

В. А. Ижко, И. А. Емельянова, И. М. Резник, канд. техн. наук П. Г. Хорольский

ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИИ ЗЕНИТНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ РАКЕТЫ

Описан способ оптимизации траектории зенитной управляемой ракеты, применяемый на этапе проектирования. Обзор существующих решений по данному вопросу подтвердил актуальность задачи. Аналитическое решение получить практически невозможно, поэтому в соответствии с современными тенденциями была проведена оптимизация численным методом оригинальной разработки. В его основе – двухуровневая оптимизация, выполняемая двумя разными численными методами и для двух разных критериальных функций. На верхнем уровне методом случайного поиска и, как вариант, методом покоординатного спуска осуществлялся поиск фиксированного набора промежуточных для заданной дальности полета точек траектории, координаты которых в совокупности обеспечивают необходимый оптимум. На нижнем уровне для каждой пары последовательных промежуточных точек решалась краевая задача попадания в дальнюю точку путем одномерной оптимизации. Покоординатный спуск использовался для поиска упрощенной программы полета. В качестве критериев оптимизации для верхнего уровня использовался минимум времени полета или максимум конечной скорости, для нижнего – терминальный критерий. Программой управления была выбрана программа угла атаки. В итоге были получены оптимальные и субоптимальные (дополнительно обеспечивающие минимум времени расчета) траектории и программы полета на максимальную дальность и разные высоты. Анализ результатов показал практическую близость траекторий минимального времени полета и максимальной конечной скорости.

Ключевые слова: зенитная ракета, оптимизация, программа угла атаки, траектория.

Описано спосіб оптимізації траєкторії зенітної керованої ракети, що застосовують на етапі проектування. Огляд існуючих рішень з цього питання підтвердив актуальність завдання. Аналітичне рішення отримати практично неможливо, тому відповідно до сучасних тенденцій було проведено оптимізацію числовим методом оригінального розроблення. У його основу було покладено дворівневу оптимізацію, яку виконують двома різними числовими методами і для двох різних критериальних функцій. На верхньому рівні методом випадкового пошуку і, як варіант, методом покоординатного спуску виконано пошук фіксованого набору проміжних для заданої дальності польоту точок траєкторії, координати яких у сукупності забезпечують необхідний оптимум. На нижньому рівні для кожної пари послідовних проміжних точок розв'язано крайову задачу влучення в дальню точку шляхом одномірної оптимізації. Покоординатний спуск використано для пошуку спрощеної програми польоту. Як критерії оптимізації для верхнього рівня використано мінімум часу польоту або максимум кінцевої швидкості, для нижнього – термінальний критерій. Програма керування вибрала програму кута атаки. У результаті було отримано оптимальні й субоптимальні (такі, що додатково забезпечують мінімум часу розрахунку) траєкторії і програми польоту на максимальну дальність і різні висоти. Аналіз результатів показав практичну близькість траєкторій мінімального часу польоту і максимальної кінцевої швидкості.

Ключові слова: зенітна ракета, оптимізація, програма кута атаки, траєкторія.

The article is devoted to optimization of a trajectory of the antiaircraft guided missile performed in design phase. The review of existing solutions on this issue confirmed the topicality of the problem. The analytical solution cannot be obtained, therefore, according to modern tendencies, optimization by numerical method of original development was performed. The basis of the method is two-level optimization which is carried out, in turn, by two different numerical methods and for two different criteria functions. At the top level, by method of random search and as a variant, by method of coordinate descent, the search was carried out for a fixed set of intermediate for the specified flight range trajectory points which co-ordinates in aggregate provide the necessary optimum. At the bottom level, for each pair of consecutive intermediate points, the boundary problem of falling into distant point by one-dimensional optimization was solved. The coordinate descent method was used for search for the simplified flight program. As optimization criteria for top level, minimum flight time or maximum final speed, for bottom – terminal criterion were used. The control program selected the angle of attack program. As a result, the optimum and suboptimum (additionally ensuring minimum calculation time) trajectories and flight programs to maximum range and different altitudes were obtained. The analysis of results showed practical proximity of trajectories of minimum flight time and maximum final speed.

Key words: anti-aircraft missile, optimization, angle of attack program, trajectory.

Введение

В настоящее время из-за высокой стоимости и особенностей применения сложные технические системы и их подсистемы требуют оптимизации. К числу таких систем относятся зенитные ракетные системы и комплексы. Их эффективность существенно зависит от целевой эффективности применяемых зенитных управляемых ракет (ЗУР). Поэтому получение оптимальных траекторий вновь создаваемых и модернизируемых ЗУР, характеристики которых должны быть всегда выше, чем у аналогов, является актуальным направлением научных и проектных исследований. Это также подтверждается появляющимися публикациями на рассматриваемую тему.

Действительно, ракеты, летящие по оптимальным траекториям, имеют, как правило, оптимальный вес, отсюда оптимальны и другие параметры, например стоимость изделия.

Анализ доступных информационных источников показывает, что для ракет, совершающих полет в атмосфере, к числу которых относятся ЗУР, не получены законы управления в аналитической форме, в отличие от движения в вакууме.

Так, в [1, с. 115-122] методом Понтрягина был проведен поиск оптимального управления подъемной силой беспилотного самолета, совершающего полет на максимальную дальность. Несмотря на весьма упрощенную постановку и сильное допущение о совпадении вектора тяги с вектором скорости, были найдены лишь области существования экстремального управления.

В работе [2] рассмотрен метод синтеза оптимальных траекторий для вывода динамических объектов в заданную точку применительно к функционалу обобщенной работы. Получено решение в явном виде, однако для его практического использования необходимо решить двухточечную краевую задачу для сопряженной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Последнее не позволяет использовать аналитическое решение непосредственным образом для формирования управления. По сути, представлен метод численного поиска решения.

Та же задача, но применительно к летательным аппаратам, решалась в [3] методом Понтрягина. Как и в [2], была сформирована схема ее решения численным путем, свойственным применяемому методу. Проблемой всех численных методов, использующих формализм метода Понтрягина, является обеспечение попадания в терминальную точку. Для ее разрешения приведена методика определения управления, приближенного к оптимальному, с использованием интерполяционных многочленов от высоты и дальности до точки встречи.

Задача, аналогичная [2], решена в [4] методом максимума Понтрягина, но для линейной модели с постоянными коэффициентами для ракеты постоянной мощности и для функционала специального вида, обеспечивающего ограничение управления в интегральном плане. Так же, как и в [2], получено решение в аналитическом виде, однако отмечено, что результат на практике тяжело реализовать.

Таким образом, эти аналитические решения не позволяют даже проводить параметрическую оптимизацию и имеют чисто теоретическое значение.

На практике распространены численные методы поиска оптимальных траекторий, как то:

- с использованием последовательного квадратичного программирования [5];
- с использованием специального программного пакета BOUNDSCO и метода пропорциональной навигации для обеспечения попадания в конечную точку [6];
- с использованием метода пристрелки и нелинейного программирования [7];
- градиентный метод и метод покоординатного спуска, методы второго порядка [8].

Неустранимым недостатком применения численных методов оптимизации является практическая невозможность доказать глобальную оптимальность полученного результата. Тем более что это существенно зависит от самого метода оптимизации, его программной реализации и выбора начального приближения. Поэтому постоянно будет актуальным поиск оптимальных траекторий и соответствующих им законов управления практически всеми известными методами, количество которых постоянно растет, для

ракет с разными наборами ограничений и характеристиками.

Целью данной статьи является определение вида оптимального закона управления гипотетической ЗУР с характеристиками, соответствующими средней дальности полета, путем построения ее оптимальной траектории новым по сравнению с уже примененными методом численной оптимизации и для иных ограничений на параметры движения и управления. Это можно выполнить, в частности, вновь разработанным методом, обеспечивающим максимальное использование опыта, полученного при проектировании баллистических ракет большой дальности и ракет-носителей.

Постановка задачи

Рассматривается динамическая система, описывающая механику полета ЗУР. В качестве математической модели такой системы можно выбрать любую из известных широко описанных в литературе, например в [9, 10]. Выбор модели не принципиален, так как при одинаковых исходных данных результаты расчетов должны совпасть с точностью до вычислительной ошибки.

Необходимо методом численной оптимизации построить оптимальную траекторию полета по выбранным критериям на дальности и высоты, предельные для возможностей рассматриваемой ЗУР. Метод оптимизации должен отличаться от уже рассмотренных в доступных информационных источниках и обеспечивать максимальное использование предыдущего опыта проектировщиков ракет. Он должен быть прозрачным, т. е. понятным, и его действия должны легко проследиваться при внешнем контроле процесса.

В качестве объекта исследования рассматривалась гипотетическая ЗУР средней дальности со следующими необходимыми для расчета траектории характеристиками, практически типовыми для ракет данного класса:

- вес – до 1000 кгс;
- характеристическая скорость – 845 м/с;
- аэродинамическое качество – до 24;
- баллистический коэффициент – до $4 \cdot 10^{-5}$.

Управление ракетой – аэродинамическое, с помощью рулей.

Типовая схема полета ЗУР с точки зрения наведения включает в себя три основных участка: начальный (старт), средний (как правило, командное наведение), конечный (самонаведение). С точки зрения механики полета траектория включает в себя два участка: активный (наличие тяги двигателя) и пассивный (тяги нет).

Активный участок занимает начальный и частично средний участки.

Старт проводится вертикально, после чего осуществляется разворот на оптимальный угол тангажа, и затем начинается выведение.

В нашем случае конечный участок заменен продленным средним. Именно он в основном определяет оптимальность результата, поскольку самонаведение обеспечивает выполнение только краевых условий – попадание в заданную цель.

Цель принималась неподвижной, поскольку именно самонаведение учитывает подвижный характер конечных условий наведения и расходует ресурсы, сэкономленные на оптимальной траектории предыдущих участков. Поэтому оптимизацией среднего участка вместе с параметрами конца первого участка должны быть обеспечены условия для осуществления успешного самонаведения. Это возможно обеспечить путем выбора соответствующего критерия оптимальности.

В качестве альтернативных критериев выбраны следующие:

- минимум времени полета $T_{k \min}$;
- максимум конечной скорости $V_{k \max}$.

Критерий времени полета является типовым при оптимизации траекторий полета беспилотных летательных аппаратов [11, с. 147]. В нашем случае выбор обосновывается стремлением уменьшить время на маневр ухода от ожидаемой траектории.

Конечная скорость среднего участка расходуется на маневр самонаведения, поэтому ее максимум однозначно соответствует максимум конечной скорости полета. На участке самонаведения используется метод пропорциональной навигации в различных модификациях. Его особенностью является условие попадания в цель, суть которого в том, что скорость ЗУР должна

быть не меньше скорости цели, иначе происходит срыв процесса наведения. Поэтому максимум конечной скорости среднего участка обеспечивает максимум возможности попасть в цель при прочих выполняемых условиях движения.

При этом должна быть решена краевая задача попадания в конечную точку по дальности L_k и высоте H_k .

В расчетах траекторий полета ЗУР учитывали систему ограничений на такие параметры:

- максимальный угол атаки α_{\max} ;
- максимальный угол отклонения аэродинамических рулей δ_{\max} ;
- максимальную угловую скорость изменения угла атаки α_{\max} ;
- минимальный скоростной напор q_{\min} ;
- максимальную поперечную перегрузку $n_{y, \max}$.

Данная система ограничений отличается от ранее рассмотренных в литературе.

Дополнительным (вторичным) критерием принят минимум времени расчета одной траектории, следствием чего является формирование субоптимальной траектории, например, за счет:

- применения менее эффективного по искомому критерию, но более быстродействующего метода оптимизации;
- упрощения закона управления;
- комбинации первых двух подходов.

С целью определения возможности оперативного получения оптимальной траектории и применения таковой на борту ракеты необходимо также провести расчет баллистической траектории (БТ) и сравнить ее с оптимальными.

Метод формирования оптимальной траектории случайным поиском

Постановкой задачи, по сути, определен поиск глобально оптимальной траектории. Сейчас известны два основных метода глобальной оптимизации [12]: перебора и случайного поиска (МСП).

Оба метода имеют общий недостаток – чрезвычайно низкое быстродействие. Как

следствие, на практике используют более быстродействующие методы локальной оптимизации.

В связи с этим в данном исследовании были применены методы случайного поиска (для поиска наиболее близкого к оптимальному решения) и покоординатного спуска (для субоптимальной траектории).

С целью сокращения времени расчета и повышения прозрачности процесса поиска оптимального решения (для исключения замкнутости и упрощения отладки) были приняты нижеследующие реализации методов.

Важным моментом реализации любого метода является выбор оптимизируемых параметров. Оказалось, что он и принятая схема полета взаимозависимы. Поэтому реализацию методов следует излагать совместно с описанием указанных схем.

Итак, приведем описание реализации метода случайного поиска для следующей схемы полета ЗУР:

- 1) вертикальный старт;
- 2) разворот ракеты по тангажу до заданного конечного угла участка \mathcal{G}_{zkl} по линейной программе на интервале времени $[0, t_1]$, t_1 в нашем случае равно 1,29 с;
- 3) разворот по линейной программе угла тангажа на угол \mathcal{G}_{prog} на интервале времени $[t_1, t_2]$, t_2 равно 3,8 с;
- 4) формирование текущего профиля траектории – множества троек $\{L_i, H_i, \alpha_i\}$, $i = \overline{1, k}$, $k \in N$, где L_i, H_i, α_i – дальность, высота, угол атаки с учетом того, что $\{L_0, H_0, \alpha_0\}$ формируются на предыдущем шаге.

При этом заданными являются конечные значения L_k, H_k .

Внутри интервала $\{L_j, L_{j+1}\}$ угол атаки α изменяется линейно от α_j до α_{j+1} .

Варьируемыми случайным поиском переменными являются $\mathcal{G}_{zkl}, \mathcal{G}_{prog}, \{H_j\}, j = \overline{1, k-1}, \{\alpha_v\}, v = \overline{1, \kappa}, k = \kappa$. При этом задаются начальные значения $t_1, t_2, \{H_i^0\}, \mathcal{G}_{zkl}^0, \mathcal{G}_{prog}^0$.

Задача в общем виде формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 u^{opt} &= \underset{U}{opt} \left\{ F(U) \mid Q, \{L\} \right\}, \\
 u &= \left\{ \mathcal{G}_{zaki}, \mathcal{G}_{prog}, \left\{ \alpha_v \mid \nu = \overline{1, \kappa} \right\} \right\}, \\
 opt &= \begin{cases} \min, & \text{if } F = T_k, \\ \max, & \text{if } F = V_k, \end{cases} \\
 U &= \left\{ u, \left\{ H_\mu \mid \mu = \overline{1, k-1} \right\} \right\}, \\
 F &= \{T_k, V_k\}, \\
 Q &= \{t_1, t_2, \{L_i\}, \{H_\mu^0\}, \mathcal{G}_{zaki}^0, \mathcal{G}_{prog}^0\}, \\
 \{L\} &= \left\{ L_\mu \mid \mu = \overline{1, k-1}, L_k = L_\kappa, H_k = H_\kappa \right\}.
 \end{aligned}$$

Выбор вида линейных программ угла атаки на упомянутых выше интервалах дальностей вызван аналогией линейных программ тангажа при выведении ракет-носителей.

Таким образом, имеет место двухуровневая оптимизация, выполняемая для двух разных критериальных функций. На верхнем уровне методом случайного поиска для этих функций осуществлялся поиск фиксированного набора промежуточных для заданной дальности полета точек траектории, координаты которых в совокупности обеспечивают необходимый оптимум. На нижнем уровне для каждой пары последовательных промежуточных точек решается краевая задача попадания в дальнюю точку интервала путем одномерной оптимизации, что символически можно записать так:

$$\begin{aligned}
 u^{opt} &= \underset{\tilde{U}=\{U \setminus \{\alpha_v\}\}}{opt} \left(F(\tilde{U}, \{\alpha_v^{opt}\}) \mid Q, \{L\} \right), \\
 \alpha_v^{opt} &= \min_{\{\alpha_v\}} (|H - H_v|).
 \end{aligned}$$

Добавим, что в исследовании $k = 3$.

Оптимизация траектории покоординатным спуском

По результатам оптимизации случайным поиском предполагается определение упрощенного вида закона управления (в данном случае – угла атаки, который будет показан далее) и последующее проведение параметрической оптимизации траекторий с этим законом.

Использование метода покоординатного спуска (МПС) для субоптимального закона управления привело к следующей схеме полета:

- 1) вертикальный старт;
- 2) полет по программе угла атаки вида

$$\alpha_{np}(\text{Ma}) = \tilde{\alpha}_{\max} \sin \left(\pi \frac{\text{Ma} - \text{Ma}_0}{\text{Ma}_k - \text{Ma}_0} \right)$$

до достижения значения α_1 для значения числа Маха Ma_k ($\text{Ma}_k = 0,8$);

- 3) полет с $\alpha(t) = \alpha_1$ до момента времени $t = t_{nep}$;

- 4) линейный переход на α_2 и полет с $\alpha(t) = \alpha_2$ до достижения $L = L_\kappa$.

Здесь также двухуровневая оптимизация методом покоординатного спуска: на верхнем уровне – тех же критериальных функций, а на нижнем – терминального критерия, т. е. решение краевой задачи. Обеспечение требуемой высоты H_κ на дальности L_κ осуществляется выбором $\tilde{\alpha}_{\max}$, а поиском α_1, α_2 достигаются экстремумы одного из критериев – $T_{k \min}$ или $V_{k \max}$.

Следовательно, задача в общем виде формулируется так:

$$\begin{aligned}
 \hat{u}^{opt} &= \underset{u}{opt} \left\{ F(\hat{u}) \mid Q, \{L\} \right\}, \\
 \hat{u} &= \left\{ \tilde{\alpha}_{\max}, \left\{ \alpha_v \mid \nu = \overline{1, 2} \right\} \right\}, \\
 opt &= \begin{cases} \min, & \text{if } F = T_k, \\ \max, & \text{if } F = V_k, \end{cases} \\
 F &= \{T_k, V_k\}, \\
 Q &= \{M_k, t_{nep}, L_\kappa, H_\kappa, \alpha_1^0, \alpha_2^0\}.
 \end{aligned}$$

Конкретизируется в своей реализации следующим образом:

$$\hat{u}^{opt} = \underset{\alpha_1, \alpha_2}{opt} \left(F(\hat{u}) \mid Q, \{L\} \right), \tilde{\alpha}_{\max}^{opt} = \min_{\tilde{\alpha}_{\max}} (|H - H_\kappa|).$$

Отметим, что вид программы угла атаки был выбран по результатам анализа оптимальных программ, полученных методом случайного поиска.

Выбор расчетных случаев

Таблица 2

Оптимизация траектории полета по принятым критериям кроме терминального имеет смысл при стрельбе на максимальные дальности и высоты.

В работе [14] показано, что наиболее нагруженным для системы управления является случай стрельбы на максимальные дальность L_{\max} и высоту H_{\max} .

С другой стороны, максимальное торможение ракеты проявляется при стрельбе на максимальную дальность L_{\max} и минимальную высоту H_{\min} .

В данном исследовании принято $L_{\max} = 20$ км, $H_{\min} = 1$ км, $H_{\max} = 15$ км.

Методика проведения расчетов

В соответствии с постановкой задачи расчеты проводились в следующем порядке действий: оптимизация методом случайного поиска, анализ результатов, определение упрощенного вида программы угла атаки, общего для всех траекторий, затем формирование субоптимальной траектории путем параметрической оптимизации упрощенной программы. Отдельно для принятых расчетных случаев были определены баллистические траектории.

Результаты расчетов и их анализ

Основные результаты расчетов (искомые времена и скорости полета) представлены для высоких траекторий L_{\max}, H_{\max} в табл. 1, для низких L_{\max}, H_{\min} – в табл. 2.

Таблица 1

Значения конечных параметров на оптимальных траекториях для высоких траекторий L_{\max}, H_{\max}

Параметры	БТ	Метод	T_{\min}	V_{\max}
Время полета T_k, c	41,3	МСП	40,5	40,6
Конечная скорость $V_k, м/с$	442,4	МСП	482,8	521,3
Время полета T_k, c	41,3	МПС	40,7	42,0
Конечная скорость $V_k, м/с$	442,4	МПС	482,7	510,1

Значения конечных параметров на оптимальных траекториях для низких траекторий L_{\max}, H_{\min}

Параметры	БТ	Метод	T_{\min}	V_{\max}
Время полета T_k, c	39,7	МСП	38,2	-
Конечная скорость $V_k, м/с$	290,0	МСП	318,3	-
Время полета T_k, c	39,7	МПС	38,6	42,4
Конечная скорость $V_k, м/с$	290,0	МПС	318,7	352,1

Анализ данных таблиц показывает, что оптимизируемые конечные параметры для обоих методов оптимизации и баллистической траектории весьма близки.

Оптимизация конечных времени полета привела к практическому совпадению на всех траекториях как для оптимальной (разница менее 0,3%), так и для субоптимальной (разница до 9%) программы атаки. Оптимизация скорости дает чуть менее точный результат (на субоптимальной траектории разница до 10%).

Что же касается баллистической траектории, то конечная скорость и особенно время полета на ней дают хорошее начальное приближение к оптимальным значениям: отличие по времени до 1,6%, а по скорости до 9%.

Графический вид закона управления (график программы угла атаки), полученный случайным поиском для верхней траектории, представлен на рис. 1.

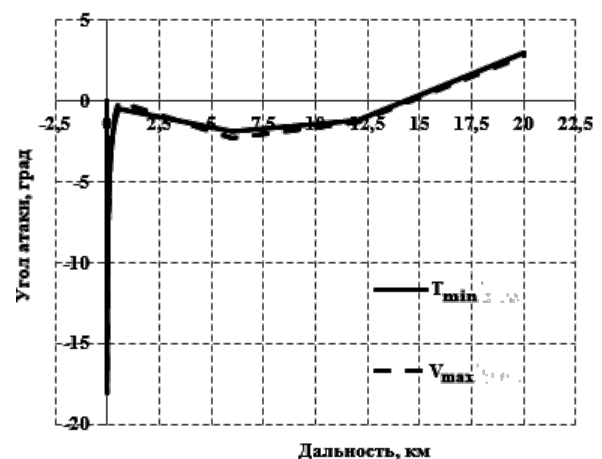


Рис. 1. Программы угла атаки для высоких траекторий, полученных МСП

Следует отметить, что оптимальная по времени программа угла атаки для низкой траектории практически совпадает с высокой: отличие только в начальном участке – угле заклона, достигающем -30° . Исходя из этого график здесь не приводится.

Оптимальная программа угла атаки может быть упрощенно представлена ступенчатой функцией со ступеньками разного уровня, как это показано на рис. 2 для низких траекторий, полученных МПС.

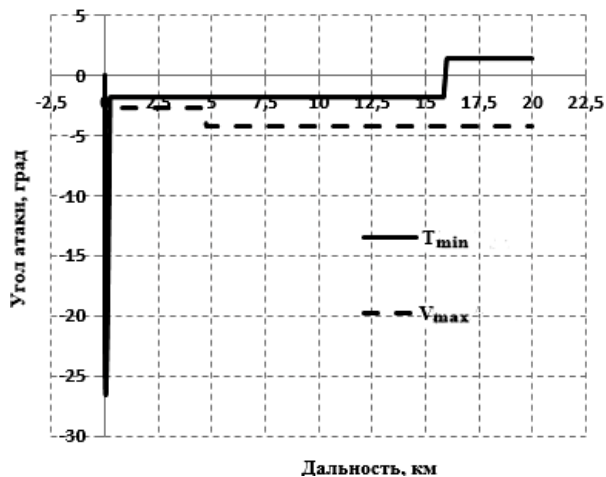


Рис. 2. Программы угла атаки для низкой траектории, полученные МПС

Соответствующие приведенным на рис. 1, 2 графикам программ угла атаки траектории представлены на рис. 3 (высокая) и 4 (низкая) соответственно.

Из графиков на рис. 1 видно, что программы углов атаки, оптимальных по конечным времени и скорости, практически одинаковы и, как выше отмечалось, дают столь же близкие результаты.

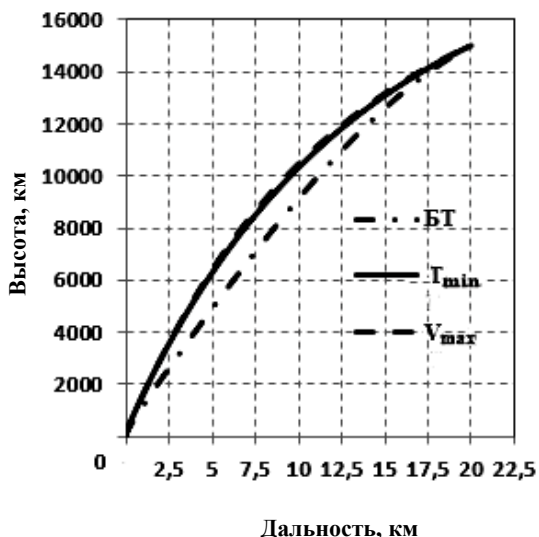


Рис. 3. Графики высоких траекторий, полученные МПС

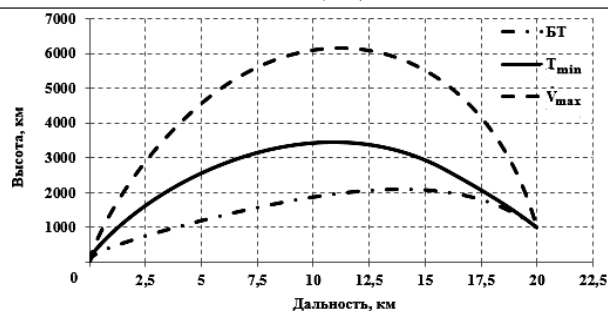


Рис. 4. Графики низких траекторий, полученные МПС

Указанный упрощенный вид программы угла атаки был принят в качестве субоптимального при использовании метода покоординатного спуска, о чем говорилось выше в постановке задачи.

Графики низких траекторий, полученных МПС, и субоптимальные программы атаки для высоких траекторий для МПС не приводятся, поскольку не влияют на выводы.

Последнее обстоятельство, которое надо отметить, – это малость углов атаки на среднем участке траектории полета (менее 5°), что, видимо, и определяет близость искомых конечных параметров на оптимальных и баллистической траекториях.

Выводы

Проведенное исследование подтвердило работоспособность разработанной модификации метода случайного поиска для оптимизации траектории полета ЗУР средней дальности в условиях принятых ограничений. Адекватность результатов подтверждена методом покоординатного спуска, апробированного ранее другими авторами. Получен вид оптимального закона управления – программы угла атаки на среднем участке траектории полета. Субоптимальная программа представляет собой двухступенчатую функцию разного уровня с однократным переключением от отрицательного значения к положительному.

Следует отметить близость значений оптимизируемых конечных параметров для обоих методов оптимизации и БТ. Отсюда следует практическая эквивалентность критериев оптимизации по минимуму времени полета и по максимуму скорости прибытия к цели.

Кроме того, очень хорошим приближением для оценки полного времени полета и, в меньшей степени, конечной скорости является баллистическая траектория.

Для проведения оперативных расчетов имеет смысл использование субоптимального управления и метода покоординатного спуска.

Дальнейшие исследования рекомендуется проводить в направлении применения других методов оптимизации и учета новых ограничений.

Список использованной литературы

1. Летов А. М. Динамика полета и управление. М., 1969. 360 с.
2. Ушань В. Н. Метод синтеза оптимальных траекторий для вывода динамических объектов в заданную точку. *Системы обработки информации*. 2014. № 1 (117). С. 67-71.
3. Зарубинская А. Л. Оптимальное управление движением летательных аппаратов в атмосфере от старта до точек встречи. *Техническая механика*. 1997. № 5. С. 23-28.
4. Грабчак В. І. Основні аспекти опису задачі про оптимальну швидкодію керування рухом ракети. *Системи озброєння і військова техніка*. 2014. № 4(40). С. 13-20.
5. Shaw Y. Ong. Optimal Planar Evasive Aircraft Maneuvers Against Proportional Navigation Missiles. *Journal of guidance, control and dynamics*. 1996. Vol. 19, № 6. P. 1210-1215.
6. Renjith R. Kumar. Near-Optimal Three-Dimensional Air-to-Air Missile Guidance Against Maneuvering Target. *Journal of guidance, control and dynamics*. 1995. Vol. 18, № 3. P. 457-464.
7. Paul J. Enright. Conway Discrete Approximations to Optimal Trajectories Using Direct Transcription and Nonlinear Programming. *Journal of guidance, control, and dynamics*. 1992. Vol. 15, № 4. P. 994-1002.
8. Craig A. Phillips. Trajectory Optimization for a Missile Using a Multitier Approach. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 2000. Vol. 37, № 5. P. 653-662.
9. Лебедев А. А., Герасюта Н. Ф. Баллистика ракет. М., 1970. 244 с.
10. Проектирование зенитных управляемых ракет / И. И. Архангельский и др.; под ред. И. С. Голубева и В. Г. Светлова. М., 2001. 732 с.
11. Дракин И. И. Основы проектирования летательных аппаратов с учетом экономической эффективности. М., 1973. 224 с.
12. Бейко И. В., Бублик Б. Н., Зинько П. Н. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. К., 1983. 512 с.
13. Кринецкий Е. И. Системы самонаведения. М., 1970. 236 с.

Статья поступила 21.02.2019