УДК 519.6:004.021

Л.П. ВАКАЛ

ГЕНЕТИЧНІ АЛГОРИТМИ ЯК ІНСТРУМЕНТ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

L. Vakal

GENETIC ALGORITHMS AS A TOOL FOR SOLVING OF NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS

An approach based on genetic algorithms for solving of nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations is proposed. Numerical experiment results are given.
Key words: genetic algorithm, nonlinear boundary value problem, numerical experiment.

Предложен подход на основе генетических алгоритмов для решения нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены результаты численного эксперимента.
Ключевые слова: генетический алгоритм, нелинейная краевая задача, численный эксперимент.

Запропоновано підхід на основі генетичних алгоритмів для розв'язання нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Наведено результати чисельного експерименту.
Ключові слова: генетичний алгоритм, нелінійна крайова задача, чисельний експеримент.

Вступ. Крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку часто зустрічаються в різних областях науки і техніки: балістиці, теорії пружності, механіці рідин та газів, оптимальному керуванні та ін. Знайти точні розв'язки таких задач у елементарних функціях вдається лише в окремих випадках: для цього необхідно знайти загальний розв'язок диференціального рівняння і явно визначити з крайових умов значення відповідних сталих.

Для *чисельного* розв'язання крайових задач застосовують метод стрільби, що ґрунтується на зведенні крайової задачі до задачі Коші [1, 2], та різницевий метод, в якому початкова задача наближено замінюється розв'язанням системи алгебраїчних рівнянь з великим числом невідомих − значеннями розв'язку у вузлах сітки [2, 3]. У нелінійному випадку обидва методи є ітераційними, при цьому побудова добре збіжних ітераційних процесів сама виявляється досить складною задачею [1]. Для отримання розв'язку крайової задачі у вигляді аналітичного виразу використовують *наближено-аналітичні методи* (Гальоркіна, колокації, найменших квадратів та ін.) [2, 3]. В них параметри наближеного розв'язку визначають з умови мінімуму деякої функції нев'язки, що у підсумку приводить до необхідності розв'язан- ня системи алгебраїчних рівнянь. У випадку нелінійної крайової задачі ця система також є нелінійною.

У даній роботі для знаходження наближеного розв'язку нелінійної крайової задачі у вигляді аналітичного виразу пропонується підхід, що ґрунтується на застосуванні генетичних алгоритмів для визначення оптимальних значень параметрів вказаного виразу.

Генетичні алгоритми − це потужний і гнучкий інструмент розв'язання складних оптимізаційних задач. Ідея генетичного алгоритму (ГА) полягає у комп'ютерній організації еволюційного процесу створення, модифікації та відбору кращих розв'язків (у термінах ГА − особин). Перевагою ГА є те, що пошук найкращих розв'язків у ньому здійснюється не з єдиної точки, як у більшості традиційних методів оптимізації, а з цілої множини точок − популяції особин.

Сьогодні генетичні алгоритми широко використовуються для розв'язання багатьох задач, про що свідчить велика бібліографія (див., наприклад, [4–11]). Однак, публікацій з питання застосування ГА для розв'язання нелінійних крайових задач у науковій літературі вкрай мало [12, 13]. Дана стаття дозволить заповнити певні прогалини у вказаному питанні, а також поповнити арсенал ефективних методів знаходження наближених розв'язків нелінійних крайових задач.

Постановка задачі. Нехай задано нелінійне рівняння другого порядку

$$f\left(x,u,u',u''\right)=0\,. \tag{1}$$

Крайова задача для диференціального рівняння (1) ставиться наступним чином [2]: знайти функцію $u=u(x)$, яка всередині відрізку $[a,b]$ задовольняє рівнянню (1), а на кінцях відрізку – крайовим умовам (у загальному випадку − нелінійним)

$$g_1[u(a),u'(a)]=0\,,\ \ g_2[u(b),u'(b)]=0\,. \tag{2}$$

Для наближеного розв'язку задачі (1), (2) вибирають функцію

$$y=y\left(x;c_1,\ldots,c_n\right), \tag{3}$$

яка містить незалежні параметри $c_1,\ldots,c_n$ і при довільному виборі цих параметрів задовольняє крайовим умовам (2).

У випадку, коли крайові умови (2) лінійні, тобто

$$\alpha_1 u(a)+\beta_1 u'(a)=\gamma_1,\ \ \alpha_2 u(b)+\beta_2 u'(b)=\gamma_2\,, \tag{4}$$

де $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ – задані числа і $\alpha_i^2+\beta_i^2>0$, $i=1,2$, функцію $y(x)$ доцільно вибирати у вигляді

$$y(x;c_1,\ldots,c_n)=\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x), \tag{5}$$

де φ_k – лінійно незалежні, двічі неперервно диференційовані на $[a,b]$ функції, що задовольняють однорідним крайовим умовам, а функція φ_0 – неоднорідним крайовим умовам (4).

Підставляючи функцію $y(x)$ в ліву частину рівняння (1), отримують диференціальну нев'язку

$$R(x;\,c_1,\ldots,c_n)=f\left(x,y,y',y''\right). \tag{6}$$

Якщо при деяких значеннях параметрів $c_1,\ldots,c_n$ нев'язка (6) тотожно дорівнює нулю на відрізку $[a,b]$, то функція $y(x)$ збігається з точним розв'язком $u(x)$ крайової задачі, оскільки задовольняється як диференціальне рівняння, так і крайові умови.

Як правило, при розв'язанні крайових задач не вдається отримати нев'язку тотожно рівною нулю. Тому ставиться задача: знайти такі значення параметрів $c_1,\ldots,c_n$ наближеного розв'язку $y(x;c_1,\ldots,c_n)$, щоб на відрізку $[a,b]$ відхилення нев'язки (6) від нуля було мінімально можливим. Спосіб обчислення цього відхилення, яке позначимо Δ, залежить від вибраного наближено-аналітичного методу, наприклад, у методі найменших квадратів (дискретний варіант) –

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m} R^2(x_i;\, c_1,\ldots,c_n), \tag{7}$$

у методі чебишовських наближень –

$$\Delta = \max_{1\le i\le m} \left| R(x_i;c_1,\ldots,c_n)\right|, \tag{8}$$

де x_i – задані точки і $m >> n$.

Слід зазначити, що в нелінійному випадку знайти параметри $c_1,\ldots,c_n$ досить складно. Труднощі пов'язані не тільки з розв'язанням системи нелінійних рівнянь, як зазначалося вище, але й з обчисленням матриці коефіцієнтів і координат вектора правих частин цієї системи: в деяких методах це вимагає інтегрування по всьому відрізку. Звичайно інтеграли доводиться обчислювати наближено з використанням методів чисельного інтегрування (явне обчислення інтегралів можливе лише в окремих дуже простих випадках).

Для отримання розв'язку крайової задачі (1), (2) у вигляді аналітичного виразу нами пропонується інший підхід. Він полягає у тому, що задача знаходження оптимальних значень параметрів $c_1,\ldots,c_n$ наближеного розв'язку $y(x)$ розглядається як оптимізаційна задача пошуку мінімуму функції відхилення Δ (де глобальний мінімум дорівнює нулю і досягається на точному розв'язку $u(x)$ крайової задачі), і отримана оптимізаційна задача розв'язується за допомогою генетичного алгоритму. При такому підході розв'язок оптимізаційної задачі представляється у вигляді вектора (у термінах ГА – особини або хромосоми), компонентами якого є шукані параметри $c_1,\ldots,c_n$ (гени).

Генетичний алгоритм. ГА представляє собою стохастичну процедуру, що імітує еволюційний процес створення, модифікації та відбору кращих особин (розв'язків задачі). Кожна особина характеризується своєю хромосомою $P_k = \left(p_1^{(k)}, p_2^{(k)},\ldots, p_n^{(k)}\right)$, де n – число генів у хромосомі, і значенням функції пристосованості $Fit_k = Fit(P_k)$, $k = \overline{1,N}$, де N – чисельність популяції.

Значення функції пристосованості (функції цілі, фітнес-функції) фактично є оцінкою якості закодованого в хромосомі розв'язку задачі. Мета ГА полягає у пошуку особини з найкращим (найбільшим або найменшим) значенням функції пристосованості.

Важливо зазначити, що ГА шукає розв'язок якнайближчий до оптимального, але не гарантує знаходження точного максимуму (мінімуму) функції пристосованості [9].

Еволюція популяції моделюється послідовністю поколінь $\{P_k(t)\}$, $t=0,1,2,\ldots$, при цьому в кожному наступному поколінні її склад змінюється з метою збільшення пристосованості особин.

Перші публікації щодо використання принципів біологічної еволюції для розв'язання оптимізаційних задач з'явилися ще у 1960-х роках. А в 1975 році вийшла знакова робота Дж. Холланда «Адаптація в природних і штучних системах» [14], де власне і був запропонований перший генетичний алгоритм.

Схема стандартного ГА складається з таких основних кроків:

1) створення початкового покоління популяції;

2) обчислення для кожної особини значення функції пристосованості;

3) застосування операторів схрещування (кросовера), мутації та селекції для отримання нового покоління популяції;

4) перевірка критерію зупинки алгоритму, і у разі його невиконання повторення еволюційного процесу з кроку 2.

Можливі різні варіанти реалізації стандартної схеми ГА, які відрізняються операторами схрещування, мутації та селекції, процедурами вибору батьків для схрещування, формою представлення хромосом (двійкове чи дійсне кодування) і т. ін. [8, 9]. Вибір того або іншого варіанту реалізації стандартних складових при розробці ГА для розв'язання конкретної задачі залежить від ряду факторів: особливостей предметної області, формалізації задачі, структури даних та ін.

Для розв'язання нелінійних крайових задач (1), (2) було взято ГА, запропонований автором у роботі [11] для апроксимації функцій. Цей алгоритм має такі особливості реалізації стандартної схеми ГА.

Початкове покоління популяції $\{P_k(0)\}$ створюється з N хромосом (особин) P_k, $k=\overline{1,N}$, кожна з яких складається з n генів $p_1^{(k)},p_2^{(k)},\ldots,p_n^{(k)}$, вибраних випадковим чином із деякого заданого діапазону чисел. Ген $p_i^{(k)}$ відповідає значенню параметра c_i шуканого розв'язку крайової задачі.

В алгоритмі використовується дійсне кодування хромосом, коли гени напряму подаються у вигляді дійсних чисел [15, 16]. У більшості випадків алгоритми з дійсним кодуванням здійснюють пошук оптимуму краще та швидше, ніж з двійковим кодуванням [16].

Функція пристосованості обчислюється за формулою

$$Fit(P_k)=\Delta(P_k), \tag{9}$$

де $\Delta(P_k)$ − відхилення нев'язки закодованого в хромосомі розв'язку від нуля, наприклад, квадратичне відхилення (7) або чебишовське відхилення (8). Чим менше значення функції цілі (9), тим краще пристосованою є особина.

Для обчислення функції відхилення Δ розрахункова область крайової задачі покривається сіткою з m точок x_i.

Батьки для створення нащадків вибираються за допомогою процедури парного турнірного відбору [8]. Схрещування здійснюється на основі змішаного BLX−α кросовера з $\alpha=0{,}5$ [16]. При мутації змінюється значення випадкового гена одного нащадка, який також вибирається випадковим чином. З розширеної популяції батьків та нащадків до нового покоління включаються лише N особин з найменшим значенням функції пристосованості (9).

Умовою зупинки алгоритму є досягнення заданого (максимального) числа поколінь t_{max}.

Слід зазначити, що оскільки ГА базується на імовірнісному підході, то прийнятний розв'язок можна отримати лише за наявності достатнього числа пусків алгоритму.

Чисельний експеримент та його результати. Для проведення чисельного експерименту в системі програмування Delphi на основі описаного ГА створено комп'ютерну програму для розв'язання крайових задач. У ній передбачено, що значення деяких параметрів ГА задаються користувачем, а саме:

- число генів у хромосомі n;
- розмір популяції N;
- число поколінь t_{max};
- число пусків алгоритму;
- точки сітки x_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$ (якщо сітка рівномірна, то задається тільки число m або крок сітки);
- діапазон чисел, з якого за допомогою датчика випадкових чисел генеруються значення генів у початковому поколінні;
- вигляд функції пристосованості Fit.

З використанням створеної програми проведено чисельний експеримент по розв'язанню низки задач, для яких відомі точні розв'язки. Тут наведено два приклади знаходження розв'язків крайових задач для нелінійних диференціальних рівнянь з лінійними (приклад 1) і нелінійними (приклад 2) крайовими умовами.

Приклад 1. Потрібно знайти розв'язок крайової задачі

$$u'' - 4(u')^2 + 16u = 2,$$
$$u(0) = 0, \; u(1) = 1.$$

Наближений розв'язок $y(x)$ цієї задачі шукаємо у вигляді

$$y(x) = x + \tilde{n}_1 x(1-x) + \tilde{n}_2 x^2 (1-x). \tag{10}$$

Після підстановки функції (10) в диференціальне рівняння отримуємо нев'язку

$$R(x; c_1, c_2) = r(x) - 4[q(x)]^2 + 16y(x) - 2,$$

де $q(x) = 1 + \tilde{n}_1(1-2x) + \tilde{n}_2\left(2x - 3x^2\right)$, $r(x) = -2\tilde{n}_1 + 2\tilde{n}_2(1-3x)$.

Для знаходження значень коефіцієнтів $\tilde{n}_1$ і $\tilde{n}_2$, які мінімізують чебишовське відхилення (8), застосовано розроблену програму з такими параметрами ГА:

- число генів у хромосомі − 2;
- розмір популяції − 70 особин;
- число поколінь − 120;
- число пусків − 50;

- сітка по x рівномірна з кроком 0.01;
- початкова популяція вибирається з інтервалу $(-1,1)$;
- функція пристосованості має вигляд

$$Fit(P_k) = \max_{1 \le i \le 101} \left| R(x_i) \right| . \tag{11}$$

У результаті роботи програми отримані такі значення коефіцієнтів:

$$c_1 \approx -1.0000000000004, \ \ c_2 \approx -0.00000000000004,$$

при цьому значення функції пристосованості (11) для знайденого розв'язку

$$y(x) = -0.00000000000042x + 1.000000000000375x^2 + 0.000000000000045x^3 \tag{12}$$

дорівнює $6.4 \cdot 10^{-12}$.

Легко бачити, що знайдений за ГА наближений розв'язок (12) крайової задачі практично збігається з її точним розв'язком $u(x) = x^2$.

Приклад 2. Знайти розв'язок нелінійної крайової задачі:

$$u'' \cdot u - (u')^2 = 0 ,$$

$$u(0) \cdot u'(0) = 1 , \ u(1) - u'(1) = 0 .$$

Наближений розв'язок цієї задачі шукаємо у вигляді

$$y(x) = \sum_{k=1}^{5} c_k x^{k-1} . \tag{13}$$

На відміну від задачі приклада 1 функція (13) не задовольняє точно крайовим умовам для довільних значень c_k $\left(k = \overline{1,5}\right)$. Тому, після її підстановки в рівняння та в крайові умови отримуємо три нев'язки: диференціальну нев'язку

$$R_1(x; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5,) = r(x) \cdot y(x) - [q(x)]^2 \tag{14}$$

і дві нев'язки крайових умов

$$R_2(c_1, c_2) = c_1 \cdot c_2 - 1 , \ R_3(c_1, c_3, c_4, c_5) = c_1 - \tilde{n}_3 - 2\tilde{n}_4 - 3\tilde{n}_5 , \tag{15}$$

де $r(x) = 2\tilde{n}_3 + 6\tilde{n}_4 x + 12c_5 x^2$, $q(x) = \tilde{n}_2 + 2\tilde{n}_3 x + 3\tilde{n}_4 x^2 + 4\tilde{n}_5 x^3$.

Коефіцієнти $\tilde{n}_k$ визначались за допомогою згаданої вище комп'ютерної програми з такими параметрами ГА:

- число генів у хромосомі – 5;
- розмір популяції – 100 особин;
- число поколінь – 150;
- число пусків – 50;
- сітка по x рівномірна з кроком 0.01;
- початкова популяція вибирається з інтервалу $(0,1)$;
- функція пристосованості має вигляд

$$Fit(P_k) = \max_{\{x_i\}} \left| R_1(x_i) \right| + \left| R_2 \right| + \left| R_3 \right| . \tag{16}$$

У результаті роботи програми отримані такі значення коефіцієнтів наближеного розв'язку (13):

$\tilde{n}_1 = 0.999357$, $\tilde{n}_2 = 1.000627$, $\tilde{n}_3 = 0.508666$, $\tilde{n}_4 = 0.134394$, $\tilde{n}_5 = 0.073968$, (17)
при цьому значення функції пристосованості (16) дорівнює 0.01557.

Як видно з рисунка, при розв'язанні задачі ми досить швидко наблизились у ГА від випадково вибраних розв'язків до близьких до оптимального: вже у 50-му поколінні значення функції пристосованості (16) стає меншим 0.02.

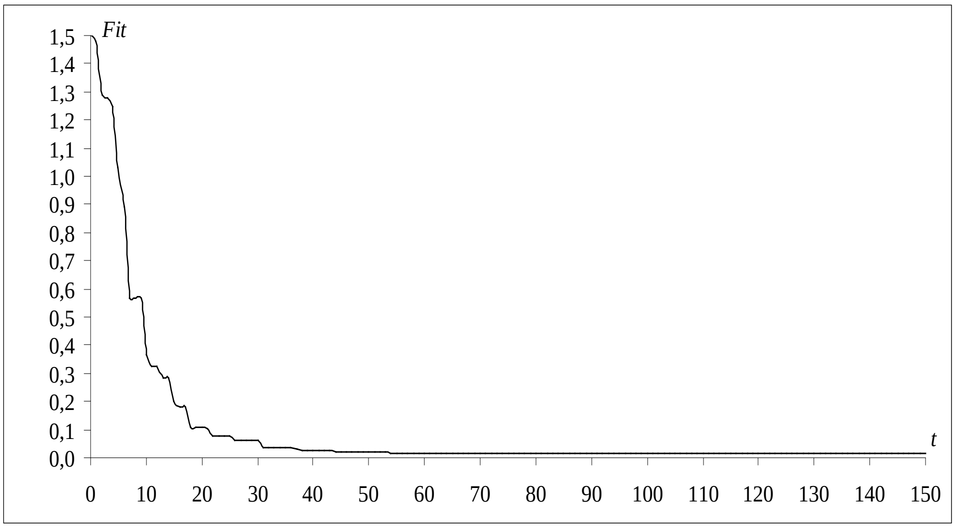

РИСУНОК. Залежність значення функції пристосованості *Fit* від числа поколінь *t*

Оскільки відомий точний розв'язок $u(x) = e^x$ розглядуваної крайової задачі, то можна обчислити похибку отриманого наближеного розв'язку. В розрахунковій області крайової задачі ця похибка дорівнює 0.001.

Легко бачити, що коефіцієнти (17) близькі до коефіцієнтів a_k розкладу в ряд Тейлора функції e^x (точного розв'язку крайової задачі)

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 0.5,\ a_4 = 1/6 \approx 0.16667,\ a_5 = 1/24 \approx 0.04167\ .$$

Однак, похибка розв'язку (13) з коефіцієнтами a_k замість c_k дорівнює 0.00995, що майже в 10 разів більше, ніж похибка знайденого за ГА розв'язку.

Висновки. При дослідженнях різноманітних проблем природознавства часто використовуються математичні моделі на основі диференціальних рівнянь. В даній роботі запропоновано підхід до розв'язання нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, що ґрунтується на застосуванні генетичних алгоритмів для знаходження оптимальних значень параметрів наближених розв'язків цих задач.

Перевагами ГА є ясність схеми побудови алгоритму, відсутність обмежень на вигляд функції пристосованості, пошук найкращих розв'язків не з єдиної точки, а з цілої множини точок. Крім того, структура алгоритму дає можливість використання його для знаходження розв'язків інших подібних задач, не розробляючи нової структури даних, не впроваджуючи нового підходу до розв'язання задачі. Водночас ГА має ряд недоліків, зокрема, велике число пусків для отримання прийнятного розв'язку, емпіричний підбір деяких параметрів алгоритму та ін.

Результати виконаного чисельного експерименту показали, що отримані за допомогою ГА наближені розв'язки нелінійних крайових задач добре узгоджуються з їх точними розв'язками.

1. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
2. *Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.* Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
3. *Копченова Н.В., Марон И.А.* Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1972. – 368 с.
4. *Пейгин С.В., Перио Ж,, Тимченко С.В.* Применение генетических алгоритмов для оптимизации формы тела по тепловому потоку // Мат. моделирование. – 1998. – Т. 10, № 9. – С. 111–122.
5. *Клепиков В.Б., Сергеев С.А., Махотило К.В. и др.* Применение методов нейронных сетей и генетических алгоритмов в решении задач управления электроприводами // Электротехника. – 1999. – № 5. – С. 2–6.
6. *Сергеева О.П.* Применение генетических алгоритмов для распознавания изображений // Искусственный интеллект. – 2002. – № 4. – С. 516–520.
7. *Nanda J., R. Narayanan R.* Application of genetic algorithm to economic load dispatch with lineflow constraints // International journal of electrical power & energy systems. – 2002. – Vol. 24, N 9. – С. 723–729.
8. *Панченко Т.В.* Генетические алгоритмы. – Астрахань: Издательский дом «Астраханский университет», 2007. – 87 с.
9. *Подлазова А.В.* Генетические алгоритмы на примерах задач раскроя // Проблемы управления. – 2008. – № 2. – С. 57–63.
10. *Погорілий С.Д., Білоус Р.Б.* Генетичний алгоритм розв'язання задачі маршрутизації в мережах // Проблеми програмування. – 2010. – № 2–3 Спец. вип. – С. 171–178.
11. *Вакал Л.П.* Генетичні алгоритми для чебишовської апроксимації // Комп'ютерні засоби, мережі та системи. – 2013. – № 12. – С. 20–26.
12. *Ясницкий Л.Н., Гладкий С.Л., Никитенко И.И. и др.* Искусственный интеллект в решении краевых задач проектной инженерии. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.permai.ru/files/projects/P03.pdf.
13. *Abu-Arqub Omar*, *Abo-Hammour Zaer*, *Momani Shaher*. Application of continuous genetic algorithm for nonlinear system of second-order boundary value problems // Appl. Math. Inf. Sci. – 2014. – Vol. 8, N 1. – P. 235 – 248.
14. *Holland J.H.* Adaptation in natural and artificial systems. – Ann Arbor: Univ. of Michigan Press, 1975. – 219 p.
15. *Wright A.* Genetic algorithms for real parameter optimization // Foundations of Genetic Algorithms. – 1991. – Vol. 1. – P. 205 – 218.
16. *Herrera F., Lozano M., Verdegay J.L.* Tackling real-coded genetic algorithms: operators and tools for the behaviour analysis // Artificial Intelligence Review. – 1998. – Vol. 12, N 4. – P. 265 – 319.

Одержано 16.09.2014