

Канд. техн. наук Э. Г. Гладкий

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ БЕЗОПАСНОСТИ В РАЙОНЕ ПАДЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КАССЕТНОГО БОЕВОГО ОСНАЩЕНИЯ ПРИ ОТРАБОТКЕ РАКЕТНОГО КОМПЛЕКСА

Одним из основных типов боевого оснащения современных тактических и оперативно-тактических ракет являются кассетные боевые части на основе неуправляемых осколочно-фугасных боевых элементов, которые широко применяются для поражения групповых целей. Значительное место при их создании занимает натурная отработка (летные испытания). В процессе проведения летных испытаний тактических и оперативно-тактических ракет с кассетными боевыми частями актуальными являются вопросы обеспечения безопасности. Подобные испытания разрабатываемых в Украине тактических и оперативно-тактических ракет, исходя из возможностей имеющихся полигонов, предполагается проводить в акватории Черного моря, где основную опасность кассетные боевые части с неуправляемыми осколочно-фугасными боевыми элементами (или их эквивалентами) будут представлять для судов. В статье предложены две математические модели оценки вероятности поражения (риска) судна, которое может находиться в зоне падения боевых элементов (эквивалентов боевых элементов) кассетной боевой части. Первая модель построена в предположении, что известными являются площадь накрытия кассетной боевой части и групповое рассеивание боевых элементов. Такая модель может быть использована для определения безопасности на начальных стадиях разработки кассетных боевых частей. Вторая модель предполагает, что конструктивно-компоновочная схема кассетной боевой части и схема метания боевых элементов получили свое окончательное завершение, и в соответствии с этим известными считаются номинальные точки падения боевых элементов, а также их групповое и индивидуальное рассеивание. Практическое использование обеих моделей требует применения численных процедур.

Ключевые слова: полетная безопасность, летные испытания, кассетные боевые части.

Одним з основних типів бойового оснащення сучасних тактичних і оперативно-тактичних ракет є касетні бойові частини на основі некерованих осколково-фугасних бойових елементів, які набули широкого застосування для ураження групових цілей. Значне місце в процесі їх створення посідає натурне відпрацювання (льотні випробування). У процесі проведення льотних випробувань тактичних і оперативно-тактичних ракет з касетними бойовими частинами актуальними є питання забезпечення. Подібні випробування розроблюваних в Україні тактичних і оперативно-тактичних ракет, виходячи з можливостей наявних полігонів, передбачається здійснювати в акваторії Чорного моря, де головною небезпекою касетні бойові частини з некерованими осколково-фугасними бойовими елементами (або їх еквівалентами) стануть для суден. У статті запропоновані дві математичні моделі оцінювання ймовірності ураження (ризик) судна, яке може перебувати в зоні падіння бойових елементів (еквівалентів бойових елементів) касетної бойової частини. Першу модель побудовано виходячи з припущення, що відомими є площа накрыття касетної бойової частини та групове розсіювання бойових елементів. Така модель може бути використана для оцінювання безпеки на початкових стадіях розроблення касетних бойових частин. Друга модель передбачає, що конструктивно-компоновальна схема касетної бойової частини та схема кидання бойових елементів отримали своє остаточне завершення і відповідно до цього відомими вважаються номінальні точки падіння бойових елементів, а також їх групове й індивідуальне розсіювання. Практичне використання обох моделей вимагає застосування числових процедур.

Ключові слова: польотна безпека, льотні випробування, касетні бойові частини.

One of the main types of arming of modern tactical and short-range missiles are cassette warheads based on nonguided blast-fragmentation submunitions that are widely used to kill group targets. The full-scale testing (flight tests) is an integral part of their creation. In the process of flight tests of tactical and short-range missiles with cassette warheads, the safety issues are topical. Based on the capabilities of existing test ranges, it is planned to conduct such tests for the tactical and short-range missiles, being under development in Ukraine, in the Black sea water area where the cassette warheads with nonguided blast-fragmentation submunitions (or their equivalents) will pose major hazard for ships. In the paper, two mathematical models are proposed to assess probability of killing (risk) a ship that may be present in the impact area of submunitions (submunitions equivalents) of cassette warhead. The first model was constructed in the assumption that the coverage area of cassette warhead and group dispersion of submunitions are known.

Such model may be used to determine safety in the initial phases of cassette warheads development. The second model assumes that the configuration of cassette warhead and the scheme of submunitions firing were finalized, and accordingly, the nominal impact points of submunitions and their group and individual dispersion are considered to be known. Practical application of both models requires the use of numerical procedures.

Key words: flight safety, flight tests, cassette warheads.

Кассетные боевые части (КБЧ) на основе неуправляемых осколочно-фугасных боевых элементов (БЭ) являются одним из основных видов боевого оснащения современных тактических (ТР) и оперативно-тактических ракет (ОТР), которые применяются для поражения групповых наземных целей. Вскрытие КБЧ на заданной высоте обеспечивает разлет БЭ и накрытие ими определенной площади. Подорываясь при подходе к поверхности Земли (контактно или на определенной высоте над поверхностью Земли), БЭ осколками поражают находящиеся на ней элементы групповой цели. Для разрабатываемых в Украине ТР и ОТР предусматриваются КБЧ на основе неуправляемых осколочно-фугасных БЭ (например, ОТРК «Гром-2»).

Значительное место при создании КБЧ занимает натурная экспериментальная отработка (летные испытания ТР и ОТР), с помощью которой оцениваются и подтверждаются характеристики КБЧ, прежде всего размеры зоны накрытия (включая точки падения отдельных БЭ), групповое рассеивание БЭ и др. При отработке указанных вопросов БЭ могут заменяться габаритно-весовыми макетами.

В Украине возможности сухопутных полигонов для проведения летных испытаний ТР и ОТР (в том числе с КБЧ) ограничены. В качестве одного из вариантов проведения натуральных испытаний рассматриваются пуски ТР (ОТР) в акваторию Черного моря. Как следствие, в процессе натурной отработки ТР (ОТР) с КБЧ существует опасность поражения БЭ или их эквивалентами судов. Для определения опасных зон, где необходимо исключить пребывание судов на время проведения летных испытаний ТР (ОТР) с КБЧ, необходимо оценить риски их поражения. С этой целью построим модели оценки риска для судна при падении элементов КБЧ.

Вероятность поражения (риск) судна при отработке боевого оснащения ОТР будет представлять событие, состоящее в том, что хотя бы один БЭ (габаритно-весовой макет) КБЧ попадет в судно. Будем предполагать, что судно имеет известные размеры $L_c \times B_c$ и расположено таким образом, что его геометрический центр находится в точке (x_c, z_c) относительно точки прицеливания, а большая сторона параллельна плоскости стрельбы.

В зависимости от этапа разработки комплекса для оценки безопасности при натуральных испытаниях могут использоваться несколько моделей, которые построены исходя из имеющихся на момент разработки исходных данных. Рассмотрим первую ситуацию, когда известными являются площадь зоны накрытия КБЧ (зоны рассеивания БЭ) и групповое рассеивание совокупности БЭ. В пределах зоны накрытия БЭ распределяются равномерно с плотностью

$$\lambda_{БЭ} = \frac{N_{БЭ}}{S_{накр}}, \quad (1)$$

где $N_{БЭ}$ – количество БЭ; $S_{накр}$ – площадь зоны накрытия КБЧ.

Подобная ситуация характерна для начального этапа проектирования, когда конструктивная реализация отсека кассетного боевого оснащения и схема метания не получили окончательного завершения.

В предположении равномерного распределения БЭ в пределах площади накрытия вероятность попадания в судно хотя бы одного БЭ определяется по формуле [1]

$$R_c = 1 - e^{-\lambda_{БЭ} S}, \quad (2)$$

где S – накрытая площадь судна, которая представляет площадь пересечения зоны накрытия КБЧ и проекции судна.

Зона накрытия обычно представляет круг (определяется схемой метания), однако для удобства получения аналитического решения представим ее в виде квадрата, размер которого соответствует расчетной площади накрытия. Сторону такого квадрата обозначим a , так что $S_{накр} = a^2$.

Для определенности будем полагать, что размер условного квадрата зоны накрытия КБЧ больше площади судна, т. е. $a > L_c$ и $a > B_c$. В этом случае значение накрытой площади судна S будет изменяться от 0, когда пересечение зоны судна и площади накрытия КБЧ отсутствует, до максимального значения $S_{\max} = L_c \cdot B_c$, соответствующего полному попаданию судна в зону накрытия. Таким образом, S представляет случайную величину смешанного типа, которая может принимать два фиксированных (дискретных) значения 0 или S_{\max} с некоторыми вероятностями, а также случайные значения из интервала $(0; S_{\max})$. Реализации случайной величины накрытой

площади судна, соответствующие различным вариантам геометрического перекрытия площадей, представим (рис. 1) следующим образом:

$$S = \begin{cases} 0 \\ u_X \cdot u_Z \\ L_c \cdot u_Z \\ u_X \cdot B_c \\ L_c \cdot B_c \end{cases}, \quad (3)$$

где u_X, u_Z – отрезки, определяющие перекрытие площади судна в продольном и поперечном направлениях $0 < u_X < L_c, 0 < u_Z < B_c$.

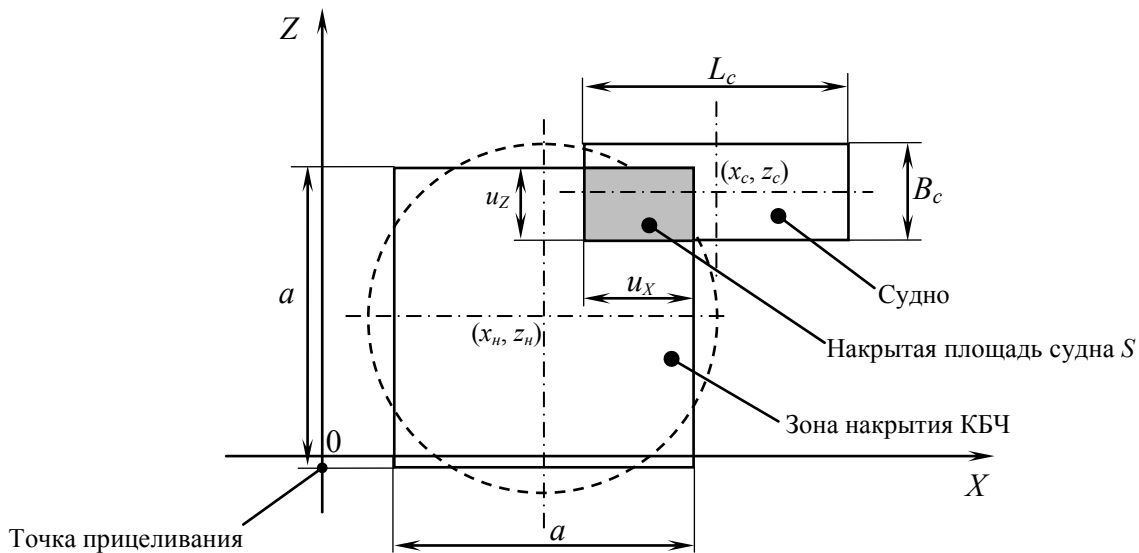


Рис. 1. Геометрическая модель поражения судна: (x_n, z_n) – координаты центра зоны накрытия КБЧ относительно точки прицеливания; (x_c, z_c) – координаты геометрического центра судна

При определении случайной величины S в (3) для удобства дальнейших рассуждений отдельно выделены состояния, для которых одна из сторон судна полностью попадает в зону накрытия КБЧ.

Вероятность поражения судна в соответствии с (2) и (3) представляет сумму

$$R_c = P_{LB} (1 - e^{-\lambda_{БЭ} L_c B_c}) + P_L \int_0^{B_c} (1 - e^{-\lambda_{БЭ} L_c u_Z}) f(u_Z) du_Z + P_B \int_0^{L_c} (1 - e^{-\lambda_{БЭ} u_X B_c}) f(u_X) du_X + \int_0^{L_c} \int_0^{B_c} (1 - e^{-\lambda_{БЭ} u_X u_Z}) f(u_X) f(u_Z) du_X du_Z, \quad (4)$$

где P_{LB} – вероятность того, что судно целиком попало в зону накрытия КБЧ; P_L и P_B – соответственно вероятности того, что одна из сторон судна полностью попала в зону накрытия; $f(u_X), f(u_Z)$ – плотности распределения случайных величин U_X, U_Z соответственно.

Определим P_{LB} . Исходя из геометрической модели, представленной на рис. 1, судно целиком окажется в зоне накрытия КБЧ, если ее центр (x_n, z_n) будет находиться в пределах

$$x_c + \frac{L_c}{2} - \frac{a}{2} \leq x_n \leq x_c - \frac{L_c}{2} + \frac{a}{2} \cap z_c + \frac{B_c}{2} - \frac{a}{2} \leq z_n \leq z_c - \frac{B_c}{2} + \frac{a}{2}.$$

Поскольку рассеивание центра зоны поражения в продольном и боковом направлениях в подавляющем большинстве случаев принимается независимыми нормальными величинами, вероятность того, что судно целиком попадет в зону накрытия КБЧ,

$$P_{LB} = \left[\Phi \left(\frac{x_c - \frac{L_c}{2} + \frac{a}{2}}{\sigma_x} \right) - \Phi \left(\frac{x_c + \frac{L_c}{2} - \frac{a}{2}}{\sigma_x} \right) \right] \times \left[\Phi \left(\frac{z_c - \frac{B_c}{2} + \frac{a}{2}}{\sigma_z} \right) - \Phi \left(\frac{z_c + \frac{B_c}{2} - \frac{a}{2}}{\sigma_z} \right) \right], \quad (5)$$

где σ_x, σ_z – средние квадратические отклонения в продольном и боковом направлениях, характеризующие групповое рассеивание совокупности БЭ; $\Phi(\bullet)$ – функция нормального распределения (функция Лапласа).

Отдельные сомножители в (5) соответственно представляют вероятности P_L и P_B таким образом, что $P_{LB} = P_L P_B$.

Пересечение зоны накрытия и площади судна, соответствующее в продольном направлении величине u_x ($0 < u_x < L_c$), будет реализовано, если

$$x_c - \frac{L_c}{2} - \frac{a}{2} \leq x_n \leq x_c + \frac{L_c}{2} - \frac{a}{2} \quad (\text{слева})$$

$$\text{или } x_c - \frac{L_c}{2} + \frac{a}{2} < x_n < x_c + \frac{L_c}{2} + \frac{a}{2} \quad (\text{справа}).$$

Аналогично для бокового направления (для величины u_z)

$$z_c - \frac{B_c}{2} - \frac{a}{2} \leq z_n \leq z_c + \frac{B_c}{2} - \frac{a}{2} \quad (\text{снизу})$$

$$\text{или } z_c - \frac{B_c}{2} + \frac{a}{2} < z_n < z_c + \frac{B_c}{2} + \frac{a}{2} \quad (\text{сверху}).$$

Для замкнутости рассуждений следует также отметить, что пересечения площади

накрытия КБЧ и площади судна не произойдет, если центр прямоугольника поражения (x_n, z_n) будет находиться в пределах интервалов

$$x_n < x_c - \frac{L_c}{2} - \frac{a}{2} \cup x_n > x_c + \frac{L_c}{2} + \frac{a}{2};$$

$$z_n < z_c - \frac{B_c}{2} - \frac{a}{2} \cup z_n > z_c + \frac{B_c}{2} + \frac{a}{2}.$$

Построим закон распределения для случайной величины U_X

$$\begin{aligned} F_{U_X}(u_X) &= \text{Вер}\{U_X \leq u_X\} = \\ &= \text{Вер}\left\{x_n \in \left(-\infty; x_c - \frac{L_c}{2} - \frac{a}{2} + u_X\right)\right\} \cup \\ &\cup \left\{x_n \in \left(x_c + \frac{L_c}{2} + \frac{a}{2} - u_X; +\infty\right)\right\} = \\ &= \Phi\left(\frac{1}{\sigma_x} \left(x_c - \frac{L_c}{2} - \frac{a}{2} + u_X\right)\right) + \\ &+ \left[1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma_x} \left(x_c + \frac{L_c}{2} + \frac{a}{2} - u_X\right)\right)\right]. \quad (6) \end{aligned}$$

Плотность распределения $f(u_X)$ получается путем дифференцирования выражения (6)

$$\begin{aligned} f(u_X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left\{-\frac{\left(x_c - \frac{L_c}{2} - \frac{a}{2} + u_X\right)^2}{2\sigma_x^2}\right\} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left\{-\frac{\left(x_c + \frac{L_c}{2} + \frac{a}{2} - u_X\right)^2}{2\sigma_x^2}\right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

Теперь полученное выражение для функции плотности $f(u_X)$ необходимо подставить в интеграл третьего слагаемого (4). Далее необходимо разбить подынтегральную функцию на две составляющие в соответствии с (7), и для первой из них записываем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_0^{L_c} (1 - \exp(-\lambda_{БЭ} u_X B_c)) \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_X^2}\left(x_c - \frac{L_c}{2} - \frac{a}{2} + u_X\right)^2\right\} du_X = \\ & = \left[\Phi\left(\frac{1}{\sigma_X}\left(x_c + \frac{L_c}{2} - \frac{a}{2}\right)\right) - \Phi\left(\frac{1}{\sigma_X}\left(x_c - \frac{L_c}{2} - \frac{a}{2}\right)\right) \right] - \\ & - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_0^{L_c} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{u_X^2}{\sigma_X^2} + 2\left(\frac{d_X}{\sigma_X^2} - \lambda_{БЭ} B_c\right)u_X + \frac{d_X^2}{\sigma_X^2}\right)\right\} du_X, \end{aligned}$$

где $d_X = x_c - \frac{L_c}{2} - \frac{a}{2}$. Интеграл в последнем выражении может быть определен с использованием следующего табличного интеграла [2]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left[-\frac{1}{2}(Ax^2 \pm 2Bx + C)\right] dx = \\ & = \frac{1}{\sqrt{A}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(C - \frac{B^2}{A}\right)\right] \times \\ & \times \left[\Phi\left(\frac{Ab \pm B}{\sqrt{A}}\right) - \Phi\left(\frac{Aa \pm B}{\sqrt{A}}\right) \right]. \quad (8) \end{aligned}$$

В нашем случае $A = \frac{1}{\sigma_X^2}$, $B = \frac{d_X}{\sigma_X^2} - \lambda_{БЭ} B_c$,

$$C = \frac{d_X^2}{\sigma_X^2}.$$

Для второго слагаемого функции плотности $f(u_X)$ выражение для интеграла составляющей риска получается таким же образом.

Аналогично определяется интеграл, входящий во второе слагаемое риска поражения судна (4) (содержит функцию плотности $f(u_Z)$).

Последний интеграл в выражении для риска поражения судна (4)

$$\int_0^{L_c} \int_0^{B_c} (1 - e^{-\lambda_{БЭ} u_X u_Z}) f(u_X) f(u_Z) du_X du_Z$$

можно определить следующим образом. Представим двойной интеграл в виде кратного интеграла

$$\int_0^{B_c} \left[\int_0^{L_c} (1 - e^{-\lambda_{БЭ} u_X u_Z}) f(u_X) du_X \right] f(u_Z) du_Z.$$

Для внутреннего интеграла строится аналитическое выражение с использованием аналитических преобразований и табличного интеграла (8). В итоге двойной интеграл сводится к одномерному интегралу, который может быть определен численно. С этой целью может быть использован пакет математических вычислений MathCAD. Определив все составляющие (4), в итоге можно получить R_c .

В процессе дальнейшей разработки оперативно-тактического ракетного комплекса появляется конструктивно-компоновочная схема КБЧ, а вместе с ней детально прорабатывается схема метания БЭ и определяются номинальные точки падения БЭ, а также их индивидуальные рассеивания. БЭ метаются таким образом, чтобы при отсутствии возмущений (в номинале) они равномерным образом располагались на нескольких concentрических окружностях (зависит от количества ярусов отсека боевого оснащения). При этом количество окружностей метания, радиусы каждой из них, а также количество БЭ на каждой из них известны. Геометрическая модель для трех окружностей метания БЭ показана на рис. 2.

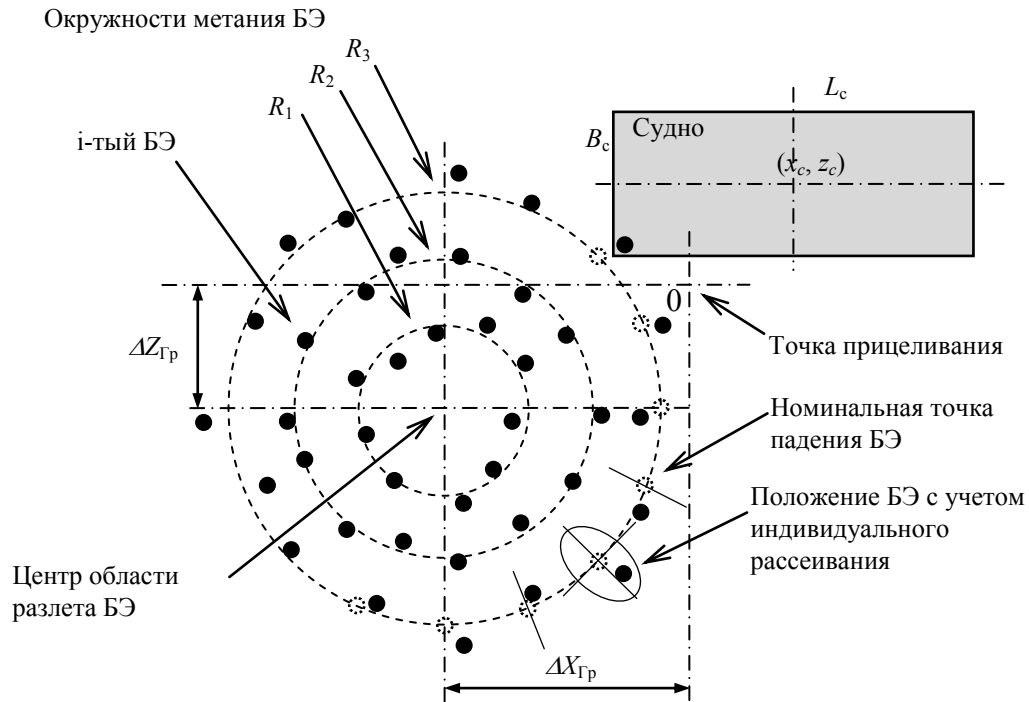


Рис. 2. Геометрическая модель оценки безопасности в районе падения БЭ для известной схемы метания: $\Delta X_{Гр}$, $\Delta Z_{Гр}$ – групповое отклонение от точки прицеливания

Вероятность того, что хотя бы один из БЭ (эквивалент БЭ) попадет в судно, в этом случае можно определить следующим образом:

$$R_c = 1 - \prod_{i=1}^{N_{БЭ}} (1 - R_{БЭ_i}(x_c, z_c)), \quad (9)$$

где $R_{БЭ_i}(x_c, z_c)$ – вероятность попадания i -того БЭ в судно, центр которого расположен в точке (x_c, z_c) .

Определим $R_{БЭ_i}(x_c, z_c)$. Угловое положение каждого БЭ по отношению к плоскости стрельбы, учитывая равномерное расположение БЭ на каждой из окружностей метания, определяется следующим образом:

$$\alpha_i = \alpha_0 + \frac{2\pi}{N_k} (i - 1), \quad (10)$$

где α_0 – начальный угол расположения БЭ по отношению к плоскости стрельбы, который определяется конструктивно-компоновочной схемой КБЧ; N_k – количество БЭ на рассматриваемой (в данном случае k -той) окружности метания.

По известным значениям количества БЭ на окружности и радиусу метания номи-

нальные точки падения БЭ относительно центра области рассеивания для каждой окружности метания определяются как

$$\begin{aligned} X_i &= R_k \cos \alpha_i; \\ Z_i &= R_k \sin \alpha_i \text{ для } i = \overline{1, N_k}, \end{aligned} \quad (11)$$

где R_k – радиус k -той окружности метания.

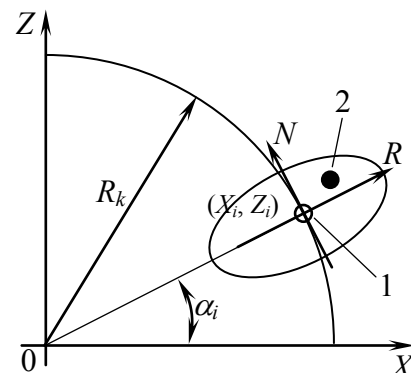


Рис. 3. Индивидуальное рассеивание i -того БЭ: 1 – точка падения для номинальных условий; 2 – реальное расположение БЭ

Для того чтобы определить вероятность попадания хотя бы одного БЭ в судно, необходимо для каждого БЭ построить закон

распределения точек падения. С этой целью необходимо произвести композицию двух нормальных законов на плоскости, определяемых групповым и индивидуальным рассеиваниями, каждое из которых задано в своей системе координат, т. е. имеет свои главные оси рассеивания. Групповое рассеивание задается в системе координат X0Z с центром в точке прицеливания (0,0), а индивидуальное рассеивание (рис. 3) – в системе координат, связанной с номинальной точкой падения БЭ (X_i, Z_i) и повернутой на угол α_i по отношению к оси OX (R и N – оси в радиальном и касательном направлениях). Для индивидуального рассеивания при переходе к системе координат X0Z имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{X_{инд_i}}^2 &= (\sigma_{R_i}^{(инд)})^2 \cos^2 \alpha_i + (\sigma_{N_i}^{(инд)})^2 \sin^2 \alpha_i; \\ \sigma_{Z_{инд_i}}^2 &= (\sigma_{R_i}^{(инд)})^2 \sin^2 \alpha_i + (\sigma_{N_i}^{(инд)})^2 \cos^2 \alpha_i, \end{aligned}$$

где $\sigma_{R_i}^{(инд)}$, $\sigma_{N_i}^{(инд)}$ – средние квадратические отклонения в радиальном и касательном направлениях, характеризующие индивидуальное рассеивание i -того БЭ.

Случайные величины $X_{инд_i}$ и $Z_{инд_i}$ с центром (X_i, Z_i) являются коррелированными, и коэффициент линейной корреляции между ними определяется следующим образом:

$$\rho_{X_{инд_i}, Z_{инд_i}} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha_i (\sigma_{X_{инд_i}}^2 - \sigma_{Z_{инд_i}}^2)}{2\sigma_{X_{инд_i}} \sigma_{Z_{инд_i}}}.$$

Средние квадратические отклонения, характеризующие суммарное рассеивание точек падения БЭ в продольном и боковом направлениях для каждого БЭ, а также коэффициент линейной корреляции между ними определяются как

$$\begin{aligned} \sigma_{X_{\Sigma_i}} &= \sqrt{\sigma_X^2 + (\sigma_{X_i}^{(инд)})^2}; \\ \sigma_{Z_{\Sigma_i}} &= \sqrt{\sigma_Z^2 + (\sigma_{Z_i}^{(инд)})^2}; \\ \rho_{X_{\Sigma_i}, Z_{\Sigma_i}} &= \frac{\rho_{X_{инд_i}, Z_{инд_i}} \sigma_{X_{инд_i}} \sigma_{Z_{инд_i}}}{\sigma_{X_{\Sigma_i}} \sigma_{Z_{\Sigma_i}}}. \end{aligned} \quad (12)$$

В итоге вероятность $R_{БЭ_i}(x_c, z_c)$ можно определить путем интегрирования

$$R_{БЭ_i}(x_c, z_c) = \int_{x_c - \frac{L_c}{2}}^{x_c + \frac{L_c}{2}} \int_{z_c - \frac{B_c}{2}}^{z_c + \frac{B_c}{2}} f(x, z; \bar{\theta}) dx dz, \quad (13)$$

где $f(x, z; \bar{\theta})$ – плотность двумерного нормального распределения; $\bar{\theta} = \{X_i, Z_i, \sigma_{X_{\Sigma_i}}, \sigma_{Z_{\Sigma_i}}, \rho_{X_{\Sigma_i}, Z_{\Sigma_i}}\}$ – вектор параметров двумерного нормального распределения, определяемых согласно (11) и (12).

Определение двойного интеграла (13) для каждого БЭ можно провести с использованием пакета математических вычислений MathCAD. В итоге согласно (9) определяется риск поражения для судна при летных испытаниях ТР (ОТР) с КБЧ.

Таким образом, в статье разработаны две математические модели, которые позволяют определить риски поражения судов при проведении летных испытаний ТР (ОТР) с кассетным боевым оснащением при пусках по морю.

Список использованной литературы

1. Балаганский И. А., Мержиевский Л. А. Действие средств поражения и боеприпасов: учеб. Новосибирск, 2004. 408 с.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963. 1100 с.

Статья поступила 09.04.2019