УДК 539.3 https://doi.org/10.33136/stma2019.02.050

П. Г. Капля

О КРИТИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЯХ ПРОДОЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК. ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Благодаря применению динамического подхода к решению уточненных уравнений равновесия, введению в систему уравнений коэффициентов добротности элементов конструкции Q, определению и применению в расчете сил и моментов, действующих в сечениях оболочки поверхностей совместного изгиба обшивки и элементов подкрепления, получены новые теоретические результаты определения напряжений продольной устойчивости подкрепленных цилиндрических оболочек как с внутренним, так и с внешним расположением подкрепляющего набора. Приведены выражения, по которым можно определить сам процесс потери устойчивости, включая параметры волнообразования и амплитуду колебаний оболочки с момента приложения осевой сжимающей силы P_0 до момента хлопка. При динамическом подходе к решению задачи продольной устойчивости оболочки фактом потери устойчивости при воздействии сжимающей осевой силы P_0 является достижение первого нулевого значения частоты одной из высших форм изгибных колебаний оболочки. Этот процесс наиболее нагляден во время испытаний абсолютно гибких оболочек, допускающих многократное нагружение. На начальном этапе нагружения оболочки осевой сжимающей силой P_0 появляются высокочастотные изгибные колебания с формами m, n >> 1 и малыми амплитудами. С ростом силы P_0 частота колебаний начинает падать, а амплитуда расти, при этом форма колебаний не изменяется. При первом достижении одной из форм колебаний нулевой частоты происходит хлопок. Этот факт позволил сформулировать основные принципы неразрушающего метода оценки критических напряжений устойчивости готовой оболочки, суть которого заключается в сравнении теоретической кривой падения частоты из-за воздействия на конструкцию силы P_0 с фактической кривой падения частоты готовой конструкции под воздействием на нее тех же значений P_0 в области упругих деформаций.

Ключевые слова: устойчивость оболочек, динамическая задача, неразрушающий метод испытаний.

Завдяки застосуванню динамічного підходу до розв'язання уточнених рівнянь рівноваги, введенню у систему рівнянь коефіцієнтів добротності елементів конструкції Q, визначенню та застосуванню в розрахунках сил і моментів, що діють у перерізах оболонки поверхонь спільного згину обшивки й елементів підкріплення, отримано нові теоретичні результати для визначення напруг поздовжньої стійкості підкріплених циліндричних оболонок як із внутрішнім, так і з зовнішнім розміщенням підкріплювального набору. Наведено вирази, за якими можна визначити сам процес втрати стійкості, включаючи параметри хвилеутворення й амплітуду коливань оболонки від моменту прикладення осьової стискної сили P_0 до моменту хлопка. Використовуючи динамічний підхід до розв'язання задачі поздовжньої стійкості оболонки, фактом втрати стійкості під час впливу стискної осьової сили P_0 є досягнення першого нульового значення частоти однією з вищих форм згинальних коливань оболонки. Цей процес найбільш наочний під час випробувань абсолютно гнучких оболонок, що допускають багаторазове навантаження. На початковому етапі навантаження оболонки осьовою стискною силою P_0 з'являються високочастотні згинальні коливання з формами m, n >> 1 і малими амплітудами. Зі зростанням сили P_0 частота коливань починає знижуватися, а амплітуда зростати, при цьому форма коливань не змінюється. Після першого досягнення однією з форм коливань нульової частоти відбувається хлопок. Цей факт дозволив сформулювати основні принципи неруйнівного методу оцінювання критичних напруг стійкості готової оболонки, зміст якого полягає в порівнянні теоретичної кривої падіння частоти через вплив на конструкцію сили P_0 з фактичною кривою падіння частоти готової конструкції під впливом на неї тих же значень P_0 в області пружних деформацій.

Ключові слова: стійкість оболонок, динамічна задача, неруйнівний метод випробувань.

New theoretical results were obtained in definition of the stability longitudinal stress of the stiffened cylindrical shells both with internal and external arrangement of the stiffened stacks. They were obtained due to application of the dynamic approach to the solution of the refined equilibrium equations, introduction of the Q-factor of the structural elements into the system of equations, definition and application of the forces and moments in the calculation, that act in the sections of the joint bending of the shell and elements of stiffening. Expressions are given, which define the process of stability loss, including parameters of wave generation and amplitude of shell oscillation from the moment of application of the axial compressive force P_0 up to the moment of snap action. With dynamic approach to the solution of the problem of the shell's longitudinal stability the achievement of the first zero frequency by one of the higher modes of bending oscillations of the shell will indicate the loss of stability under the impact of the axial compressive force P_0. This process is most *obvious during testing of the absolutely flexible shells, which permit multiple loading. In the initial step of shell loading with axial compressive force P_0, high-frequency bending oscillations with m, n >> 1 modes and low amplitudes occur. With a rise in force P_0 oscillation frequency begins to drop, and amplitude to increase, with oscillatory mode remaining unchanged. There is a snap action when zero frequency is achieved for the first time by one of the oscillatory modes. This fact allowed formulation of the basic principles of nondestructive method for estimation of the critical stability stress of the flight-ready shell, main point of which is in the comparison of the theoretical curve of the frequency drop due to force P_0 action on the structure versus the actual curve of the frequency drop of the flight-ready structure under the impact of the same values of P_0 in the elastic range.*

Keywords*:* shell rigidity, dynamical problem, nondestructive testing.

Введение

Применение динамического подхода к решению задачи продольной устойчивости гладких цилиндрических оболочек [1], уточнение общепринятой системы уравнений равновесия и введение в систему уравнений коэффициента добротности Q позволили объяснить весь представленный экспериментальный материал и сам процесс потери устойчивости, включая параметры волнообразования и амплитуды колебаний оболочки с момента приложения осевой сжимающей силы до момента хлопка.

В настоящей работе динамический подход применен к решению задачи продольной устойчивости подкрепленных цилиндрических оболочек.

Система уравнений

Обратимся к уточненной системе уравнений равновесия нагруженной осевыми сжимающими силами P_0 цилиндрической оболочки, полученной в [1] при $q_x = 0, q_y = 0$:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial P_1}{\partial x} = 0; \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} = 0;$$
$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} - (P_1 + P_2)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \quad (1)$$
$$+ \frac{N_2}{R} + q_z = 0.$$

Для описания подкрепленной оболочки воспользуемся подходом, рассмотренным в [2]. Рассмотрим оболочку с ребрами, расположенными вдоль линий главных кривизн. Введем три поверхности и соответствующие им три системы координат, смещенные относительно срединной поверхности обшивки по координате Z. Срединную поверхность обшивки свяжем с системой координат X, Y, Z, поверхность изгиба в меридиональной плоскости – с X_1, Y_1, Z_1, поверхность изгиба в радиальной плоскости – с X_2, Y_2, Z_2. Текущее расстояние между срединной поверхностью и поверхностями изгиба в сечениях d_x и d_y обозначим соответственно через $Z_x = f(x), Z_y = f(y)$.

Поскольку Z_x, Z_y<< R, связь между координатными системами можно записать в виде

$$X_1 \approx X_2 = X;\ Y_1 \approx Y_2 = Y;$$
$$Z_1 = Z - Z_x;\ Z_2 = Z - Z_y. \quad (2)$$

Кроме этого, имеем

$$\alpha_1^1 \approx \alpha_1^2 = \alpha_2;\ \alpha_2^1 \approx \alpha_2^2 = \alpha_2;$$
$$\chi^1 = \chi^2 = \chi, \quad (3)$$

где α_1, α_2, χ – параметры кривизны срединной поверхности обшивки.

Дополнительно примем, что подкрепляющий набор находится в одноосном напряженном состоянии, не оказывает влияния на сдвиг и кручение обшивки и может быть описан функцией $h(x, y)$ таким образом, что толщина оболочки в целом может быть представлена как

$$h_{обол} = h \pm \sum_{i=1}^{N} h(x_i) \pm \sum_{j=1}^{M} h(y_j), \quad (4)$$

где h – толщина обшивки; $h(x_i), h(y_j)$ – фокусирующие функции, описывающие элементы подкрепления.

Используя теперь (2)-(4), зависимости линейной теории оболочек Доннела-Власова для обшивки, формулы сопротивления материалов для ребер [3, 4] и тот факт, что поворот любого сечения оболочки может быть совершен только относительно соответствующей поверхности изгиба, получаем следующий вид зависимостей для сил и моментов, действующих в сечениях dx и dy оболочки, выраженных в системе координат X,Y,Z:

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2}[(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) -$$

$$-(\alpha_1 Z_y + \mu\alpha_2 Z_x)] + \sum_{(j=1)}^{M} E_{c_j}[\varepsilon_1 h(y_j) -$$

$$-\alpha_1(Z_y h(y_j) - \frac{1}{2}(hh(y_j) + h^2(y_j)))]; \qquad (5)$$

$$M_1 = D(\alpha_1 + \mu\alpha_2) - \frac{Eh}{(1-\mu^2)}[(\varepsilon_1 Z_y + \mu\varepsilon_2 Z_x) -$$

$$-(\alpha_1 Z_y^2 + \mu\alpha_2 Z_x^2)] + \sum\nolimits_{(j=1)}^{M} E_j[\varepsilon_1(\frac{1}{2}(hh(y_j) +$$

$$+h^2(y_j) - Z_y h(y_j)) + \alpha_1(\frac{1}{3}(\frac{3}{4}h^2 h(y_j) +$$

$$+\frac{3}{2}hh^2(y_j) + h^3(y_j)) - Z_y(hh(y_j) + h^2(y_j) -$$

$$-Z_y^2 h(y_j)))]$$

и т.д.

Таким образом, введение функции $h(x_i), h(y_j)$ позволило свести задачу устойчивости дискретно подкрепленной оболочки к задаче устойчивости оболочки переменной толщины. При желании для $h(x_i), h(y_j)$ можно найти подходящие функции, которые позволили бы описать элементы подкрепления по их основным характеристикам. Однако в силу многообразия методов крепления ребер к обшивке представляется целесообразным проинтегрировать выражения (5) в переделах зоны контакта ребра, получить интегральные значения сил и моментов и ввести функции вероятностного распределения усилий по поверхности контакта $W(x_i), W(y_j)$.

В качестве функции $W(x_i), W(y_j)$ примем три члена одномерного ряда Эджворта [5]

$$W_1(\xi) = W(\xi)[1 + \sum\nolimits_{(n=3)}^{4} \frac{1}{n!}\frac{b_n}{\sigma^n} H_n(\frac{\xi - m}{\sigma^n})], \quad (6)$$

где $W(\xi)$ – нормальная плотность вероятности; b_n/σ^n – коэффициенты ряда, получившие в литературе наименование коэффициентов асимметрии v_1 и эксцесса v_2; m – координата средней точки зоны контакта ребра; $m = x_i y_j, i = 1,2...N, j = 1,2...M$; σ с вероятностью 0,997 – мера ширины зоны контакта ребра с обшивкой.

Использование для $W(x_i)$, $W(y_j)$ ряда Эджворта оптимально потому, что, меняя параметры v_1, v_2, можно добиться распределения усилий различного характера в зоне контакта: от близких к δ-функции до нормального или равномерного со сдвигом максимума функции вправо или влево.

Практика показывает, что потеря устойчивости цилиндрических оболочек происходит при положительном суммарном значении прогиба W [4], откуда следует, что в процессе нагружения оболочки силой P_0 и при потере устойчивости ε_2 близко или равно нулю, т.е.

$$\frac{dv}{dy} - \frac{W}{R} = 0. \qquad (7)$$

После интегрирования (5) в зоне контакта с учетом (7) и ввода функции (6) получаем следующие упрощенные выражения для сил и моментов ребристой оболочки, действующих в сечениях dx, dy:

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2}[\varepsilon_1 - (\alpha_1 z_y + \mu\alpha_2 Z_x)] +$$

$$+\sum\nolimits_{(j=1)}^{M} E_{c_j}[\varepsilon_1 F_{c_j} + \alpha_1(S_{c_j} - Z_y F_{c_j})]W(y_j);$$

$$N_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2}[\mu\varepsilon_1 - (\alpha_2 Z_x + \mu\alpha_1 Z_y)] +$$

$$+\sum\nolimits_{(j=1)}^{N} E_{ш_i}[\alpha_2(S_{ш_i} - Z_x F_{ш_i})]W(x_i);$$

$$M_1 = D(\alpha_1 + \mu\alpha_2) - \frac{Eh}{1-\mu^2}[(\varepsilon_1 Z_y) -$$

$$-(\alpha_1 Z_y^2 + \mu\alpha_2 Z_x^2)] + \sum\nolimits_{(j=1)}^{M} E_{c_j}[\varepsilon_1(S_{c_j} -$$

$$-Z_y F_{c_j}) + \alpha_1(I_{c_j} - 2Z_y S_{c_j} + Z_y^2 F_{c_j})]W(y_j);$$

$$M_2 = D(\alpha_2 + \mu\alpha_1) - \frac{Eh}{1-\mu^2}[\mu\varepsilon_1 Z_y -$$

$$-(\mu Z_y^2\alpha_1 + Z_x^2\alpha_2)] + \sum_{(i=1)}^{N} E_{ш_i}\alpha_2(I_{ш_i} -$$

$$-2Z_x S_{ш_i} + Z_x^2 F_{ш_i})W(x_i); \qquad (8)$$

$$H_{12} = H_{21} = H = (1-\mu)D\chi -$$

$$-\frac{Eh}{2(1+\mu)}[\frac{1}{2}\gamma(Z_x + Z_y) - \chi(Z_x^2 + Z_y^2)];$$

$$T_{12} = T_{21} = T = \frac{Eh}{2(1+\mu)}(\gamma - \chi(Z_x + Z_y)).$$

Приведенным в (8) выражениям сил и моментов соответствует следующая система дифференциальных уравнений в перемещениях согласно (1):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1+K_c^0) + \frac{1-\mu}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}) -$$

$$-K_c^1\frac{\partial^2 w}{\partial x^3} + K_1\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial P_1}{\partial x}\frac{1-\mu^2}{Eh} = 0;$$

$$\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - K_ш^1\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} +$$

$$+K_2\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0; \qquad (9)$$

$$\frac{h^2}{12}\nabla_k^4 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^3}K_c^1 + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}K_2 + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}K_4 -$$

$$-\mu\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}K_ш^1 - \frac{1}{R}\mu Z_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-\mu^2}{Eh}\times$$

$$\times(P_1 + P_2)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-\mu^2}{Eh}[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\frac{\rho h}{g} +$$

$$+\sum_{(j=1)}^{M}\frac{\rho_j}{g}F_{c_j}W(y_j)) + \sum_{(i=1)}^{N}\frac{\rho_j}{g}F_{ш_i}W(x_i)] = 0.$$

Уравнения (9) с учетом (7) содержат шесть неизвестных функций U,V,W,Z_x,Z_y,P_0 и должны быть дополнены еще двумя уравнениями. По определению поверхностью изгиба является поверхность, в которой обращаются в нуль нормальные составляющие напряжений, вызванные изгибом. Приравняв в N_1 и N_2 (8) переменные составляющие к нулю, имеем

$$\frac{Eh}{1-\mu^2}(Z_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu Z_x\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) -$$

$$-\sum_{j=1}^{M}E_{c_j}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(S_{c_j} - Z_y F_{c_j})W(y_j) = 0; \qquad (10)$$

$$\frac{Eh}{1-\mu^2}(\mu Z_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Z_x\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) -$$

$$-\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(S_{ш_i} - Z_x F_{ш_i})W(x_i) = 0.$$

Присоединяя (10) к (9), получаем полную систему уравнений для определения неизвестных. В уравнениях (9) и (10) приняты следующие обозначения: E,h,ρ – модуль упругости, толщина и плотность материала обшивки; ρ_i,ρ_j – плотности шпангоута и стрингера; g – ускорение свободного падения; $F_{c_j},S_{c_j},I_{c_j},F_{ш_i},S_{ш_i},I_{ш_i}$ – площади поперечного сечения, статические моменты и моменты инерции стрингеров и шпангоутов относительно системы $\mathrm{X,Y,Z}$.

$$K_c^0 = \frac{1-\mu^2}{Eh}\sum_{j=1}^{M}E_{c_j}F_{c_j}W(y_j);$$

$$K_c^1 = [\frac{1-\mu^2}{Eh}\sum_{j=1}^{M}E_{c_j}(S_{c_j} -$$

$$-Z_y F_{c_j})W(y_j) - Z_y];$$

$$K_1 = (\frac{1+\mu}{2}Z_x + \frac{1-\mu}{2}Z_y);$$

$$P_1 = P_0(hQ + \sum_{j=1}^{M}Q_j F_{c_j}\times$$

$$\times W(y_j))(\cos\frac{\pi x}{L} + \cos\frac{\mu\pi x}{L})\sin\frac{\pi y}{R};$$

$$K_ш^1 = [\frac{1-\mu^2}{Eh}\sum_{i=1}^{N}E_{ш_i}(S_{ш_i} - Z_x F_{ш_i})W(x_i) - Z_x];$$

$$K_2 = (\frac{1+\mu}{2}Z_y + \frac{1-\mu}{2}Z_x); \qquad (11)$$

$$\nabla_K^4 = [\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(1+K_c^3) + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}(1+K_3) +$$

$$+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}(1+K_ш^3)];$$

$$K_c^3 = [\frac{1}{D}\sum_{j=1}^{M}E_{c_j}(I_{c_j} - 2Z_y S_{c_j} +$$

$$+Z_y^2 F_{c_j})W(y_j) + \frac{12}{h^2 Z_y^2};$$

$$K_{ш}^{3}=[\frac{1}{D}\sum\nolimits_{j=1}^{N}E_{ш_i}(I_{ш_i}-2Z_xS_{ш_i}+$$

$$+Z^2x_iF_{ш_i})W(x_i)+\frac{12}{h^2}Z_x^2];$$

$$K_3=(\frac{6}{h^2}(Z_x^2+Z_y^2));$$

$$K_4=(\frac{1-\mu}{2}(Z_x+Z_y));$$

$$P_2=[P_0(h+\sum\nolimits_{j=1}^{M}F_{c_j}W(y_j))];$$

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)},$$

где Q – коэффициент добротности обшивки; Q_j – коэффициент добротности стрингера.

Продольная устойчивость шарнирно-опертых подкрепленных оболочек

Как следует из [1], при динамическом подходе к решению задачи продольной устойчивости оболочки фактом потери устойчивости при воздействии на нее осевой сжимающей силы P_0 является достижение первого нулевого значения частоты одной из высших форм изгибных колебаний оболочки. Наиболее нагляден этот процесс при испытаниях абсолютно гибких оболочек, допускающих многократное нагружение. На начальном этапе нагружения оболочки осевой сжимающей силой P_0 появляются высокочастотные изгибные колебания с формами m, n >> 1 и малыми амплитудами. С ростом силы P_0 частота колебаний начинает падать, а амплитуда расти. Форма колебаний не изменяется. При первом достижении одной из форм колебаний нулевой частоты появляется хлопок», и чем точнее методика расчета высших частот изгибных колебаний оболочки, тем точнее будет значение критической силы осевого сжатия. Как показано в [2], точность расчета собственных частот изгибных колебаний подкрепленных оболочек определяется с учетом трех факторов: дискретности, эксцентричности ребер, а также положения поверхности, относительно которой происходит совместный изгиб обшивки и ребер. Для цилиндрических оболочек с внутренним расположением ребер [2] значения Z_x, Z_y, Zx_i, Zx_j, определяющие положение поверхности изгиба обшивки и ребер в системе координат Z,Y,X, лежат в пределах толщины обшивки, слабо влияют на значения частот изгибных колебаний и могут быть приняты равными нулю, т.е.

$$Z_x=Z_y=Zx_i=Zy_j=0. \qquad (12)$$

Для оболочки с внешним расположением ребер [2]

$$Zx_B=Zy_B=0;\ Zx_{iB}=-\frac{S_{ш_i}}{F_{ш_i}};$$
$$Zy_{jB}=-\frac{S_{c_j}}{F_{c_j}}. \qquad (13)$$

Продольная устойчивость оболочек с внутренним расположением подкрепляющего набора

Для оболочки с внутренним расположением подкрепляющего набора с учетом (11) и (12) имеем

$$Z_x=Z_y=Zx_i=Zy_i=0;$$

$$\overline{K}_c^1=\frac{1-\mu^2}{Eh}\sum\nolimits_{j=1}^{M}E_{c_j}S_jW(y_j);$$

$$K_1=0; K_2=0; K_3=0; K_4=0;$$

$$\overline{K}_ш^1=\frac{1-\mu^2}{Eh}\sum\nolimits_{j=1}^{M}E_{ш_i}S_{ш_i}W(x_i); \qquad (14)$$

$$\overline{K}_c^3=\frac{1}{D}\sum\nolimits_{j=1}^{M}E_{c_j}I_{c_j}W(y_j);$$

$$\overline{K}_ш^3=\frac{1}{D}\sum\nolimits_{i=1}^{N}E_{ш_i}I_{ш_i}W(x_i).$$

Система уравнений (9) с учетом (14) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}(1+K_c^0)+\frac{1-\mu}{2}(\frac{\partial^2u}{\partial y^2})+\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y})-$$
$$-\overline{K}_c^1\frac{\partial^3w}{\partial x^3}-\frac{\partial P_1}{\partial x}\frac{1-\mu^2}{Eh}=0;$$
$$\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2v}{\partial x^2}-\overline{K}_ш^1\frac{\partial^3w}{\partial y^3}=0; \qquad (15)$$
$$\frac{h^2}{12}\nabla_K^4-\frac{\partial^3u}{\partial x^3}\overline{K}_c^1-\mu\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\overline{K}_ш^1+$$
$$+\frac{1-\mu^2}{Eh}[P_1+P_2]\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+qz=0,$$

где $\nabla_K^4 = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(1+\overline{K}_c^3) + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 dy^2}\times$

$$\times(1+K_3) + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}(1+\overline{K}_ш^3);$$

$$qz = \frac{1-\mu^2}{Eh}[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}[\frac{\rho}{gh}+$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\frac{\rho_j}{g}F_{c_j}W(y_j) + \sum_{i=1}^{N}\frac{\rho i}{g}F_{ш_i}W(x_i)]].$$

Решение

Для описания перемещений подкрепленной оболочки U,V,W и P_1, P_2 примем следующие выражения, удовлетворяющие шарнирному опиранию:

$$U = A_{mn}(\cos\frac{\pi x}{L} + \cos\frac{m\pi x}{L})\sin\frac{ny}{R}\cos w_k t;$$

$$V = B_{mn}(\sin\frac{\pi x}{L} + \sin\frac{m\pi x}{L})\cos\frac{ny}{R}\cos w_k t;$$

$$W = C_{mn}(\sin\frac{\pi x}{L} + \sin\frac{m\pi x}{L})\sin\frac{ny}{R}\cos w_k t;$$

$$P_1 = P_0(hQ + \sum_{j=1}^{M} Q_j F_{c_j} W(y_j))\times \quad (16)$$

$$\times(\cos\frac{\pi x}{t} + \cos m\frac{m\pi x}{L})\sin\frac{ny}{R};$$

$$P_2 = P_0(h + \sum_{j=1}^{M} F_{c_j} W(y_j)),$$

где Q, Q_i – параметры добротности обшивки и продольного подкрепляющего набора.

В качестве функций $W(x_i), W(y_j)$ примем первый член одномерного ряда Эджворта, соответствующий нормальному закону распределения [5]:

$$W(\xi_k) = \sum_{K=1}^{P}\frac{1}{\sigma_k\sqrt{2\pi}}\exp\frac{(\xi-\xi_k)^2}{2\sigma_k^2}.$$

Если A_{c_j}, $A_{ш_i}$ – ширина зоны контакта ребра с обшивкой, то $\sigma_k = \frac{1}{6}(A_{c_j}, A_{ш_i})$. При этом $\int_{-A/2}^{A/2} W(\xi_k)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} W(\xi_k)d\xi = 1$, а поскольку полуволна изгибных колебаний больше A_i, A_j, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(\xi_k) f(\sin\xi^2, \cos^2\xi)d\xi = \\ = f(\sin^2\xi_k, \cos^2\xi_k). \quad (17)$$

Подставляя (16) в (15), применяя к решению системы (15) метод взвешенных среднеквадратических ошибок [1] и пренебрегая на этапе интегрирования произведениями ортогональных функций, приходим, с учетом (17), к следующей системе уравнений для определения $P_{0кр}$ и параметров волнообразования при задаваемых m, n, Q, Q_j:

$$A_{mn}[(\overline{\lambda}^2 + \lambda^2)(1+\overline{K}_c^0) + (1-\mu)n^2] +$$
$$+B_{mn}\frac{1-\mu}{2}n(\overline{\lambda}+\lambda) - C_{mn}\frac{1}{R}\overline{\overline{K}}_c^1(\overline{\lambda}^3 +$$
$$+\lambda^3) - \frac{1-\mu}{Eh})R(\overline{\lambda}+\lambda)P_0(Qh +$$
$$+\frac{1}{\pi R}\sum_{j=1}^{M} Q_j F_{cj} d_j) = 0;$$
$$A_{mn}(1+\mu)(\overline{\lambda}+\lambda)n + B_{mn}(1-$$
$$-\mu)(\overline{\lambda}^2+\lambda^2) - 2C_{mn}\frac{1}{R}n^3\overline{\overline{K}}_ш^1 = 0; \quad (18)$$
$$A_{mn}(-\frac{1}{R}(\overline{\lambda}^3+\lambda^3)\overline{\overline{K}}_c^1 + \mu(\overline{\lambda}+\lambda)) +$$
$$+C_{mn}[\sigma^2[(\overline{\lambda}^4+\lambda^4)(1+\overline{\overline{K}}_c^3) + \frac{1}{2}(\overline{\lambda}^2 +$$
$$+\lambda^2)n^2 + n^4(2+\overline{\overline{K}}_ш^3)] - \frac{2}{R}n^2\overline{\overline{K}}_ш^1 -$$
$$-\frac{1-\mu^2}{Eh}P_0(\overline{\lambda}^2+\lambda^2)(h(1+0{,}187Q) +$$
$$+\frac{1}{\pi R}\sum_{j=1}^{M} F_{c_j}(d_j + 0{,}25Q_j d_j^2)) -$$
$$-2\frac{1-\mu^2}{Eh}\omega_{mn}^2 R^2[\frac{\rho h}{g} + \frac{1}{2\pi R}\sum_{j=1}^{M}\frac{\rho_j}{g}F_{c_j}d_j +$$
$$+\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{N}\frac{\rho_i}{g}F_{ш_i}d_i] = 0.$$

Подставляя в первые два уравнения системы (18) $B_{mn} = -\frac{C_{mn}}{n}$, получаем следующие выражения для определения $P_{кр}$, $\omega_{mn}^2 = f(P_0)$ и коэффициентов A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} при задаваемых m, n, Q, Q_j для оболочек с внутренним расположением подкрепляющего набора:

$$P_{0кр} = \frac{a_{31}(a_{22}+a_{23})/a_{21}+a_{33}}{a_{34}}; \qquad (19)$$

$$\omega_{mn}^2 = \frac{a_{31}(a_{22}+a_{23})/a_{21}+a_{33}-a_{34}P_0}{a_{35}}; \qquad (20)$$

$$A_{mn} = C_{mn}\frac{a_{22}+a_{33}}{a_{21}}; B_{mn} - \frac{C_{mn}}{n};$$

$$C_{mn} = \frac{a_{14}\rho_0}{a_{11}(a_{22}+a_{33})/a_{21}-a_{12}-a_{13}},$$

где $a_{11} = [(\bar{\lambda}^2+\lambda^2)(1+\bar{K}_c^0)+(1-\mu)n^2]$;

$$a_{12} = (1-\mu)(\bar{\lambda}+\lambda)/2;$$

$$a_{13} = \frac{1}{R}\bar{\bar{K}}_c^1(\bar{\lambda}^3+\lambda^3);$$

$$a_{14} = \frac{1-\mu^2}{Eh}R(\bar{\lambda}+\lambda)(hQ+\frac{1}{\pi R}\sum Q_j F_{c_j} d_j);$$

$$a_{21} = (1+\mu)(\bar{\lambda}+\lambda)n^2;$$

$$a_{22} = (1-\mu)(\bar{\lambda}^2+\lambda^2);$$

$$a_{23} = 2\frac{1}{R}n^4\bar{\bar{K}}_ш^1;$$

$$a_{31} = (-\frac{1}{R}(\bar{\lambda}^3+\lambda^3)\bar{\bar{K}}_c^1+\mu(\bar{\lambda}+\lambda));$$

$$a_{33} = [\delta^2[(\bar{\lambda}^4+\lambda^4)(1+\bar{\bar{K}}_c^3)+2(\bar{\lambda}^2+ \\ +\lambda^2)n^2+n^4(2+\bar{\bar{K}}_ш^3)]-\frac{2}{R}n^2\bar{\bar{K}}_ш^1];$$

$$a_{34} = \frac{1-\mu^2}{Eh}(\bar{\lambda}^2+\lambda^2)(h(1+0,187Q)+ \\ +\frac{1}{\pi R}/\sum F_{c_j}(d_j+0,25Q_j d_j^2)); \qquad (21)$$

$$a_{35} = 2\frac{1-\mu^2}{Eh}R^2(\frac{\rho h}{g}+\frac{1}{2\pi R}\sum_{j=1}^M \frac{\rho_j}{g}F_{c_j}d_i+ \\ +\frac{1}{L}\sum_{i=1}^N \frac{\rho_i}{g}F_{ш_j}d_i);$$

$$\bar{K}_c^0 = \frac{1-\mu^2}{Eh}\sum_{j=1}^M E_{c_j}F_{c_j}d_j;$$

$$\bar{\bar{K}}_c^1 = \frac{1-\mu^2}{Eh}\frac{1}{\pi R}\sum_{j=1}^M E_{c_j}S_{c_j}d_j;$$

$$\bar{\bar{K}}_c^3 = \frac{1}{D}\frac{1}{\pi R}\sum_{j=1}^M E_{c_j}I_{c_j}d_j;$$

$$\bar{\bar{K}}_ш^1 = \frac{1-\mu^2}{Eh}\frac{2}{L}\sum_{j=1}^N E_{ш_j}S_{ш_j}d_j;$$

$$\bar{\bar{K}}_ш^3 = \frac{1}{D}\frac{2}{L}\sum_{j=1}^N E_{ш_j}I_{ш_j}d_i;$$

$$d_j = \sin^2\frac{ny_j}{R}; d_j^2 = \sin^4\frac{ny_j}{R};$$

$$d_i = (\sin^2\frac{\bar{\lambda}x_i}{R}+\sin^2\frac{\lambda x_i}{R});$$

$$\delta^2 = \frac{h^2}{12R^2}.$$

Продольная устойчивость оболочки с внешним расположением подкрепляющего набора

Для оболочки с внешним расположением подкрепляющего набора с учетом (13) имеем

$$Z_{x_в} = 0; Z_{y_в} = 0; Z_{x_{iв}} = \frac{-S_{ш_i}}{F_{ш_i}}; Z_{y_{jв}} = \frac{-S_{c_j}}{F_{c_j}};$$

$$S_{ш_{iв}} = -S_{ш_i}; S_{c_{jв}} = -S_{c_i};$$

$$K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 0; \qquad (22)$$

$$\bar{\bar{K}}_{c_в}^1 = 0; \bar{\bar{K}}_{ш_в}^1 = 0;$$

$$\bar{\bar{K}}_{c_в}^3 = \frac{1}{D}\frac{1}{\pi R}\sum_{j=1}^M E_{c_j}(I_{c_j}-S_{c_j}^2/F_{c_j})d_j;$$

$$\bar{\bar{K}}_{ш_в}^3 = \frac{1}{D}\frac{2}{L}\sum_{i=1}^N E_{ш_i}(I_{ш_i}-S_{ш_i}^2/F_{ш_i})d_i.$$

Система уравнений (18) с учетом (22) преобразуется к виду

$$\bar{A}_{mn}(\bar{\lambda}^2+\lambda^2)(1+\bar{K}_c^0)+(1-\mu)n^2+ \\ +\bar{B}_{mn}\frac{1-\mu}{2}n(\bar{\lambda}+\lambda)-\frac{1-\mu^2}{Eh}RP_0(\bar{\lambda}+ \\ +\lambda)(hQ+\frac{1}{\pi R}\sum_{j=1}^M Q_j F_{c_j}d_j) = 0;$$

$$\bar{A}_{mn}(1+\mu)(\bar{\lambda}+\lambda)n+\bar{B}_{mn}(1- \\ -\mu)(\bar{\lambda}^2+\lambda^2) = 0;$$

$$\bar{A}_{mn}\mu(\bar{\lambda}+\lambda)+\bar{C}_{mn}[\delta^2[(\bar{\lambda}^4+\lambda^4)(I+ \\ +\bar{K}_{cв}^3)+2(\bar{\lambda}^2+\lambda^2)n^2+n^4(2+\bar{\bar{K}}_{шв}^3)]- \\ -\frac{1-\mu^2}{Eh}P_0(\bar{\lambda}^2+\lambda^2)(h(1+0,187Q)+ \\ +\frac{1}{\pi R}\sum_{j=1}^M F_{c_j}(d_j+0,25Q_j d_j^2)- \\ -2\frac{1-\mu^2}{Eh}\omega_{mn}^2 R^2(\frac{\rho h}{g}+\frac{1}{2\pi R}\sum\frac{\rho_j}{g}F_{c_j}d_j+ \\ +\frac{1}{L}\sum_{i=1}^N\frac{\rho_j}{g}F_{ш_i}d_i)] = 0. \qquad (23)$$

Подставляя в первые два уравнения системы (23) $\overline{B}_{mn} = \frac{-\overline{C}_{mn}}{n}$, приходим к следующим выражениям для определения $\overline{P}_{0кр}, \overline{\omega}^2_{mn} = f(P_0), \overline{A}_{mn}, \overline{B}_{mn}, C_{mn}$ при заданных m, n, Q, Q_j для оболочки с внешним расположением подкрепляющего набора:

$$\overline{P}_{0кр} = \frac{a_{22}\overline{a}_{31} / a_{21} + a_{33}}{a_{34}}; \tag{24}$$

$$\overline{\omega}^2_{mn} = \frac{a_{22}\overline{a}_{31} / a_{21} + a_{33} - a_{34}P_0}{a_{35}}; \tag{25}$$

$$\overline{A}_{mn} = \overline{C}_{mn} a_{22} / a_{21};$$

$$\overline{B}_{mn} = \overline{-C}_{mn} / n;$$

$$\overline{C}_{mn} = \frac{a_{14}P_0}{a_{11}(a_{22} / a_{21}) - a_{12}},$$

где $\overline{a}_{31} = \mu(\overline{\lambda} + \lambda);$

$$\overline{a}_{33} = [\delta^2[(\overline{\lambda}^4 + \lambda^4)(1 + \overline{\overline{K}}^3_{c_в}) + 2(\overline{\lambda}^2 + $$
$$+ \lambda^2)n^2 + n^4(2 + \overline{\overline{K}}^3_{ш_в})]].$$

Значения $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{14}, a_{34}, a_{35}$ соответствуют приведенным в (21), а $\overline{\overline{K}}^3_{c_в}, \overline{\overline{K}}^3_{ш_в}$ – в (22).

Неразрушающий метод экспериментальной оценки несущей способности готовой оболочки

Динамический подход к решению задачи продольной устойчивости оболочки позволяет разработать неразрушающий метод определения критических напряжений продольной устойчивости любого типа оболочек. Для этого необходимо определить значения *m*, *n* (19), (24), которые соответствуют $P_{кр.\min}$, получить теоретическую кривую падения частоты изгибных колебаний $\omega^2_к$ (20), (25) в зависимости от увеличения осевой сжимающей силы P_0 от нулевого значения до $P_{кр.\min}$ (19), (24), затем наложить на эту кривую экспериментальную кривую падения $\omega^2_к$ при воздействии силы P_0 на готовую оболочку в пределах упругих деформаций. Сравнительная оценка полученных кривых позволяет получить оценку действительного значения $P_{кр}$ без разрушения готовой конструкции.

Вывод

Применение уточненных уравнений равновесия и введение в систему уравнений коэффициентов добротности элементов конструкций Q, Q_i позволило получить новые теоретические результаты при расчете продольной устойчивости подкрепленных цилиндрических оболочек, показать сам процесс потери устойчивости и сформулировать основные принципы создания неразрушающего метода экспериментальной оценки продольной устойчивости готовой конструкции.

Список использованной литературы

1. Капля П. Г. К вопросу о критических напряжениях продольной устойчивости гладких цилиндрических оболочек. *Космическая техника. Ракетное вооружение:* сб. науч.-техн. ст. / ГП "КБ "Южное". Днепр, 2017. Вып. 1. С. 8-17.

2. Капля П. Г., Пинягин В. Д. К вопросу динамики подкрепленных цилиндрических оболочек. *Космическая техника. Ракетное вооружение:* сб. науч.-техн. ст. / ГП "КБ "Южное". Днепр, 2009. Вып. 2. С. 59–73.

3. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М., 1971. С. 257–259, 457–472.

4. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М., 1963. С. 463–471, 491–495, 541.

5. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М., 1966. С. 112–115.

Статья поступила 12.06.2019