Космическая техника. Ракетное вооружение. 2016. Вып. 2 (112)

УДК 531.551:629.764

Канд. техн. наук Э.П. Компаниец, д-р техн. наук Н.М. Дронь,
Е.Ю. Баранов, Н.Г. Литвин

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ КОСМИЧЕСКИХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Проведен анализ существующих методов выбора траекторий ракет-носителей космических летательных аппаратов. Предложен обобщенный метод выбора оптимальных траекторий полета ракет-носителей в центральном гравитационном поле при запуске искусственных спутников Земли.

Проведено аналіз існуючих методів вибору траєкторій ракет-носіїв космічних літальних апаратів. Запропоновано узагальнений метод вибору оптимальних траєкторій польоту ракет-носіїв у центральному гравітаційному полі під час запуску штучних супутників Землі.

An analysis of the existing methods of trajectories selection of spacecraft launch vehicles is performed. A generalized method is proposed for selection of optimal flight trajectories of launch vehicles in the central gravitational field when launching the artificial earth satellites.

Вопросу определения оптимальных траекторий в задачах космической баллистики в настоящее время уделяется большое внимание. Ему посвящены многие работы отечественных и зарубежных авторов. При этом в большинстве работ решается задача перехода из одной заданной точки пространства в другую по траектории, обеспечивающей минимум расхода топлива [1-9]. В качестве оптимизируемого функционала используется интеграл вида $\int_{t_o}^{t_k} \dot{m}dt$, характеризующий расход массы за время полета, т.е. при заданном режиме работы двигателя оптимизируется продолжительность активного участка траектории. Краевые условия в граничных точках в этом случае задаются полностью или некоторые из них остаются свободными. При неполностью заданных краевых условиях в качестве дополнительного оптимизируемого функционала рассматриваются также параметры движения на левом или правом концах интегрирования (скорость, высота, дальность, угол наклона вектора скорости и т.п.), входящие в уравнения связи. В том числе когда необходимо оптимизировать некоторый функционал, зависящий от нескольких или от всех параметров движения (высота апогея и перигея, эксцентриситет орбиты, период обращения, энергия и т.п.), решение значительно усложняется и требует очень большого количества времени даже при применении электронно-вычислительных машин.

Рассмотрим метод оптимизации активных участков траекторий космических летательных аппаратов (КЛА) исходя из конечной цели выведения на заданную орбиту. При этом в качестве оптимизируемого функционала может быть выбрана любая характеристика получаемой орбиты (высота апогея и перигея, период обращения, скорость в любой точке орбиты, угловое положение перигея, фокальный параметр и т.д.). Задачу будем решать для случая движения в центральном гравитационном поле при ряде упрощающих предположений. Основное требование – разработать методику, позволяющую за 3-4 приближения получить оптимальную траекторию.

Постановка задачи. Положение объекта в пространстве полностью характеризуется следующими шестью основными элементами орбиты:

- Ω – долгота восходящего узла;
- i – наклонение орбиты;
- ω – аргумент широты перицентра;
- α – большая полуось орбиты;
- e – эксцентриситет орбиты;
- τ – момент прохождения через перицентр.

Для отдельных случаев (круговая, параболическая орбиты) ряд этих элементов теряет смысл.

Если эти элементы известны, то положение и скорость КЛА в любой момент времени t также известны.

Кроме этих основных элементов, в небесной механике применяются и другие величины, заменяющие их.

Эллиптическая орбита

Ω	i	ω	α	e	τ
–	–	π	n	φ'	ε
α_τ	β_τ	γ_τ	T	–	M_o
α'_τ	β'_τ	γ'_τ	h_π	h_a	–
–	–	–	P	–	–

Гиперболическая орбита

Ω	i	ω	α	e	τ
–	–	π	h_π	–	–
α_τ	β_τ	γ_τ	ρ	–	–
α'_τ	β'_τ	γ'_τ	–	–	–

В таблицах заменяющие элементы написаны под каждым из основных, который они могут заменить.

При запуске космических объектов необходимо обеспечить заданное значение тех параметров орбиты, от которых зависит выполнение той или иной поставленной задачи. Остальные параметры могут быть выбраны произвольно.

Рассмотрим методы обеспечения заданных параметров орбиты.

1. Параметры Ω, i, ω и заменяющие их элементы определяют:

– ориентацию плоскости орбиты в пространстве Ω, i;

– ориентацию большой оси орбиты в плоскости орбиты ω.

Заданные значения этих параметров при заданной точке старта $\varphi_{r.a}$, λ_o могут быть обеспечены в результате анализа следующих характеристик:

а) момента старта с Земли. Изменяя момент старта в диапазоне $0^h \le t \le 24^h$, можно обеспечить любое значение параметра Ω из диапазона

$$0 \le \Omega \le 360^{\circ};$$

б) азимута запуска. Изменяя азимут запуска в диапазоне $-90^{\circ} \le \psi_0 \le +90^{\circ}$, можно обеспечить любое значение параметра i из диапазона

$$(\pi - \varphi_{r.a}) \ge i \ge \varphi_{r.a};$$

в) момента старта с орбиты ожидания. Применяя промежуточную орбиту ожидания и изменяя момент старта с нее в диапазоне $0 \le t \le T$, можно обеспечить любое значение параметра ω из диапазона

$$0 \le \omega \le 360^{\circ}.$$

2. Параметр τ и заменяющие его элементы определяют положение спутника на орбите в начальный момент времени. Заданное значение этого параметра может быть обеспечено в результате применения промежуточной орбиты подбором соответствующего витка для перехода на заданную орбиту.

3. Оставшиеся элементы α, e и заменяющие их h_π, h_a, ρ, T, n, φ определяют размеры орбиты и ее формулы, при прочих равных условиях они полностью зависят от параметров конца активного участка траектории выведения спутника на орбиту.

Основное требование, которому должен быть подчинен выбор траекторий выведения, заключается в нахождении оптимального закона управления полетом ракеты-носителя. В общем виде задача отыскания оптимального закона управления полетом ракеты-носителя заключается в нахождении траектории, обеспечивающей достижение заданного значения некоторого определенного функционала $f(h_\pi, h_a, \rho, T, n, \varphi'$ и т.п.) при минимальных энергетических затратах.

Другая формулировка этой задачи: определить траекторию, обеспечивающую экстремальное значение некоторого функционала $f(h_\pi, h_a, \rho, T, n, \varphi'$ и др.) при заданных энергетических затратах.

Рассмотрим движение космического летательного аппарата под действием гравитационного поля планеты и двигательной установки КЛА.

Предположим, что космический летательный аппарат первоначально выведен на круговую или эллиптическую орбиту ожидания. В некоторый момент времени необходимо совершить маневр с целью решения определенной задачи:

1) уход из сферы притяжения планеты;
2) переход на эллиптическую орбиту;
3) посадка на поверхность планеты и др.

Найдем траекторию, обеспечивающую при заданных кинематических параметрах начала траектории экстремальное значение некоторого функционала *J* в момент выключения двигателя, который будем считать заданным. Вид функционала *J* будет зависеть от поставленной задачи. В силу взаимности полученное решение будет обеспечивать также достижение заданного значения функционала *J* при минимальном расходе топлива.

При этом из постановки задачи следует, что необходимо рассматривать случай, когда маневр КЛА происходит в плоскости начальной орбиты, определяемой параметрами движения КЛА в момент выхода на орбиту ожидания.

Будем считать, что траектория КЛА в пространстве определена, если получена замкнутая система дифференциальных уравнений, описывающих движение центра масс КЛА, и выбраны начальные условия интегрирования этой системы, обеспечивающие достижение экстремального значения указанного функционала *J*.

Ограничимся случаем, когда масса ракеты и тяга двигателя являются заданными функциями времени.

Задачу будем решать при следующих упрощающих предположениях:

1. Планета представляет собой шар с радиально распределенной плотностью массы.
2. Линейные размеры космического корабля незначительны по сравнению с расстоянием между ним и центром планеты.
3. Сопротивление среды отсутствует.
4. Составляющая силы тяги, расходуемая на управление, пренебрежимо мала по сравнению с общей тягой.

Гравитационное поле сферической планеты с радиально распределенной плотностью массы представляет собой, как известно, центральное поле, определяемое потенциалом

$$\Pi = k / r, \qquad (1)$$

где $$k = fM_r. \qquad (2)$$

Учитывая незначительность линейных размеров КЛА по сравнению с расстоянием между ним и центром планеты, предположим, что КЛА притягивается как материальная точка с массой, равной массе КЛА.

Кроме того, будем предполагать, что система управления и двигательная установка работают идеально: величина и направление вектора тяги всегда совпадают с программными величинами. Эти допущения, не снижая общности получаемых результатов и не внося принципиальных и существенных погрешностей в исследования, позволяют упростить анализ и выбор экстремальных траекторий.

Уравнения движения. Векторное уравнение движения точки переменной массы под действием реактивной силы, связанной с отбросом массы, имеет такой вид:

$$m\dot{\bar{V}} = \bar{P} + \sum \bar{F}, \qquad (3)$$

где $\sum \bar{F}$ – равнодействующая внешних сил. В рассматриваемом случае равнодействующая внешних сил равна силе тяжести.

Рассмотрим стартовую систему координат ОХУ, начало которой помещено в точке пересечения линии "центр Земли – центр масс КЛА" с поверхностью Земли в начальный момент времени: ось ОХ направлена по касательной к поверхности Земли в направлении движения КЛА, ось ОУ направлена вертикально вверх.

При сделанных допущениях дифференциальные уравнения движения КЛА (3) в проекции на оси стартовой системы координат будут иметь такой вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{P}{m}\cos\varphi - g_x, \\ \dfrac{dV_y}{dt} = \dfrac{P}{m}\sin\varphi - g_y. \end{cases} \qquad (4)$$

Проекции ускорения силы тяготения на осях OX и OУ можно представить в таком виде:

$$\begin{cases} g_x = g_0 \dfrac{xR^2}{\left[(R+y)^2 + x^2\right]^{3/2}}, \\ g_y = g_0 \dfrac{(R+y)R^2}{\left[(R+y)^2 + x^2\right]^{3/2}} \end{cases} \qquad (5)$$

или

$$\begin{cases} g_x = k \dfrac{x}{\left[(R+y)^2 + x^2\right]^{3/2}}, \\ g_y = k \dfrac{R+y}{\left[(R+y)^2 + x^2\right]^{3/2}}. \end{cases} \qquad (6)$$

С учетом выражения (6) систему уравнений движения (4) запишем так:

$$\begin{cases} \dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{P}{m}\cos\varphi - k\dfrac{x}{\left[(R+y)^2 + x^2\right]^{3/2}}, \\ \dfrac{dV_y}{dt} = \dfrac{P}{m}\sin\varphi - k\dfrac{R+y}{\left[(R+y)^2 + x^2\right]^{3/2}}, \\ \dfrac{dx}{dt} = V_x, \\ \dfrac{dy}{dt} = V_y. \end{cases} \qquad (7)$$

Учитывая, что при решении рассматриваемых задач протяженность активного участка траектории старта с орбиты предполагается более или менее ограниченной, с целью облегчения решения задачи упростим выражение (5).

Разложив в ряд функции g_x и g_y в окрестностях точки (0, 0) и ограничившись членами, содержащими x и y в первой степени, получим следующую приближенную систему:

$$\begin{cases} g_x = g_o \dfrac{x}{R}, \\ g_y = g_o - 2g_o \dfrac{y}{R}. \end{cases} \qquad (8)$$

С учетом выражения (8) система уравнений движения (4) может быть записана так:

$$\begin{cases} \dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{P}{m}\cos\varphi - g_o \dfrac{x}{R}, \\ \dfrac{dV_y}{dt} = \dfrac{P}{m}\sin\varphi - g_o + 2g_o \dfrac{y}{R}, \\ \dfrac{dx}{dt} = V_x, \\ \dfrac{dy}{dt} = V_y. \end{cases} \qquad (9)$$

Системы уравнений (7) и (9) будут замкнуты, если задать зависимость параметров P, m, φ от времени.

При заданных начальных условиях движения x_o, y_o, V_{xo}, V_{yo} эти уравнения полностью определяют движение КЛА в центральном гравитационном поле.

Уравнения экстремальной траектории. Траектория КЛА при сделанных упрощающих предположениях и допущениях описывается четырьмя дифференциальными уравнениями первого порядка (7)

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{V}_x - \dfrac{P}{m}\cos\varphi + k\dfrac{x}{\left[(R+y)^2 + x^2\right]^{3/2}} = 0, \\ \omega_2 = \dot{V}_y - \dfrac{P}{m}\sin\varphi + k\dfrac{R+y}{\left[(R+y)^2 + x^2\right]^{3/2}} = 0, \\ \omega_3 = \dot{x} - V_x = 0, \\ \omega_4 = \dot{y} - V_y = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

и тремя конструктивными соотношениями $P=P(t)$, $m=m(t)$, $\varphi=\varphi(t)$. В дальнейшем первые два соотношения $\left[P = P(t), m = m(t)\right]$ будем считать заданными функциями времени. Задача состоит в нахождении третьего конечного соотношения $\varphi = \varphi(t)$.

Дифференциальные уравнения (10) являются уравнениями связи между параметрами V_x, V_y, x, y, φ.

Эти уравнения включают одну независимую переменную t и пять зависимых переменных V_x, V_y, x, y, φ и, следовательно, обладают одной степенью свободы. Таким образом, для каждой заданной системы начальных условий x_o, y_o, V_{xo}, V_{yo} существует бесконечное множество возможных траекторий, отличающихся произвольно заданным для каждой из них законом управления угловым положениям КЛА в пространстве φ.

Пусть в начальный момент времени $t=t_o$ заданы кинематические параметры движения точки переменной массы m

$$x_o;\ y_o;\ V_{xo};\ V_{yo}.$$

Если на отрезке времени $[t_o;\ t_k]$ задан закон управления φ угловым положением КЛА в пространстве, траектория объекта однозначно определена, так как в этом случае имеем однозначное решение

$$\begin{cases} x=\psi_1(x_o;\ y_o;\ V_{xo};\ V_{yo};\ \varphi), \\ y=\psi_2(x_o;\ y_o;\ V_{xo};\ V_{yo};\ \varphi), \\ V_x=\psi_3(x_o;\ y_o;\ V_{xo};\ V_{yo};\ \varphi), \\ V_y=\psi_4(x_o;\ y_o;\ V_{xo};\ V_{yo};\ \varphi). \end{cases} \quad (11)$$

Требуется среди всех управлений φ, переводящих КЛА из точки с параметрами x_o; y_o; V_{xo}; V_{yo} в заданную точку пространства x_k; y_k; V_{xk}; V_{yk}, найти такое управление, которое обеспечивает экстремум некоторому функционалу

$$J = f(x_k;\ y_k;\ V_{xk};\ V_{yk}), \quad (12)$$

зависящему от кинематических параметров движения в конце активного участка траектории.

Траекторию, удовлетворяющую этому условию, будем называть экстремальной.

Как мы уже указывали выше, вид функционала (12) зависит от поставленной задачи. При определении экстремальной траектории не будем конкретизировать этот функционал. Представим его в общем виде, предполагая, что существуют непрерывные на отрезке времени $[t_o;\ t_k]$ первые производные от этого функционала по координатам и скоростям.

Заметим, что мы оптимизируем параметры орбиты, которые являются функциями только скоростей и координат и не зависят от их производных.

Решим задачу на условный экстремум функционала (12). Для этого рассмотрим новый функционал, эквивалентный функционалу (12):

$$F = J + \int_{t_o}^{t_k} H dt = f(x_k;\ y_k;\ V_{xk};\ V_{yk}) + \int_{t_o}^{t_k} H dt. \quad (13)$$

При этом подынтегральная функция будет иметь такой вид:

$$H = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3 + \lambda_4\omega_4, \quad (14)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ – некоторые пока неопределенные функции времени; ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 определяются согласно (9).

Функционал F в силу условия (9) эквивалентен функционалу (12), так как подынтегральная функция H обращается в нуль при любых значениях параметров λ_i.

Очевидно, что будут совпадать и вариации этих функционалов. Обозначим через q_i варьируемые функции

$$q_i = x,\ y,\ V_x,\ V_y,\ \varphi$$

и возьмем первую вариацию от функционала (13). Она будет иметь следующий вид:

$$\delta F = \sum_{i=1}^{5} \frac{\partial J}{\partial q_i}\delta q_i \Bigg|_{t=t_o}^{t=t_k} + \int_{t_0}^{t_k} \sum_{i=1}^{5} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right) dt + H\delta t \Bigg|_{t=t_o}^{t=t_x}. \quad (15)$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\delta F = \sum_{i=1}^{5} \frac{\partial J}{\partial q_i}\delta q_i \Bigg|_{t=t_o}^{t=t_k} + \left[\left(H - \sum_{i=1}^{5} \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i \right)\delta t + \sum_{i=1}^{5} \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \right] \Bigg|_{t=t_o}^{t=t_x} + \quad (16)$$
$$+ \sum_{i=1}^{5} \int_{t_o}^{t_k} \left[\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt.$$

Проведем анализ вариации функционала δF.

1. Первый член выражения (16) можно переписать в виде

$$\delta Q = \sum_{i=1}^{5} \frac{\partial J}{\partial q_i}\delta q_i \Bigg|_{t=t_o}^{t=t_k} = \frac{\partial J}{\partial V_{xo}}\delta V_{xo} + \frac{\partial J}{\partial V_{yo}}\delta V_{yo} + \frac{\partial J}{\partial x_o}\delta x_o +$$
$$+ \frac{\partial J}{\partial y_o}\delta y_o + \frac{\partial J}{\partial \varphi_o}\delta \varphi_o + \frac{\partial J}{\partial V_{xk}}\delta V_{xk} + \frac{\partial J}{\partial V_{yk}}\delta V_{yk} + \frac{\partial J}{\partial x_k}\delta x_k + \quad (17)$$
$$+ \frac{\partial J}{\partial y_k}\delta y_k + \frac{\partial J}{\partial \varphi_k}\delta \varphi_k.$$

Учитывая, что в начальный момент времени $t = t_o$ значения варьируемых функций заданы, их вариации следует приравнять к нулю:

$$\delta V_{xo} = \delta V_{yo} = \delta x_o = \delta y_o = 0\,. \tag{18}$$

Предполагая, что функция J не зависит явным образом от программы тангажа, можно записать равенство

$$\frac{\partial J}{\partial \varphi} = 0\,. \tag{19}$$

С учетом (18) и (19) выражение (17) упрощается:

$$\delta Q = \frac{\partial J}{\partial V_{x\kappa}}\delta V_{x\kappa} + \frac{\partial J}{\partial V_{y\kappa}}\delta V_{y\kappa} + \frac{\partial J}{\partial x_\kappa}\delta x_\kappa + \frac{\partial J}{\partial y_\kappa}\delta y_\kappa\,. \tag{20}$$

2. Рассмотрим второй член выражения (16)

$$\delta Z = \left[\left(H - \sum_{i=1}^{5}\frac{\partial H}{\partial \dot q_i}\dot q_i\right)\delta t + \sum_{i=1}^{5}\frac{\partial H}{\partial \dot q_i}\delta q_i\right]\Bigg|_{t=t_o}^{t=t_\kappa} = \tag{21}$$

$$= \left(H - \sum_{i=1}^{5}\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot q_i\right)\delta t\,\Bigg|_{t=t_o}^{t=t_\kappa} + \sum_{i=1}^{5}\frac{\partial H}{\partial \dot q_i}\delta q_i\Bigg|_{t=t_\kappa} - \sum_{i=1}^{5}\frac{\partial H}{\partial \dot q_i}\delta q_i\Bigg|_{t=t_o}.$$

Поскольку длина интервала интегрирования $[t_o;\ t_\kappa]$ согласно постановке задачи задана, вариация времени δt должна быть равна нулю

$$\delta t = 0, \tag{22}$$

и выражение (21) с учетом (18), (19) может быть переписано в таком виде:

$$\delta Z = \sum_{i=1}^{5}\frac{\partial H}{\partial \dot q_i}\delta q_i\Bigg|_{t=t_\kappa} = \frac{\partial H}{\partial \dot V_{x\kappa}}\delta V_{x\kappa} + \frac{\partial H}{\partial \dot V_{y\kappa}}\delta V_{y\kappa} + \tag{23}$$

$$+ \frac{\partial H}{\partial \dot x_\kappa}\delta x_\kappa + \frac{\partial H}{\partial \dot y_\kappa}\delta y_\kappa + \frac{\partial H}{\partial \dot\varphi_\kappa}\delta\varphi_\kappa\,.$$

Поскольку функция H не зависит явным образом от производной $\dot\varphi$, имеет место равенство

$$\frac{\partial H}{\partial \dot\varphi_\kappa} = 0\,. \tag{24}$$

Производные $\dfrac{\partial H}{\partial \dot V_{x\kappa}}$; $\dfrac{\partial H}{\partial \dot V_{y\kappa}}$; $\dfrac{\partial H}{\partial \dot x_\kappa}$; $\dfrac{\partial H}{\partial \dot y_\kappa}$ легко определяются из (14) и (10):

$$\frac{\partial H}{\partial \dot V_{x\kappa}} = \lambda_{1\kappa};\quad \frac{\partial H}{\partial \dot V_{y\kappa}} = \lambda_{2\kappa};\quad \frac{\partial H}{\partial \dot x_\kappa} = \lambda_{3\kappa};\quad \frac{\partial H}{\partial \dot y_\kappa} = \lambda_{4\kappa}\,. \tag{25}$$

В результате второй член выражения (16) упрощается

$$\delta Z = \lambda_{1\kappa}\cdot\delta V_{x\kappa} + \lambda_{2\kappa}\cdot\delta V_{y\kappa} + \lambda_{3\kappa}\cdot\delta x_\kappa + \lambda_{4\kappa}\cdot\delta y_\kappa\,. \tag{26}$$

3. Из результатов анализа (20), (22) и (26) следует, что вариация функционала (12) будет иметь следующий вид:

$$\partial F = \left(\frac{\partial J}{\partial V_{x\kappa}}\partial V_{x\kappa} + \frac{\partial J}{\partial V_{y\kappa}}\partial V_{y\kappa} + \frac{\partial J}{\partial x_\kappa}\partial x_\kappa + \frac{\partial J}{\partial y_\kappa}\partial y_\kappa\right) +$$

$$+ \left(\lambda_{1\kappa}\cdot\delta V_{x\kappa} + \lambda_{2\kappa}\cdot\delta V_{y\kappa} + \lambda_{3\kappa}\cdot\delta x_\kappa + \lambda_{4\kappa}\cdot\delta y_\kappa\right) + \tag{27}$$

$$+ \sum_{i=1}^{5}\int_{t_0}^{t_\kappa}\left[\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot q_i}\right)\right]\delta q_i\cdot dt,$$

где $\dfrac{\partial J}{\partial V_{x\kappa}}$; $\dfrac{\partial J}{\partial V_{y\kappa}}$; $\dfrac{\partial J}{\partial x_\kappa}$; $\dfrac{\partial J}{\partial y_\kappa}$ – производные от оптимизируемого функционала J по соответствующим функциям в момент конца активного участка $t = t_\kappa$; $\lambda_{1\kappa}$, $\lambda_{2\kappa}$, $\lambda_{3\kappa}$, $\lambda_{4\kappa}$ – значения функций λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 в конце активного участка $t = t_\kappa$.

Группируя члены выражения (27), содержащие одинаковые вариации функций $\delta V_{x\kappa}$; $\delta V_{y\kappa}$; δx_κ; δy_κ, получаем

$$\delta F = \left(\frac{\partial J}{\partial V_{x\kappa}} + \lambda_{1\kappa}\right)\delta V_{x\kappa} + \left(\frac{\partial J}{\partial V_{y\kappa}} + \lambda_{2\kappa}\right)\delta V_{y\kappa} +$$

$$+ \left(\frac{\partial J}{\partial x_\kappa} + \lambda_{3\kappa}\right)\delta x_\kappa + \left(\frac{\partial J}{\partial y_\kappa} + \lambda_{4\kappa}\right)\delta y_\kappa + \tag{28}$$

$$+ \sum_{i=1}^{5}\int_{t_o}^{t_\kappa}\left[\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot q_i}\right)\right]\delta q_i\cdot dt\,.$$

Полагая, что существует внутренний экстремум функционала (28), найдем его из условия

$$\delta F = 0.$$

Для того чтобы вариация (28) обратилась в нуль, необходимо, чтобы варьируемые функций q_i (V_x; V_y; x; y) удовлетворяли уравнениям Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot q_i}\right) = 0\,, \tag{29}$$

а множители Лагранжа λ_i были выбраны таким образом, чтобы на правом конце интегрирования выполнялись соотношения

$$\lambda_{1к} = -\frac{\partial J}{\partial V_{xк}}; \quad \lambda_{3к} = -\frac{\partial J}{\partial x_к}; \quad \lambda_{2к} = -\frac{\partial J}{\partial V_{yк}}; \quad \lambda_{4к} = -\frac{\partial J}{\partial y_к}. \quad (30)$$

Система уравнений (30) является необходимым условием экстремума функционала (13).

Уравнения Эйлера-Лагранжа (29) для функционала (13) зависят от вида уравнений связи. Для уравнений связи (10) они запишутся в следующем виде:

$$\dot{\lambda}_1 + \lambda_3 = 0, \quad (31)$$

$$\dot{\lambda}_2 + \lambda_4 = 0, \quad (32)$$

$$\dot{\lambda}_3 - \frac{K}{r^5}\left[\lambda_1\left(r^2 - 3x^2\right) - 3\lambda_2 x\left(R + y\right)\right] = 0, \quad (33)$$

$$\dot{\lambda}_4 - \frac{K}{r^5}\left\{\lambda_2\left[r^2 - 3\left(R + y\right)^2\right] - 3\lambda_1 x\left(R + y\right)\right\} = 0, \quad (34)$$

$$\frac{P}{m}\left(\lambda_1 \sin\varphi - \lambda_2 \cos\varphi\right) = 0. \quad (35)$$

Решая уравнение (35), находим

$$\varphi = \arctan\frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (36)$$

Система уравнений экстремальной траектории может быть записана так:

$$\begin{cases} \dot{V}_x = \dfrac{P}{m}\cos\varphi - K\cdot\dfrac{x}{\left[\left(R + y\right)^2 + x^2\right]^{3/2}}, \\ \dot{V}_y = \dfrac{P}{m}\sin\varphi - K\cdot\dfrac{R + y}{\left[\left(R + y\right)^2 + x^2\right]^{3/2}}, \\ \dot{x} = V_x, \\ \dot{y} = V_y, \\ \dot{\lambda}_1 = -\lambda_3, \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_4, \\ \dot{\lambda}_3 = \dfrac{K}{r^5}\left[\lambda_1\left(r^2 - 3x^2\right) - 3\lambda_2 x\left(R + y\right)\right], \\ \dot{\lambda}_4 = \dfrac{K}{r^5}\left\{\lambda_2\left[r^2 - 3\left(R + y\right)^2\right] - 3\lambda_1 x\left(R + y\right)\right\}, \\ \varphi = \arctan\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}, \\ P = P(t), \\ m = m(t). \end{cases} \quad (37)$$

Граничные условия на правом конце интегрирования:

$$\lambda_{1к} = \frac{\partial J}{\partial V_{xк}}; \; \lambda_{2к} = \frac{\partial J}{\partial V_{yк}}; \; \lambda_{3к} = \frac{\partial J}{\partial x_к}; \; \lambda_{4к} = \frac{\partial J}{\partial y_к}. \quad (38)$$

Система уравнений (37) совместно с начальными условиями движения точки переменной массы в начальный момент времени и граничными условиями на правом конце (38) дает полное решение поставленной задачи. При этом программа тангажа $\varphi = \varphi(t)$, определяемая уравнением (36), не может быть получена в явном виде, так как система линейных дифференциальных уравнений (31)–(35) с переменными коэффициентами (x; y) в явном виде не разрешается относительно множителей Лагранжа λ_i. Для нахождения экстремальной траектории необходимо подобрать такие начальные значения множителей Лагранжа λ_{io}, которые в конце интервала интегрирования обеспечат граничные условия (39). Подбор множителей Лагранжа λ_{io} может быть осуществлен применением каких-либо итерационных методов.

На практике в ряде случаев активный участок траектории имеет незначительную протяженность. В этом случае нахождение экстремальной траектории упрощается в связи с возможностью введения упрощений в управления связи. Рассмотрим ту же задачу определения такой траектории точки переменной массы в центральном гравитационном поле, которая обеспечивает экстремум функционалу

$$J = f(x_к; y_к; V_{xк}; V_{yк}), \tag{39}$$

зависящему от кинематических параметров движения в конце активного участка траектории. Интервал времени $[t_o; t_к]$, на котором ищем экстремальную траекторию, также будем считать заданным.

Заменим дифференциальные уравнения связи (10) соответствующими упрощенными уравнениями (9)

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{V}_x - \dfrac{P}{m}\cos\varphi + \nu^2 x = 0, \\ \omega_2 = \dot{V}_y - \dfrac{P}{m}\sin\varphi + g_o - 2\nu^2 y = 0, \\ \omega_3 = \dot{x} - V_x = 0, \\ \omega_4 = \dot{y} - V_y = 0, \end{cases} \tag{40}$$

где $\nu^2 = g_0/R$.

Вводя в рассмотрение эквивалентный функционал

$$F = J + \int_{t_o}^{t_к} H dt = J + \int_{t_o}^{t_к} \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \omega_i dt, \tag{41}$$

с учетом изложенного выше выясним, что необходимое условие экстремума функционала (41) (обращение в нуль первой вариации) потребует, чтобы функции q_i (V_x; V_y; x; y) и λ_i (i=1, 2, 3, 4) удовлетворяли уравнениям Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0. \tag{42}$$

Одновременно получим граничные условия на правом конце интегрирования $t_к$:

$$\lambda_{1к} = \frac{\partial J}{\partial V_{xк}}; \ \lambda_{2к} = \frac{\partial J}{\partial V_{yк}}; \ \lambda_{3к} = \frac{\partial J}{\partial x_к}; \ \lambda_{4к} = \frac{\partial J}{\partial y_к}. \tag{43}$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа для функционала (41) таковы:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = \lambda_3, & (44) \\ \dot{\lambda}_2 = \lambda_4, & (45) \\ \dot{\lambda}_3 = \nu^2 \lambda_1, & (46) \\ \dot{\lambda}_4 = -2\nu^2 \lambda_2, & (47) \\ \dfrac{P}{m}\lambda_1 \sin\varphi - \dfrac{P}{m}\lambda_2 \cos\varphi = 0. & (48) \end{cases}$$

Из уравнения (48) получаем оптимальную программу тангажа

$$\varphi = \arctan\frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \tag{49}$$

Система уравнений (44)–(47) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и может быть проинтегрирована.

Продифференцировав уравнения (44) и (45) и используя уравнения (46) и (47), получим

$$\ddot{\lambda}_1 = \dot{\lambda} = -\lambda_1 \cdot \nu^2; \tag{50}$$

$$\ddot{\lambda}_2 = -\dot{\lambda}_4 = 2\lambda_2 \nu^2. \tag{51}$$

Составляя соответствующие характеристические уравнения

$$P_1^2 = -\nu^2; \tag{52}$$

$$P_2^2 = 2\nu^2 \tag{53}$$

и решая их, найдем корни характеристических уравнений

$$P_{11} = i\nu; \qquad P_{12} = -i\nu; \tag{54}$$

$$P_{21} = \sqrt{2}\nu; \qquad P_{22} = -\sqrt{2}\nu. \tag{55}$$

Общие решения однородных дифференциальных уравнений (50), (51) могут быть представлены в виде

$$\lambda_1 = f_1 \cos\nu t + f_2 \sin\nu t; \tag{56}$$

$$\lambda_2 = f_3 e^{\omega t} + f_4 e^{-\omega t}, \tag{57}$$

где f_1, f_2, f_3, f_4 – некоторые постоянные коэффициенты; $\omega = \sqrt{2}\nu$.

Учитывая (44), (45), получим выражения для λ_3 и λ_4

$$\lambda_3 = f_1 \nu \sin\nu t - f_2 \nu \cos\nu t; \tag{58}$$

$$\lambda_4 = -f_3\omega e^{\omega t} + f_4\omega e^{-\omega t}. \quad (59)$$

Определим постоянные f_1, f_2, f_3, f_4 в уравнениях (56)–(59). Используя граничные условия на правом конце интегрирования (43), для множителей Лагранжа можно записать

$$\begin{cases} \lambda_{1\kappa} = -\dfrac{\partial J}{\partial V_{x\kappa}} = f_1\cos\nu t_\kappa + f_2\sin\nu t_\kappa, \\ \lambda_{2\kappa} = -\dfrac{\partial J}{\partial V_{y\kappa}} = f_3 e^{\omega t\kappa} + f_4 e^{-\omega t\kappa}, \\ \lambda_{3\kappa} = -\dfrac{\partial J}{\partial x_\kappa} = f_1\nu\sin\nu t_\kappa + f_2\nu\cos\nu t_\kappa, \\ \lambda_{4\kappa} = -\dfrac{\partial J}{\partial y_\kappa} = -f_3\omega e^{\omega t\kappa} + f_4\omega e^{-\omega t\kappa}. \end{cases} \quad (60)$$

Решая систему уравнений (60) относительно f_1, f_2, f_3, f_4, получаем

$$\begin{cases} f_1 = \dfrac{-\dfrac{\partial J}{\partial V_{x\kappa}}\nu\cos\nu t_\kappa - \dfrac{\partial J}{\partial x_\kappa}\sin\nu t_\kappa}{\nu}, \\ f_2 = \dfrac{-\dfrac{\partial J}{\partial V_{x\kappa}}\nu\sin\nu t_\kappa + \dfrac{\partial J}{\partial x_\kappa}\cos\nu t_\kappa}{\nu}, \\ f_3 = \dfrac{-\dfrac{\partial J}{\partial V_{y\kappa}}\omega + \dfrac{\partial J}{\partial y_\kappa}}{2\omega e^{\omega t\kappa}}, \\ f_4 = \dfrac{-\dfrac{\partial J}{\partial V_{y\kappa}}\omega - \dfrac{\partial J}{\partial y_\kappa}}{2\omega e^{-\omega t\kappa}}. \end{cases} \quad (61)$$

Оптимальная программа тангажа (49), обеспечивающая экстремум функционалу (41) с учетом выражений (56), (57), (61), может быть представлена в виде

$$\varphi = \arctan\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\dfrac{\partial J}{\partial V_{y\kappa}}\omega ch\,\omega(t_\kappa - t) + \dfrac{\partial J}{\partial y_\kappa} sh\,\omega(t_\kappa - t)}{\dfrac{\partial J}{\partial V_{x\kappa}}\nu\cos\nu(t_\kappa - t) + \dfrac{\partial J}{\partial x_\kappa}\sin\nu(t_\kappa - t)}\right]\right\}. \quad (62)$$

В этом случае система уравнений экстремальной траектории будет записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\dot V_x = \frac{P}{m}\cos\varphi - \nu^2 x, \\ &\dot V_y = \frac{P}{m}\sin\varphi - g_o + 2\nu^2 y, \\ &\dot x = V_x, \dot y = V_y, \\ &\varphi = \arctan\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\dfrac{\partial J}{\partial V_{y\kappa}}\omega Ch\omega(t_\kappa - t) + \dfrac{\partial J}{\partial y_\kappa} Sh\omega(t_\kappa - t)}{\dfrac{\partial J}{\partial V_{x\kappa}}\nu\cos\nu(t_\kappa - t) + \dfrac{\partial J}{\partial x_\kappa}\sin\nu(t_\kappa - t)}\right]\right\}, \\ &P = P(t),\ m = m(t), \\ &\nu = \sqrt{\frac{g_o}{R}}, \omega = \sqrt{2}\nu. \end{aligned} \quad (63)$$

Система уравнений (63) при начальных условиях, определяющих движение материальной точки переменной массы m с моментом $t=t_o$, полностью определяет экстремальную траекторию этой точки.

Выражение для оптимальной программы тангажа при упрощенных выражениях для компонент ускорения земного тяготения (8) аналогично результатам, полученным Д.Е. Охоцимским и Т.М. Энеевым при решении задачи по определению оптимального управления $\varphi(t)$, обеспечивающего максимальную горизонтальную скорость в конце активного участка $t=t_\kappa$ на заданной высоте $h=h_\kappa$, и является обобщением полученных ими результатов для произвольно заданного функционала, зависящего от кинематических параметров конца активного участка траектории.

Дальнейшее упрощение уравнений экстремальной программы тангажа, обеспечивающей экстремум функционалу типа (12), может быть проведено для плоскопараллельного поля по методике, приведенной выше. В этом случае формула для определения оптимальной программы тангажа имеет следующий вид:

$$\varphi = \arctan\frac{\dfrac{\partial J}{\partial V_{y\kappa}} + \dfrac{\partial J}{\partial y_\kappa}(t_\kappa - t)}{\dfrac{\partial J}{\partial V_{x\kappa}} + \dfrac{\partial J}{\partial x_\kappa}(t_\kappa - t)}, \quad (64)$$

что также подтверждается результатами, полученными Д.Е. Охоцимским и Т.М. Энеевым, Д.Ф. Лоуденом и В.Д. Фридом.

Условие Лежандра-Клебша. Уравнения Эйлера-Лагранжа, получаемые из равенства нулю первой вариации, являются необходимым условием экстремума. Для суждения о максимальном или минимальном значении некоторого заданного функционала на экстремальной траектории так же, как и при нахождении максимума (минимума) функций, необходимо определить знак второй вариации. Условие Лежандра-Клебша является дополнительным необходимым условием существования экстремума и определяет его вид. Условие Лежандра-Клебша гласит: для того чтобы функционал

$$F = \int_{o}^{в} F\left(x; y; \dot{y}\right) dx \qquad (65)$$

достигал вдоль экстремали максимума, необходимо выполнение вдоль экстремали условия

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{к=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}_i \partial \dot{y}_к} \delta \dot{y}_i \delta \dot{y}_к \le 0 . \qquad (66)$$

Для реализации минимума необходимо, чтобы вдоль экстремали выполнялось условие

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{к=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}_i \partial \dot{y}_к} \delta \dot{y}_i \delta \dot{y}_к \ge 0 . \qquad (67)$$

Как мы предполагали выше, рассматриваемый нами функционал

$$F = J + \int_{t_o}^{t_к} H\left(x; y; V_x; V_y\right) dt \qquad (68)$$

линеен относительно первых производных координат и скоростей, и получить вторую вариацию, а следовательно, и какие-либо суждения о максимуме или минимуме функционала (68), достигаемом на экстремальной траектории, не представляется возможным.

При решении задач нахождения оптимальных траекторий космических летательных аппаратов в число варьируемых функций y_i необходимо включать управление u величиной и направлением вектора тяги. При этом необходимым условием максимального значения экстремума функционала является выполнение вдоль экстремали между угловыми точками неравенства

$$e = \sum_{i=1}^{n}\sum_{к=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta_i \partial \eta_к} \delta \eta_i \delta \eta_к \le 0 , \qquad (69)$$

а необходимым условием минимального значения экстремума функционала будет являться выполнение вдоль экстремали между угловыми точками неравенства

$$e = \sum_{i=1}^{n}\sum_{к=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta_i \partial \eta_к} \delta \eta_i \delta \eta_к \ge 0 , \qquad (70)$$

где n – количество варьируемых функций; η_i, $\eta_к$ – варьируемые функции.

Отсутствие знака равенства в выражениях (69), (70) соответствует усиленному условию Лежандра-Клебша.

В нашем случае при оптимизации функционала вида (68) и при уравнениях связи (10), (40) функцию Лежандра-Клебша (69), (70) (обозначим ее через e) можно записать в следующем виде:

$$e = \sum_{i=1}^{5}\sum_{к=1}^{5} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta_i \partial \eta_к} \delta \eta_i \delta \eta_к , \qquad (71)$$

где $\eta_1 = \dot{V}_x; \quad \eta_2 = \dot{V}_y; \quad \eta_3 = \dot{x}; \eta_4 = \dot{y}; \quad \eta_5 = \varphi.$ (72)

Раскрывая выражение (71) с учетом (68), (10), (12), (14) и предполагая, что существуют только первые производные от функционала (10), непрерывные на отрезке $[t_o; t_к]$, получим

$$e = (\lambda_1 \cos\varphi + \lambda_2 \sin\varphi)\left(\delta\varphi\right)^2 . \qquad (73)$$

С учетом уравнения Эйлера-Лагранжа (35) будем иметь

$$e = \lambda_1 / \cos\varphi \qquad (74)$$

или

$$e = \lambda_2 / \sin\varphi . \qquad (75)$$

Используя выражения (69)–(75), можно сделать следующие выводы:

1. Оптимальные программы тангажа, обеспечивающие максимальное значение

функционала (68), должны удовлетворять на отрезке [t_o; $t_к$] условию

$$\frac{\lambda_1}{\cos\varphi} \le 0 \tag{76}$$

или

$$\frac{\lambda_2}{\sin\varphi} \le 0. \tag{77}$$

2. Оптимальные программы тангажа, обеспечивающие минимальное значение функционала (68), должны удовлетворять на отрезке [t_o; $t_к$] условию

$$\frac{\lambda_1}{\cos\varphi} \ge 0 \tag{78}$$

или

$$\frac{\lambda_2}{\sin\varphi} \ge 0. \tag{79}$$

Из условий (76), (78) следует, что при разгоне КЛА, когда программа тангажа на отрезке времени [t_o; $t_к$] лежит в диапазоне $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le +\frac{\pi}{2}$, максимальное значение функционала (68) реализуется при

$$\lambda_1 \le 0, \tag{80}$$

а минимальное – при

$$\lambda_1 \ge 0 \tag{81}$$

независимо от вида функции J, подлежащей оптимизации (будь то высота апогея, скорость в конце активного участка, энергия, большая полуось, период обращения, эксцентриситет и т.д.).

При решении задач космической баллистики, связанных с торможением космического аппарата (спуск с орбиты, переход с круговой орбиты большой высоты на эллиптическую орбиту с минимальной высотой перигея и т.д.), когда программа тангажа на отрезке времени [t_o; $t_к$] лежит в диапазоне $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$, максимальное значение функционала (68) обеспечивается при

$$\lambda_1 \ge 0, \tag{82}$$

а минимальное – при

$$\lambda_1 \le 0. \tag{83}$$

Из условий (77), (79), аналогичных условиям (76), (78), следует, что при прохождении программы тангажа φ через 0 или $\frac{\pi}{2}$ параметр λ_2 должен также изменять свой знак на обратный, т.е. проходить через нуль. Этот же вывод можно сделать с помощью (36).

При рассмотрении экстремальной траектории КЛА в центральном гравитационном поле при упрощенном представлении ускорения земного тяготения (10) упрощаются уравнения движения (40), а выражение для множителей Лагранжа λ_i может быть получено в конечном виде. Используя (56) и (61), получим выражение для λ_1

$$\lambda_1 = -\left[\frac{\partial J}{\partial V_{xк}} \cos\nu\left(t_к - t\right) + \frac{1}{\nu}\frac{\partial J}{\partial x_к} \sin\nu\left(t_к - t\right)\right]. \tag{84}$$

В этом случае выражение для функции Лежандра-Клебша e запишется в следующем виде:

– при реализации минимума функционала

$$e = \frac{-\left[\frac{\partial J}{\partial V_{xк}} \cos\nu\left(t_к - t\right) + \frac{1}{\nu}\frac{\partial J}{\partial x_к} \sin\nu\left(t_к - t\right)\right]}{\cos\varphi} \ge 0; \tag{85}$$

– при реализации максимума функционала

$$e = \frac{-\left[\frac{\partial J}{\partial V_{xк}} \cos\nu\left(t_к - t\right) + \frac{1}{\nu}\frac{\partial J}{\partial x_к} \sin\nu\left(t_к - t\right)\right]}{\cos\varphi} \le 0. \tag{86}$$

При определении экстремальной траектории КЛА в плоскопараллельном поле уравнение для λ_1 значительно упрощается:

$$\lambda_1 = -\left[\frac{\partial J}{\partial V_{xк}} + \frac{\partial J}{\partial x_к}\left(t_к - t\right)\right] - \tag{87}$$

и выражение для функции e записываем в следующем виде:

– при реализации минимума

$$e = \frac{-\left[\dfrac{\partial J}{\partial V_{xk}} + \dfrac{\partial J}{\partial x_k}\left(t_k - t\right)\right]}{\cos\varphi} \geq 0; \qquad (88)$$

– при реализации максимума

$$e = \frac{-\left[\dfrac{\partial J}{\partial V_{xk}} + \dfrac{\partial J}{\partial x_k}\left(t_k - t\right)\right]}{\cos\varphi} \leq 0. \qquad (89)$$

Рекомендации по решению задач на ЭВМ. Из полученных уравнений экстремальной траектории (37) следует, что при заданных начальных условиях движения x_o; y_o; V_{xo}; V_{yo} экстремальная траектория, обеспечивающая минимум (или максимум) некоторого функционала J, может быть легко получена в результате интегрирования уравнений (37).

Единственная трудность при решении этой задачи состоит в определении на левой границе интегрирования (при t=t_o) таких значений множителей Лагранжа λ_{io}, которые обеспечат выполнение граничных условий на правом конце интегрирования, т.е. обеспечат в момент $t = t_k$ выполнение условия

$$\lambda_{1k} = -\frac{\partial J}{\partial V_{xk}};\ \lambda_{2k} = -\frac{\partial J}{\partial V_{yk}};\ \lambda_{3k} = -\frac{\partial J}{\partial x_k};\ \lambda_{4k} = -\frac{\partial J}{\partial y_k}. \qquad (90)$$

Производные от функционала J по кинематическим параметрам конца активного участка траектории в большинстве случаев могут быть представлены в конечном виде в качестве явных зависимостей от параметров x_k, y_k, V_{xk}, V_{yk}. Несмотря на это, получить численные значения этих производных до проведения численного интегрирования траектории не представляется возможным, так как параметры конца активного участка (а следовательно, и функционал J) зависят от программы тангажа φ=$\varphi(t)$, которая, в свою очередь, зависит от параметров конца активного участка траектории (36)–(38). Для решения задачи может быть применен какой-либо инерционный метод.

Рассмотрим методику решения задачи на электронно-вычислительной машине.

Параметры движения точки переменной массы на активном участке траектории определяются в результате численного интегрирования системы дифференциальных уравнений движения (37). Для получения экстремальной траектории, т.е. начальных значений множителей Лагранжа λ_{io}, обеспечивающих экстремум функционала J, может быть предложена следующая схема решения задачи (метод попеременного интегрирования):

1. Задаются начальные условия движения точки переменной массы в момент t=t_o

$$x_o,\ y_o,\ V_{xo},\ V_{yo}.$$

2. Задается программа тангажа

$$\varphi = \varphi_o = \text{const} \qquad (91)$$

или

$$\varphi = \varphi_o + \dot{\varphi} t. \qquad (92)$$

Значения параметров φ_o или φ_o и $\dot{\varphi}$ выбирают исходя из физической сущности процесса и задают заранее.

Например:

– при старте с орбиты ожидания с выбором экстремальной траектории, реализующей максимум высоты апогея на новой орбите или максимум скорости на сфере действия и т.п., на активном участке траектории может быть принята программа тангажа

$$\varphi = 0;$$

– при сходе с круговой или эллиптической орбиты и выборе экстремальной траектории, реализующей максимальный угол входа в атмосферу или минимальную угловую дальность от точки старта до точки приземления,

$$\varphi = 180^{o}.$$

3. Проводится прямое численное интегрирование уравнений движения КЛА как точки переменной массы совместно с уравнениями Эйлера-Лагранжа (37) при начальных условиях и программе тангажа вида (93) или (92) от момента t=t_o до момента t=t_k. В конце активного участка траектории t=t_k получаем параметры движения

$$x_k^{'},\ y_k^{'},\ V_{xk}^{'},\ V_{yk}^{'}.$$

4. По полученным параметрам конца активного участка траектории рассчитываем численное значение функционала $J = J'$ и соответствующие производные

$$\frac{\partial J'}{\partial V'_{xk}};\ \frac{\partial J'}{\partial V'_{yk}};\ \frac{\partial J'}{\partial x'_k};\ \frac{\partial J'}{\partial V'_{yk}}. \qquad (93)$$

В результате получаем первое приближение для множителей Лагранжа на правом конце интегрирования

$$\lambda'_{1k} = -\frac{\partial J'}{\partial V'_{xk}};\ \lambda'_{2k} = -\frac{\partial J'}{\partial V'_{yk}};\ \lambda'_{3k} = -\frac{\partial J'}{\partial x'_k};\ \lambda'_{4k} = -\frac{\partial J'}{\partial y'_{yk}}. \quad (94)$$

5. Проводим обратное интегрирование системы уравнений движения КЛА совместно с уравнениями Эйлера-Лагранжа "справа-налево" (от $t=t_k$ до $t=t_o$) с экстремальной программой тангажа вида (36). При этом в качестве начальных условий для интегрирования системы (37), определяющей экстремальную траекторию КЛА, принимаем параметры движения КЛА и множители Лагранжа (94) в конце активного участка траектории, полученные при "прямом" интегрировании системы (37).

Интегрирование проводится с отрицательным шагом.

6. В результате интегрирования получаем первое приближение множителей Лагранжа λ_{io} на левом конце интегрирования при $t=t_o$ и параметры движения КЛА в этот момент $\left(\dot{x}_o, \dot{y}_o, \dot{V}_{xo}, \dot{V}_{yo}\right)$, которые не совпадут с заданными начальными условиями движения.

7. Проводим прямое интегрирование уравнений движения КЛА совместно с уравнениями Эйлера-Лагранжа (37) от момента $t=t_o$ до $t=t_k$ с экстремальной программой тангажа, определяемой уравнением (36) при начальных условиях движения и начальных значениях множителей Лагранжа λ_{io}, полученных при "обратном" интегрировании согласно п. 6.

8. По полученным параметрам конца активного участка траектории на момент $t=t_k\left(x''_k, y''_k, V''_{xk}, V''_{yk}\right)$ определяем второе приближение:

– для функционала

$$J = J'';$$

– для множителей Лагранжа на правом конце интегрирования

$$\lambda''_{1k} = -\frac{\partial J''}{\partial V''_{xk}};\ \lambda''_{2k} = -\frac{\partial J''}{\partial V''_{yk}};\ \lambda''_{3k} = -\frac{\partial J''}{\partial x''_k};\ \lambda''_{4k} = -\frac{\partial J''}{\partial y''_k}. \quad (95)$$

9. Проводим проверку окончания выбора экстремальной траектории, реализующей максимум (минимум) функционала J. Конец расчета наиболее логично определять до достижения максимума (минимума) функционала J с заданной точностью

$$\Delta = \left| J^{j+1} - J^{j} \right| \le \varepsilon, \qquad (96)$$

где J^{j} – значение функционала J при предыдущем расчете;

J^{j+1} – значение функционала J при последующем расчете.

10. В случае невыполнения условия (96) продолжаем попеременное интегрирование до тех пор, пока оно не будет удовлетворено.

Результаты расчетов экстремальных траекторий показывают хорошую сходимость решений задачи: экстремальная траектория с почти абсолютной точностью $\varepsilon \cong 0$ достигается за 4-5 прямых и обратных расчетов.

При отыскании экстремальной траектории КЛА в центральном гравитационном поле при упрощенном представлении потенциала (8) упрощаются уравнения экстремальной траектории (63), а программа тангажа выражается в конечном виде через параметры конца активного участка (67). Это приводит к значительному упрощению в определении экстремальной программы тангажа, так как в этом случае нет необходимости в определении множителей Лагранжа.

Проинтегрировав активный участок траектории, рассчитываем производные от функционала J по параметрам конца активного участка x_k, y_k, V_{xk}, V_{yk} и согласно (62) определяем экстремальную программу тангажа φ в любой момент времени на отрезке $[t_o; t_k]$.

При постановке этой задачи на ПЭВМ удобно применить следующий метод последовательных приближений:

1. При заданных начальных условиях движения так же, как было предложено выше, проводится численное интегрирование системы уравнений движения при использовании некоторой, заданной произвольным образом программы тангажа вида (91) или (92) до момента $t=t_k$.

2. По параметрам конца активного участка рассчитываются численное значение функционала $J = J^{'}$ и соответствующие производные

$$\frac{\partial J^{'}}{\partial V_{xk}^{'}};\ \frac{\partial J^{'}}{\partial V_{yk}^{'}};\ \frac{\partial J^{'}}{\partial x_k^{'}};\ \frac{\partial J^{'}}{\partial V_{yk}^{'}}, \qquad (97)$$

которые подставляем в выражение для экстремальной программы тангажа (62).

3. Проводим интегрирование уравнений движения КЛА от момента $t=t_o$ до $t=t_k$ с использованием экстремальной программы тангажа (62) и учетом (97).

4. По уточненным параметрам движения в конце активного участка уточняем значение функционала $J=J^{''}$ и соответствующих производных (97).

5. Осуществляем проверку окончания выбора экстремальной траектории согласно условию (96).

6. Проводим несколько расчетов с дальнейшим уточнением функционала J и его производных вплоть до выполнения условия (96).

Суммарное время проведения итераций примерно в 2-3 раза меньше, чем при нахождении экстремальной траектории в случае точного задания потенциала для центрального гравитационного поля (37).

При решении некоторых задач, в которых активный участок траектории космического аппарата короткий как по продолжительности, так и по дальности, может быть использована программа тангажа вида (64), обеспечивающая экстремум функционалу J в плоскопараллельном поле

В частности, расчет любой траектории может быть проведен с предлагаемой программой тангажа (62)–(64). При этом расчет параметров движения может быть осуществлен в результате решения точных уравнений движения. Полученная траектория будет являться определенным приближением к экстремальной. Применение программы тангажа того или иного вида из (36), (62)–(64) должно быть обосновано в каждом конкретном случае исходя из длительности активного участка, затрат машинного времени и необходимости достаточно точного приближения к экстремальной траектории.

Список использованной литературы

1. Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // УФН. – 1957. – Т. 13. – Вып. 1.

2. Fried B.D. On the Powered Flight Trajectory of on Earth Satellite // Jet Propulsion. – 1957. – Vol. 27. – № 6. – P. 641–643.

3. Fried B.D. Trajectory optimization for Powered Flight in two or three Dimensions // Space Technology. – New York, 1959.

4. Lowden D.F. Optimal programming of Rocket thrust direction // Astronautica Acta. – 1955. – Vol. 1. – № 1. – P. 41–56.

5. Lowden D.F. Optimal Rocket Trajectories. Jet Propulsion. – 1957. – Vol. 27. – № 12. – 1263 p.

6. Lowden D.F. Minimal Rocket Trajectories // Journal of the American Rocket Society. – 1953. – Vol. 23. – № 11-12. – P. 360–376, 382.

7. Lowden D.F. Interplanetary Rocket Trajectories // Advances in Space Science. – 1959. – Vol. 1. – 53 p.

8. Wisnenski M.L. Error matrix for a flight on a circular orbit // ARS. – 1962. – Vol. 32. – № 9. – P. 1416–1418.

9. Компаниец Э.П., Дронь Н.М., Баранов Е.Ю., Литвин Н.Г. Построение траекторий ракет–носителей космических аппаратов // Космическая техника. Ракетное вооружение: Сб. науч.-техн. ст. – 2015. – Вып. 1. – Днепропетровск: ГП "КБ "Южное".

Статья поступила 15.02.2016