 0,9894; σ = 0,0166; $\underline{P}_\gamma = 0{,}983$,

что обеспечивает надежность для системы в целом P_c = 0,9686 и σ_{P_c} = 0,028.

В число ограничений могут быть включены требования к точечным оценкам надежности для некоторых составных частей ТС. Их надежность может быть не ниже уровня, достигнутого для подсистем-аналогов. Таким образом, к ограничению (10) необходимо добавить требования в виде

$$\frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i} = P_i^* \ (i \le N),$$

где P_i^* – уровень надежности для i-той составной части ТС, достигнутый для подсистемы-аналога.

Например, если в условиях предыдущего примера для второй и третьей подсистем имеются уровни надежности, достигнутые для подсистем-аналогов P_2^* = 0,99 и

$P_3^* = 0{,}995$, то решение задачи условной оптимизации приводит к следующим значениям параметров:

$$P_1 = 0{,}9833;\ \sigma_1 = 0{,}0195;\ \underline{P_1}_\gamma = 0{,}9724;$$

$$\sigma_2 = 0{,}0165;\ \underline{P_2}_\gamma = 0{,}984;$$

$$\sigma_3 = 0{,}013;\ \underline{P_3}_\gamma = 0{,}9947.$$

При этом, как и выше, полученные значения P_i и σ_i $(i = \overline{1,3})$ для системы в целом обеспечивают уровень надежности и среднее квадратическое отклонение, равные $P_c = 0{,}9686$ и $\sigma_{P_c} = 0{,}028$, что соответствует данным табл. 3.

Рассматриваемые примеры показали, что в обоих случаях при определении требований к надежности подсистем и агрегатов получаемый уровень надежности ТС соответствовал значению, которое получается путем перехода (2). Таким образом, подход с перезаданием требований к надежности в виде (2) и нормированием требований применительно к точечной оценке надежности является вполне обоснованным и может быть рекомендован при проведении практических расчетов.

Заключение

В статье с использованием информационного подхода предложены практические процедуры:

- переход от требований к нижней доверительной границе надежности для ТС к требованиям к ее точечной оценке надежности и среднему квадратическому отклонению;
- распределение требования к надежности ТС, заданного в виде $\underline{P_c}_\gamma^{(mp)}$, на подсистемы и агрегаты в виде нижних односторонних доверительных границ надежности.

Получено обоснование используемого на практике подхода с перезаданием требований к надежности ТС в виде (2) и дальнейшего нормирования требований применительно к точечным оценкам надежности.

Показано, что с использованием предложенного информационного подхода требования к точечной оценке надежности ТС получаются более низкими по сравнению со значениями, полученными с использованием эквивалентного количества безотказных испытаний.

Список использованной литературы

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.

2. Волков Е.Б., Судаков Р.С., Сырицын Т.А. Основы теории надежности ракетных двигателей. – М.: Машиностроение, 1974. – 400 с.

3. Волков Л.И., Шишкевич А.М. Надежность летательных аппаратов. – М.: Высш. шк., 1975. – 294 с.

4. Гладкий Э.Г. К вопросу оценки надежности систем в случае безотказных испытаний // Космическая техника. Ракетное вооружение: Сб. науч.-техн. ст. – Днепропетровск: ГП "КБ "Южное", 2013. – Вып. 1. – С. 114 – 116.

5. Надежность и эффективность в технике: справочник в 10 т. – М.: Машиностроение, 1988. – Т. 5. Проектный анализ надежности / Под общ. ред. В. И. Патрушева, А.И. Рембезы. – 316 с.

6. Савчук В.П. Байесовские методы статистического оценивания: Надежность технических объектов. – М.: Наука, 1989. – 328 с.

Статья поступила 10.06.2016