

Е. А. Дегтярева, А. Н. Лапко, А. А. Мелешко, Ю. В. Чуча

## **К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ НАЛИЧИЯ ЗНАЧИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕГРУЗКИ И УГЛОВОЙ СКОРОСТИ НА ВЫДЕЛЕННОМ НАПРАВЛЕНИИ**

*Рассмотрены варианты решения задачи по построению инерциальной навигационной системы в условиях наличия значительных перегрузки и угловой скорости на выделенном направлении методом установки чувствительных элементов под некоторым углом к выделенному направлению, что позволяет проводить измерения на нем без потери качества измерений на других направлениях. Описана методика расчета угла установки чувствительных элементов к выделенному направлению. Рассмотрена схема построения инерциальной навигационной системы на неполном наборе чувствительных элементов для случаев, когда на всем участке работы производится вращение вокруг выделенного направления. Приведен анализ погрешностей вектора измерений, вызванных неполнотой набора чувствительных элементов.*

*Розглянуто варіанти розв'язання задачі з побудови інерціальної навігаційної системи в умовах наявності значних перевантаження та кутової швидкості на виділеному напрямку методом установлення чутливих елементів під деяким кутом до виділеного напрямку, що дозволяє проводити вимірювання на ньому без втрати якості вимірювань на інших напрямках. Описано методику розрахунку кута установлення чутливих елементів до виділеного напрямку. Розглянуто схему побудови інерціальної навігаційної системи на неповному наборі чутливих елементів для випадків, коли на всій ділянці роботи відбувається обертання навколо виділеного напрямку. Наведено аналіз похибок вектора вимірювань, викликаних неповнотою набору чутливих елементів.*

*The paper deals with the options of solving the task of constructing an inertial navigation system in the conditions of considerable g-load and angular velocity in identified direction by method of setting the sensitive elements at some angle to the identified direction, which allows making measurements in it without loss of measurement quality in the other directions. The paper describes the technique of calculating the angle of sensitive elements setting to the identified direction. The scheme of constructing an inertial navigation system with incomplete set of sensitive elements is considered for the cases when in entire operation leg, rotation around the identified direction is executed. The analysis is given of measurement vector error due to incompleteness of the sensitive elements set.*

### **Введение**

Применение закрутки вокруг оси симметрии является распространенным приемом, позволяющим существенно упростить стабилизацию и повысить устойчивость системы к возмущениям. Этим приемом уже более столетия пользуются в артиллерии, полвека – в системах залпового огня [1, 2], находит он также применение при стабилизации космических аппаратов и ждет своего времени, когда будет востребован для создания искусственной гравитации на космических кораблях и станциях.

Основным вопросом, стоящим перед разработчиком, решившим воспользоваться приемом закрутки, является реализация управляемого движения объекта. Для этого необходимо знать текущий вектор навига-

ционных параметров и непрерывно фиксировать его изменение.

Основным прибором для определения полного вектора навигационных параметров (угловой ориентации, координат, линейных и угловых скоростей) является инерциальная навигационная система (ИНС).

Применение ИНС в условиях наличия значительных перегрузок и угловых скоростей на выделенном направлении связано с рядом значительных трудностей, вариантам преодоления которых и посвящена данная статья.

### **Математическая модель движения объекта**

В приведенной математической модели использовали две правые ортогональные прямоугольные системы координат (СК):

– неподвижная СК  $O_0X_0Y_0Z_0$ : начало в точке  $O_0$ , расположенной в центре масс объекта в момент старта; ось  $O_0Y_0$  направлена вверх по линии отвеса; ось  $O_0X_0$  совпадает с направлением стрельбы; ось  $O_0Z_0$  дополняет систему до правой;

– связанная СК  $O_1X_1Y_1Z_1$ : начало в точке  $O_1$ , расположенной в центре масс объекта; ось  $O_1X_1$  совпадает с продольной осью симметрии объекта, положительное направление в сторону носка; ось  $O_1Y_1$  находится в плоскости стабилизации I-III, положительное направление в сторону III полуплоскости; ось  $O_1Z_1$  дополняет систему до правой.

Векторная форма уравнений движения центра масс объекта в связанной СК имеет следующий вид [3]:

$$\dot{\bar{V}}_1 = \dot{\bar{W}}_1 + \bar{g}_1 + \bar{V}_1 \times \bar{\omega}_1, \quad (1)$$

где  $\dot{\bar{W}}_1$  – вектор кажущегося ускорения центра масс объекта, проекции которого на оси связанной СК получены по измерениям акселерометров ИНС;  $\dot{\bar{V}}_1$ ,  $\bar{g}_1$  – векторы действительного и гравитационного ускорений в связанной СК;  $\bar{V}_1$  – вектор линейной скорости;  $\bar{V}_1$  – вектор скорости;  $\bar{\omega}_1$  – вектор угловой скорости, проекции которого на оси связанной СК получены по измерениям датчиков угловой скорости (ДУС) ИНС.

Переход от неподвижной СК к связанной СК осуществляется тремя последовательными поворотами на углы Крылова: рыскания, тангажа и крена ( $\psi \rightarrow \vartheta \rightarrow \varphi$ ). Уравнения вращательного движения связанной СК относительно неподвижной имеют следующий вид [4]:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega_{x1} - \dot{\psi} \cdot \sin \vartheta, \\ \dot{\psi} = (\omega_{y1} \cdot \cos \varphi - \omega_{z1} \cdot \sin \varphi) / \cos \vartheta, \\ \dot{\vartheta} = \omega_{y1} \cdot \sin \varphi + \omega_{z1} \cdot \cos \varphi, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\omega_{x1}$ ,  $\omega_{y1}$ ,  $\omega_{z1}$  – проекции угловых скоростей на оси связанной СК.

Значения параметров движения центра масс в связанной СК определяются интегрированием уравнения (1).

Ориентация связанной СК относительно неподвижной определяется интегрированием системы уравнений (2).

### Особенности ИНС объектов с выделенным направлением

Условимся называть выделенным направлением то направление в связанной СК, на котором значения проекций кажущегося ускорения и угловой скорости отличаются на порядок и более от значений на других направлениях. Далее по тексту за выделенное направление принимается направление продольной оси симметрии объекта  $O_1X_1$ .

Среди современных ИНС широко используются бесплатформенные ИНС (БИНС) [5]. Наиболее распространенный вариант построения БИНС сводится к размещению чувствительных элементов (ЧЭ) по трем взаимно ортогональным осям. Однако такой метод нерационален в условиях, когда показания по измерительным осям отличаются на порядок и более, поскольку необходимо применять ЧЭ с очень широким диапазоном измерений, что приводит к потерям в качестве измерений. Более рациональным вариантом в этом случае является использование ЧЭ с различными диапазонами измерений или применение таких конструктивных решений, которые уменьшат значения ускорений и угловых скоростей на измерительных осях.

Второй вариант решения такой задачи является более предпочтительным ввиду простоты его реализации. Достаточно лишь установить измерительные оси ЧЭ  $Q_1, Q_2, Q_3$  под некоторым углом  $\mu$  (рис. 1) к выделенному направлению (ось  $O_1X_1$ ). В результате появляется возможность проводить измерения по всем измерительным осям проек-

ций угловой скорости и кажущегося ускорения, действующих по оси  $O_1X_1$ . Очевидно, что значения измерений будут меньше действующих на ось  $O_1X_1$  величин, что уменьшает верхнюю границу диапазона измерений ЧЭ.

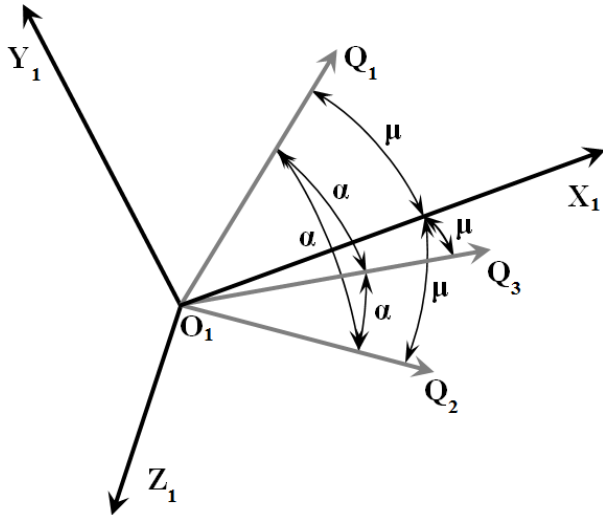


Рис. 1. Расположение осей ЧЭ относительно осей связанной СК:  $Q_1, Q_2, Q_3$  – оси установки ЧЭ;  $X_1, Y_1, Z_1$  – оси связанной СК;  $\mu$  – угол установки ЧЭ к выделенному направлению;  $\alpha$  – угол между осями ЧЭ; ось  $Q_1$  находится в плоскости  $X_1O_1Y_1$

Границы диапазона допустимых значений угла установки  $\mu$  определяются следующими формулами:

$$\mu_{\min} \leq \arccos \frac{f_{\text{range}}}{f_{\text{max}}};$$

$$\mu_{\max} \leq \arccos \frac{f_{\text{resol}}}{f_{\min}},$$
(3)

где  $\mu_{\min}, \mu_{\max}$  – минимально и максимально допустимые углы установки ЧЭ относительно выделенной оси;

$f_{\min}, f_{\text{max}}$  – предполагаемые минимальное и максимальное значения измеряемой величины;

$f_{\text{resol}}, f_{\text{range}}$  – минимальное и максимальное значения диапазона измерений ЧЭ.

Для случая построения БИНС на основе трехосных ЧЭ с ортогональной ориентацией измерительных осей ( $\alpha = 90^\circ$ ) получим следующий вариант. Ортогональное положение однозначно определяет угол установки к выделенной оси  $\mu \approx 55^\circ$ , и, как следствие, коэффициент понижения чувствительности будет  $\approx 0,6$ , которого для большинства случаев наличия выделенного направления явно мало.

Для установки ЧЭ под требуемым углом необходимо отказаться от применения трехосных ЧЭ в пользу одноосных. В этом случае проекции ускорений и угловых скоростей на оси связанной СК будут вычисляться следующим образом:

$$\bar{f} = M^{-1} \cdot \bar{Q},$$
(4)

где  $\bar{f}$  – проекции измерений на оси связанной СК;  $\bar{Q}$  – вектор измерений ЧЭ,

$$\bar{Q} = \bar{Q}_н + \delta\bar{Q},$$
(5)

где  $\bar{Q}_н$  – вектор действующих величин на оси ЧЭ;  $\delta\bar{Q}$  – вектор погрешностей измерений ЧЭ;  $M^{-1}$  – косоугольная матрица перехода от измерительного трехгранника к связанной СК,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3 \cdot \cos \mu} & \frac{1}{3 \cdot \cos \mu} & \frac{1}{3 \cdot \cos \mu} \\ \frac{2}{3 \cdot \sin \mu} & -\frac{1}{3 \cdot \sin \mu} & -\frac{1}{3 \cdot \sin \mu} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sin \mu} & -\frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sin \mu} \end{pmatrix}.$$
(6)

Существенным недостатком описанного метода является многократное (в  $\cos^{-1}(\mu)$  раз) увеличение влияния погрешностей ЧЭ при определении проекций измеряемых величин на выделенной оси, что видно по первой строке матрицы перехода  $M^{-1}$ .

Вторым недостатком является уменьшение уровня нижней границы (в  $\cos^{-1}(\mu)$  раз) значений проекций действующих кажущихся ускорений и угловых скоростей на

выделенное направление, которые можно зафиксировать.

**Построение БИНС с неполным набором ЧЭ в случае вращения вокруг выделенного направления**

При постоянном вращении вокруг выделенного направления возможен вариант построения БИНС с неполным набором ЧЭ (два ДУС, два акселерометра). Такой вариант обладает рядом преимуществ, заключающихся в уменьшении габаритных размеров и себестоимости, что делает ее привлекательной для применения в корректируемых артиллерийских снарядах и управляемых реактивных снарядах. Схема установки пар чувствительных элементов приведена на рис. 2.

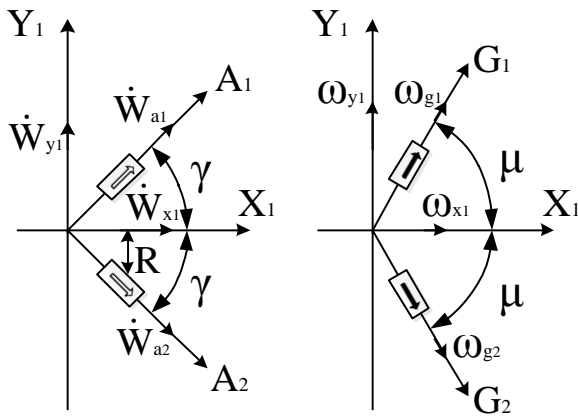


Рис. 2. Расположение осей ЧЭ относительно осей связанной СК:  $G_1, G_2, A_1, A_2$  – оси установки ДУС и акселерометров соответственно;  $\mu, \gamma$  – углы установки ДУС и акселерометров;  $\omega_{g1}, \omega_{g2}, \dot{W}_{a1}, \dot{W}_{a2}$  – измеренные угловые скорости и кажущиеся ускорения;  $\omega_{x1}, \omega_{y1}, \dot{W}_{x1}, \dot{W}_{y1}$  – проекции угловых скоростей и кажущихся ускорений на оси связанной СК;  $R$  – расстояние от точки установки акселерометров до оси вращения

При такой установке ЧЭ можно осуществлять измерения только по двум осям  $O_1X_1$  и  $O_1Y_1$ . Однако в случае наличия высокой угловой скорости можно сделать допущение, что несуществующие измерения по оси  $O_1Z_1$  равны измерениям по оси  $O_1Y_1$ , зафиксированным четверть оборота назад. Для реализации такого метода необходимы хранение и обновление массива данных измерений по оси  $O_1Y_1$ .

Проекции угловых скоростей на оси ЧЭ (рис. 2) определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \omega_{g1} &= \omega_{x1} \cdot \cos \mu + \omega_{y1} \cdot \sin \mu; \\ \omega_{g2} &= \omega_{x1} \cdot \cos \mu - \omega_{y1} \cdot \sin \mu. \end{aligned} \tag{7}$$

Решив систему уравнений (7) относительно искомых проекций угловых скоростей в связанной СК  $\omega_{x1}$  и  $\omega_{y1}$ , получим

$$\begin{aligned} \omega_{x1} &= \frac{\omega_{g1} + \omega_{g2}}{2 \cos \mu}; \\ \omega_{y1} &= \frac{\omega_{g1} - \omega_{g2}}{2 \sin \mu}. \end{aligned} \tag{8}$$

Выражения (8) позволяют определить проекции угловых скоростей в связанной СК по показаниям ДУС.

Выражения для определения кажущихся ускорений в проекциях на оси связанной СК по показаниям акселерометров получаем аналогично выражениям (8), за одним исключением. Если акселерометры установлены не на оси вращения, то наличие угловой скорости будет сказываться на измерениях за счет действия центробежной силы. Пусть  $R$  – расстояние от точки установки акселерометров до оси вращения. Тогда проекции кажущихся ускорений на оси акселерометров будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{a1} &= \dot{W}_{x1} \cdot \cos \gamma + \dot{W}_{y1} \cdot \sin \gamma + R \cdot \omega_{x1}^2 \cdot \sin \gamma; \\ \dot{W}_{a2} &= \dot{W}_{x1} \cdot \cos \gamma - \dot{W}_{y1} \cdot \sin \gamma + R \cdot \omega_{x1}^2 \cdot \sin \gamma. \end{aligned} \tag{9}$$

Решив систему уравнений (9) относительно искомых проекций кажущихся ускорений  $\dot{W}_{x1}, \dot{W}_{y1}$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{W}_{x1} &= \frac{\dot{W}_{a1} + \dot{W}_{a2}}{2 \cos \gamma} - \omega_{x1}^2 \cdot R \cdot \operatorname{tg} \gamma; \\ \dot{W}_{y1} &= \frac{\dot{W}_{a1} - \dot{W}_{a2}}{2 \sin \gamma}. \end{aligned} \tag{10}$$

Выражения (10) позволяют определить проекции кажущихся ускорений в связанной СК по показаниям акселерометров и ДУС.

**Определение ошибок измерения БИНС с неполным набором ЧЭ за счет погрешностей установки**

Выражения, определяющие значения ошибок измерения действующих величин на оси связанной СК, будут следующие:

– в случае наличия погрешностей в установке акселерометров:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{W}_{x_1} &= \frac{1}{2} \cdot \text{tg} \gamma \cdot \omega_{x_1}^2 \cdot (d_1 + d_2); \\ \Delta \dot{W}_{y_1} &= \frac{1}{2} \cdot \omega_{x_1}^2 \cdot (d_1 - d_2), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $d_1, d_2$  – разность между номинальными и текущими расстояниями от точки установки акселерометров до оси вращения;

– в случае наличия погрешностей в углах установки акселерометров в плоскости  $Y_1O_1X_1$ :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{W}_{x_1} &= -\dot{W}_{x_1} \cdot \text{tg} \gamma \cdot \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} + \\ &+ \dot{W}_{y_1} \cdot \frac{\delta_1 - \delta_2}{2} + \omega_{x_1}^2 \cdot R \cdot \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}; \\ \Delta \dot{W}_{y_1} &= \dot{W}_{x_1} \cdot \frac{\delta_1 - \delta_2}{2} + \dot{W}_{y_1} \cdot \text{ctg} \gamma \times \\ &\times \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} + \omega_{x_1}^2 \cdot R \cdot \text{ctg} \gamma \cdot \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\delta_1, \delta_2$  – разность между номинальными и текущими углами установки акселерометров;

– в случае наличия погрешностей в углах установки ДУС в плоскости  $Y_1O_1X_1$ :

$$\begin{aligned} \Delta \omega_{x_1} &= -\omega_{x_1} \cdot \text{tg} \mu \cdot \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \omega_{y_1} \cdot \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}; \\ \Delta \omega_{y_1} &= \omega_{x_1} \cdot \frac{-\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \omega_{y_1} \cdot \text{ctg} \mu \cdot \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – разность между номинальными и текущими углами установки ДУС.

Как видно из уравнений (11–13), отклонения измеряемых величин от номинальных прямо пропорционально зависят от угловой скорости и ее квадрата в канале крена и могут достигать существенных значений. При таких ошибках невозможно нормальное функционирование БИНС. Однако, используя уравнения (11–13), легко получить уравнения поправок к измерениям в форме полиномов, коэффициенты которых определяются по результатам калибровочных испытаний.

На рис. 3 представлена структурная схема работы БИНС с учетом поправочных коэффициентов.

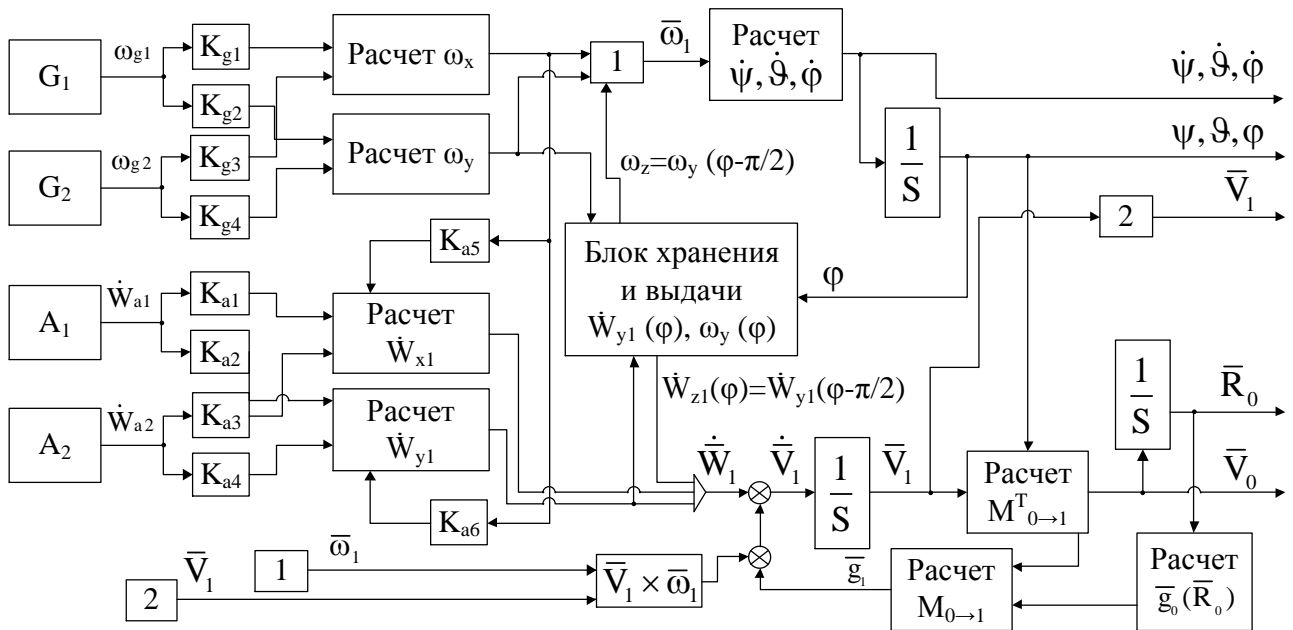


Рис. 3. Схема работы БИНС, выполненной при использовании неполного набора ЧЭ:

$G_1, G_2, A_1, A_2$  – ДУС и акселерометры соответственно;  $\omega_{g1}, \omega_{g2}, \dot{W}_{a1}, \dot{W}_{a2}$  – измеренные угловые скорости и кажущиеся ускорения;  $K_{g1}, K_{g2}, K_{g3}, K_{g4}$  – поправочные коэффициенты для расчета угловых скоростей;

$K_{a1}, K_{a2}, K_{a3}, K_{a4}, K_{a5}, K_{a6}$  – поправочные коэффициенты для расчета кажущихся ускорений;

$M_{0 \rightarrow 1}$  – матрица перехода от неподвижной СК к связанной;  $\bar{g}_0, \bar{g}_1$  – векторы проекций ускорения

свободного падения в неподвижной и связанной СК соответственно;  $\bar{R}_0, \bar{V}_0$  – радиус-вектор и вектор скоростей в неподвижной СК

**Исследование работы БИНС с неполным набором ЧЭ**

Исследование работы БИНС с неполным набором ЧЭ проводилось методом математического моделирования для методики, изложенной в предыдущих разделах.

Моделирование работы БИНС с неполным набором ЧЭ проводилось для аэробаллистической траектории. Результаты моделирования представлены на рис. 4.

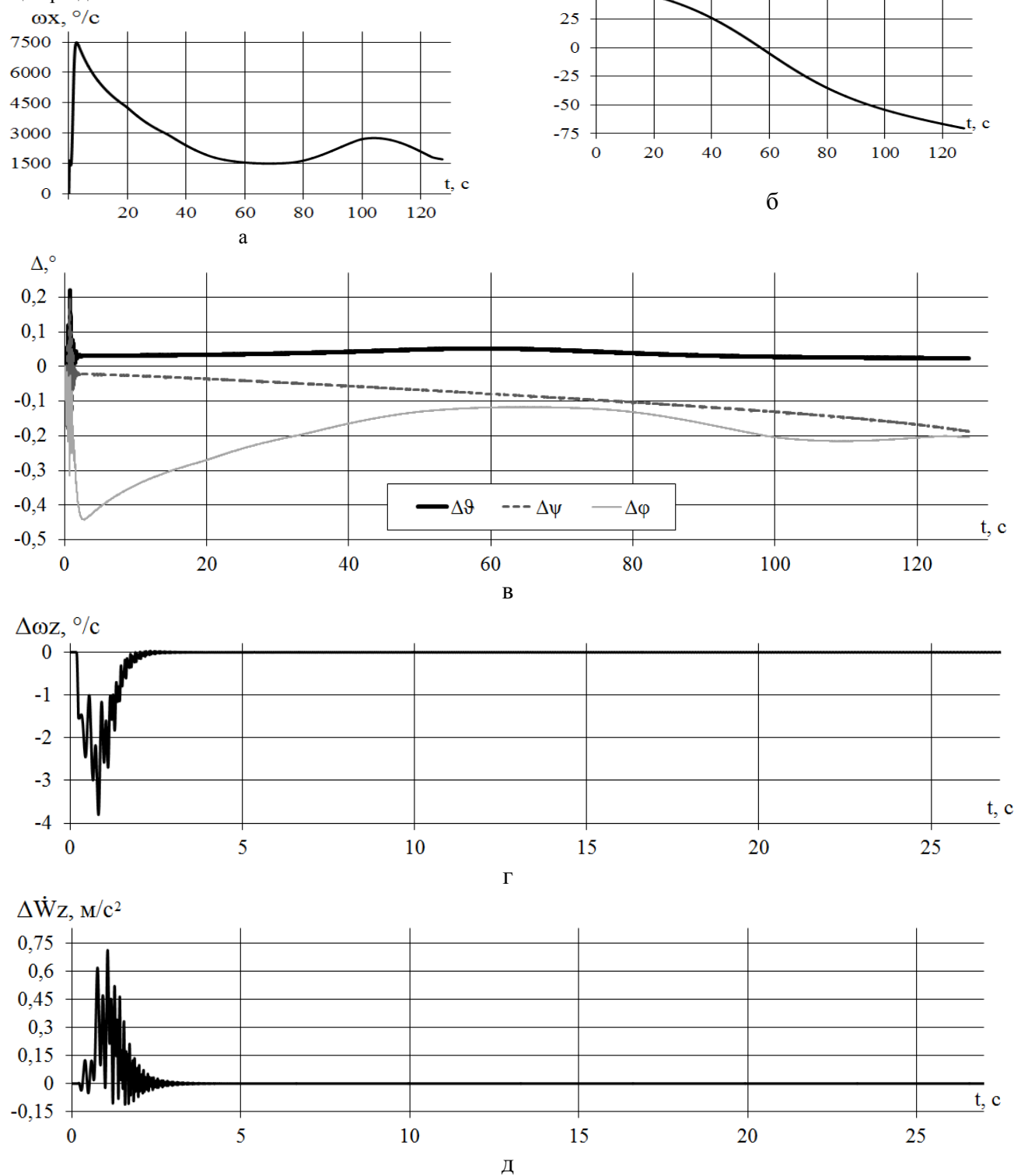


Рис. 4. Результаты моделирования: а – номинальная угловая скорость в канале крена; б – номинальный угол тангажа; в – методические погрешности определения углов ориентации; г – методические погрешности определения угловой скорости  $\omega_{z1}$ ; д – методические погрешности определения кажущегося ускорения  $\dot{W}_{z1}$

Предложенная методика позволяет точно определять угловую скорость и кажущееся ускорение, действующие в плоскости установки ЧЭ. Отклонения параметров  $\omega_{z1}$  и  $\dot{W}_{z1}$  от номинальных значений (рис. 4, з, д), полученных по описанной методике, вызваны запозданием появления их значений на четверть фазы (по углу вращения). Это легко наблюдать при "резких" изменениях углов ориентации, когда значения

отклонений существенно увеличиваются, следовательно, они прямо пропорциональны угловому ускорению.

Рассмотрим переходные процессы, наблюдаемые после выхода объекта из пусковой установки для различных коэффициентов закрутки  $k$ . При этом на момент выхода из пусковой установки скорость вращения объекта для всех вариантов одинаковая.

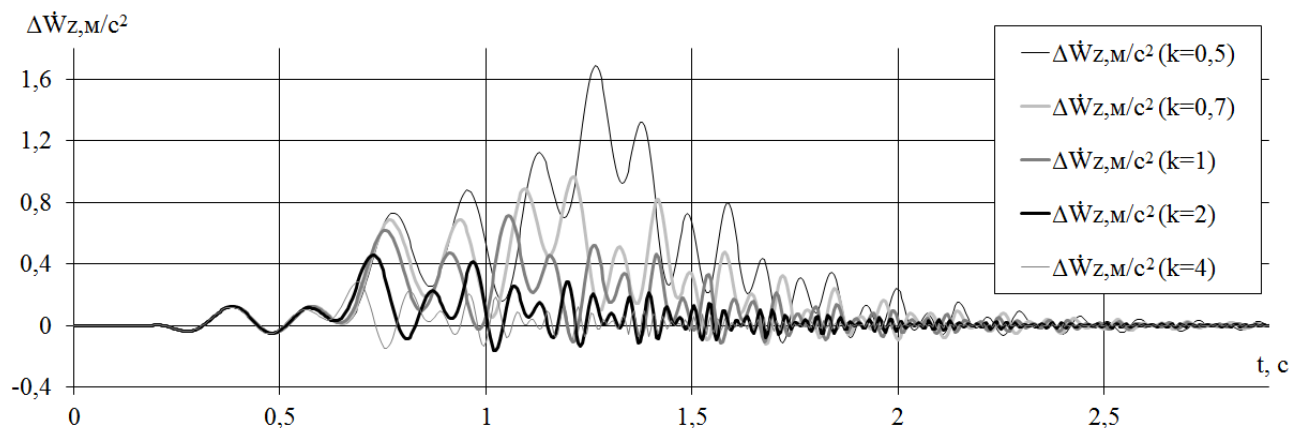
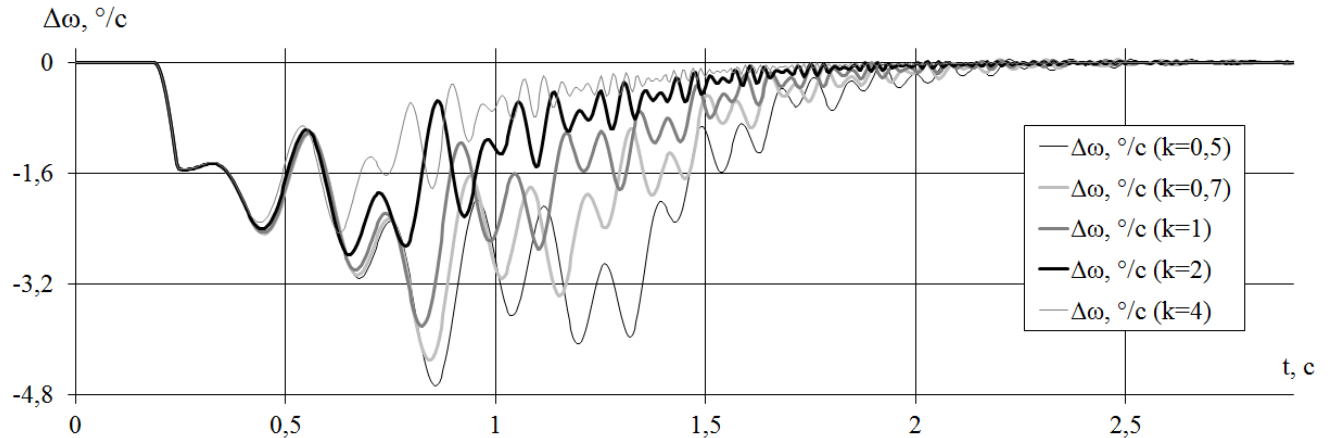
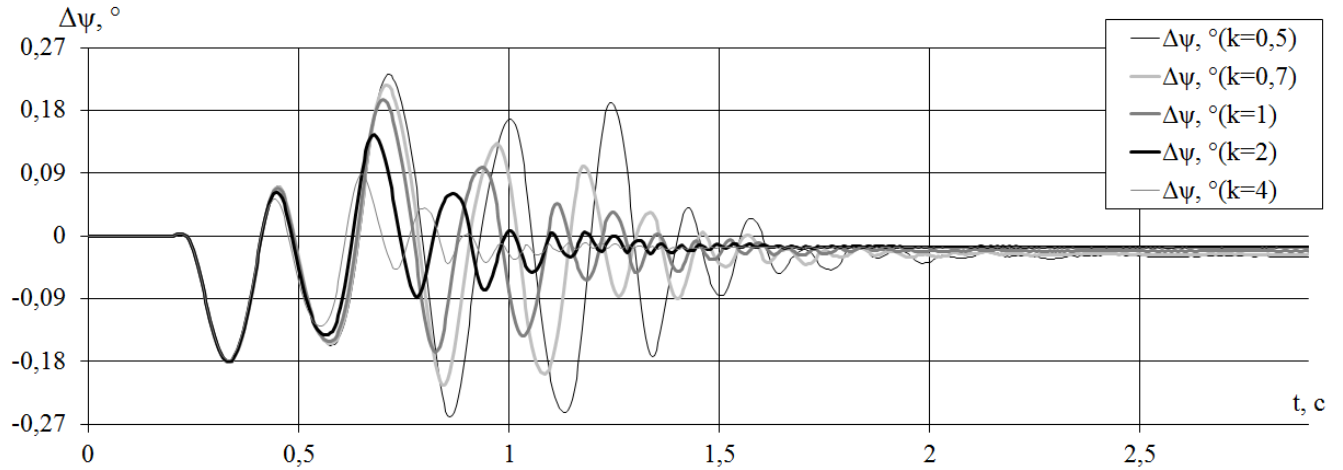


Рис. 5. Влияние коэффициента закрутки  $k$  на переходные процессы, вызванные выходом из пусковой установки

Как видно из рис. 5, с ростом коэффициента закрутки уменьшается амплитуда колебания отклонений параметров  $\omega_{z1}$  и  $\dot{W}_{z1}$ .

С ростом угловой скорости вращения скорость затухания переходных процессов увеличивается, что объясняется уменьшением временного интервала задержки определения параметров  $\omega_{z1}$  и  $\dot{W}_{z1}$  по новым измерениям с помощью выбранной методики.

### Выводы

1. Рассмотрены три варианта построения БИНС для объектов с наличием существенных перегрузок и угловой скорости вдоль выделенного направления.

2. Определены условия для применения каждого из рассмотренных вариантов построения БИНС, что позволяет выбрать оптимальную конфигурацию в соответствии с предъявляемыми к системе требованиями.

3. Исследования позволяют сформулировать рекомендации к выполняемым маневрам и динамике вращения для варианта с ограниченным набором ЧЭ, а также показывают необходимость проведения калибровочных испытаний после установки БИНС на изделие.

4. Показано, что вопрос о построении инерциальных навигационных систем, функционирующих в сложных условиях, можно успешно решить, применяя БИНС с косоугольной ориентацией ЧЭ.

### Список использованной литературы

1. Шунков В. Н. Энциклопедия реактивной артиллерии / Под общ. ред. А. Е. Тараса. – Минск: ОАО "Полиграфкомбинат им. Я. Коласа", 2004. – 544 с.

2. Широкоград А. Б. Энциклопедия отечественной артиллерии / Под общ. ред. А. Е. Тараса. – Минск: Харвест, 2000. – 1156 с.

3. Пугачев В. С. и др. Системы управления и динамика полета ракеты / В. С. Пугачев, И. Е. Казаков, Д. И. Гладков, Л. Г. Евланов, А. Ф. Мишаков, В. Д. Седов. – М.: ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1965. – 610 с.

4. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, Физматгиз, 1973. – 320 с.

5. Борисова А. Ю., Смаль А. В. Анализ разработок современных бесплатформенных инерциальных навигационных систем // Инженерный вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. – №05. – 2017.

Статья поступила 22.01.2018