УДК 622.831: 624.131 (043.3)
Наука

Васильев Л.М. /д.т.н./, Васильев Д.Л. /к.т.н./, Усов О.А. /к.т.н./
ИГТМ НАН Украины

Аналитическое построение диаграмм «напряжение – деформация» образцов горных пород при их усеченно – клиновой форме разрушения

Разработан аналитический метод расчёта предела прочности и построения диаграмм «нормальное напряжение–продольная деформация» при усечено-клиновой форме разрушения образцов с использованием экспериментальных значений трёх показателей свойств горных пород – предела сопротивляемости сдвигу, коэффициентов внутреннего и внешнего трения. Достоинством метода является его доступность и оперативность получения исходных данных для построения диаграмм «напряжение–продольная деформация» и определения предела прочности горных пород непосредственно в производственных условиях на горных предприятиях. Ил. 2. Библиогр.: 7 назв.

Ключевые слова: *горная порода, предел прочности, разрушение, трещина, диаграмма «напряжение–деформация»*

An analytical method for calculating of breaking point and charting «normal stress-longitudinal deformation» at the form of a truncated wedge destruction of samples from the experimental values of the three indicators of the properties of rocks - the limit of shear strength, coefficients of internal and external friction - was developed. The advantage of this method is available and efficiency get the initial data for charting «stress-longitudinal deformation» and determined of breaking point of rock directly under production conditions at the mining enterprises.

Keywords: *mountain breed, breaking point, destruction, crack, a diagram is «stress–deformation».*

Постановка проблемы

Одной из важных информационных характеристик, необходимых для осознанного управления напряжённо-деформированным состоянием массива горных пород, является диаграмма «напряжение – продольная деформация» разрушения образцов горных пород.

В 1960-е гг. в бывшем СССР и за рубежом для получения достоверных данных по пределу прочности и запредельным кривым были созданы специальные прессы, оснащённые необходимой аппаратурой регистрации напряжений и перемещений. В бывшем СССР такие прессы имелись в отдельных НИИ (ВНИМИ, ИГТМ НАНУ, ИФГП НАНУ, ИГД им. Скочинского, ИГМОН НАН Киргизстана и др.). Но они требуют высококвалифицированного обслуживания и находятся вдали от горных предприятий, где и как раз нужна оперативная информация о свойствах горных пород. Поэтому имеется необходимость в разработке метода теоретического построения упомянутых диаграмм при знании свойств горных пород, определяемых более простыми способами, доступными для лабораторий производственных предприятий. Известно, что при одноосном сжатии образцов квадратного сечения образуется 5 форм разрушения. Наиболее распространённая из них – усечено – клиновая.

Цель работы - разработать метод построения и построить диаграммы «нормальное напряжение – продольная деформация» для усечено–клиновой формы разрушения образцов горных пород с использованием показателей свойств горных пород, измерения которых доступны в лабораториях горных предприятий.

Анализ публикаций, посвящённых тематике работы

В [1] отражён анализ запредельных кривых на основе условия Кулона-Мора, но без учёта контактного трения. Анализ построен на формальной процедуре оценки характеристик запредельных кривых. Автором рассмотрены частные случаи этих кривых без связи с формами разрушения горных пород. Например, случай идеально хрупкого материала (модуль спада равен бесконечности), когда характеристики совпадают с главными направлениями составляющих тензора напряжений, а так же частный случай при угле внутреннего трения и угле спада, равным нулю.

В [2] предпринята попытка изыскания подхода к построению аналитических запредельных кривых разрушения. Сформулированы условия на границах раздела областей упругого, пластического и запредельного деформирования. Показано, что в задаче о трещине при бесконечном значении модуля спада вместо падения максимального касательного напряжения наблюдается его неограниченный рост. Однако, изложенных положений недостаточно для построения запредельных кривых и диаграмм «напряжение – продольная деформация», тем более при наличии контактного трения. Поэтому нам не приходилось встречать в публикациях автора упомянутые диаграммы в законченном виде.

Построение запредельных кривых предлагается определять по следующей методике. Предполагаем, что в вершине трещины хрупкий материал породы подчиняется закону Гука [3]. По мере развития трещины часть материала выходит из-под нагрузки (рис. 1). При знании значений координат вершины одной или двух трещин в каждый момент их развития можно определить несущую часть материала образца, которая равна первоначальной длине последнего за вычетом части, вышедшей из-под нагрузки. Вышедшая из-под нагрузки часть легко определяется по геометрии линии скольжения (ЛС). При знании предельных средних нагрузок несущей части образца можно определить по закону Гука величину деформации.

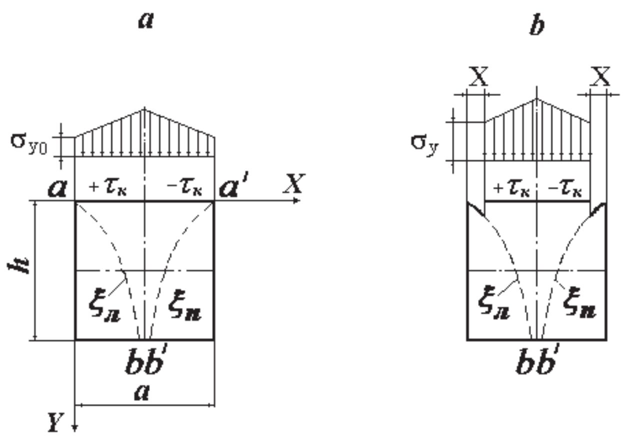

Рис. 1. Схема развития трещин и формирования нормальных контактных нагрузок: *a* – в исходном положении; *b* – в момент развития трещин

Математически это можно изобразить в виде простых формул. Запишем текущее значение суммы единичных нормальных напряжений – силу, действующую на контактной поверхности – в виде

$$P = 2\int_{x}^{0,5a} \sigma_{y0} \cdot F(x)dx \quad (1)$$

где σ_{y_0} – нормальное напряжение, при котором развивается трещина по усечено–клиновой форме при $x = 0$; $F(x)$ – функция приращения нормального напряжения на единичной контактной поверхности образца, не вышедшей из-под нагрузки.

Коэффициент, равный двум, означает две симметричные половины образца. Вышедшая из-под нагрузки часть образца определяется по значениям абсциссы вершины трещины как $x_\xi = n \cdot \Delta h \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha$, где n – число слоев по ординате y; α – угол наклона ЛС в вершине трещины относительно оси абсцисс x; Δh – высота слоя. Разделив значение силы на длину несущей части, найдем текущее значение среднего давления

$$p = 2\int_{x}^{0,5a} \sigma_{y_0} \frac{F(x)dx}{a_i}, \quad (2)$$

где a_i – длина единичной несущей части образца.

В свою очередь, продольная деформация по закону Гука является функцией среднего давления p и модуля упругости E, т.е.

$$\varepsilon = \frac{p}{E}. \quad (3)$$

Используя формулы (2) и (3), можно записать

$$\varepsilon = 2\int_{x}^{0,5a} \sigma_{y0} \frac{F(x)dx}{a_i \cdot E}. \quad (4)$$

Следовательно, мы получили связь фактического (истинного) удельного давления (напряжения) с деформацией, которая позволяет построить линейную (истинную) диаграмму «нормальное напряжение–продольная деформация».

Теперь, используя эту диаграмму, можно перейти к напряжениям по начальной длине *a* для построения общепринятой условной диаграммы. Для построения запредельных кривых по начальной длине следует значение текущего среднего давления уменьшить соответственно соотношению несущей площадки к первоначальной единичной длине. Тогда на основании (4), получим

$$\sigma_c = 2\int_{x}^{0,5a} \sigma_{y0} \frac{F(x)dx}{a_i} \cdot S = \varepsilon \cdot E \cdot S, \quad (5)$$

где S – относительная несущая площадка, равная $\frac{a_i}{a}$.

С использованием значения продольной деформации *e* и напряжения s_c по соотношению (5) осуществляется построение диаграммы «напряжение – продольная деформация». Надо отметить, что формулы (1)–(5) корректируются для каждой формы разрушения.

Следовательно, зная значение напряжения σ_c и продольной деформации в каждый момент положения трещины в образце представляется возможным построение аналитической зависимости $\sigma_c = \Psi(\varepsilon)$. Угол наклона запредельной кривой $\sigma_c = \Psi(\varepsilon)$, так называемый модуль спада *M*, будет определяться модулем упругости, интенсивностью роста *p* и относительной несущей длины *S* образца.

В качестве примера возьмем усечено - клиновую форму разрушения (рис. 1), получаемую экспериментально при раздавливании образцов на прессах. Усечено - клиновая форма разрушения образцов горных пород характеризуется отсутствием пересечения трещины с вертикальной линией симметрии. Как видно из формулы (5), для расчета нужно иметь расчетные формулы для напряжений в вершине трещины в каждый момент её развития.

Изобразим образец кубической формы, на контактных плоскостях которого приложены касательные напряжения $\tau_к$ от трения, направленные против деформации. Для верхней части левой половины образца направление $\tau_к$ со знаком «плюс» принимается против поперечной деформации по контакту образца, для нижней части – со знаком «минус». Для правой половины образца знаки $\tau_к$ принимаются противоположные. Образец вследствие деформации приобретает выпуклую форму, что позволяет в угловых областях образца учесть правило парности касательных напряжений.

Закономерности распределения нормальных и касательных принимаем по Л. Прандлю [4]: касательные напряжения принимаются постоянными, а нормальные – линейными. Распределение контактных нормальных напряжений описывается формулой

$$\sigma_{yi} = \sigma_{y_0}\left(1 + \frac{2f \cdot x}{h}\right), \tag{6}$$

где f – коэффициент контактного трения; h – высота образца.

В [5] изложен метод определения напряжения σ_{y_0} и предела прочности применительно к этому распределению. Несколько пояснений относительно метода. Он основан на теории линий скольжения и на критерии эффективных касательных напряжений $\tau_э$ в вершине трещин согласно Кулону

$$\tau_э = \tau_\alpha - \mu\sigma_\alpha, \tag{7}$$

где τ_a и σ_α – активные касательные и нормальные напряжения на наклонной площадке в вершине трещины; μ – коэффициент внутреннего трения.

Напряжения τ_a и σ_α описываются известными формулами [6]. После исследования на экстремум и соответствующих преобразований по известному правилу Генки получено важное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha_{ba}} = 2\left(\mathrm{k}_n + \mu\sigma_\alpha\right), \tag{8}$$

где k_n – предел прочности материала сдвигу; α – угол наклона ЛС ξ.

Для решения этого уравнения получены формулы для расчета нормальных напряжений в любой точке на линии скольжения ξ

$$\sigma_{\alpha_\xi} = \tau_{xy} \cdot \cos\rho \cdot \sqrt{1 - b_\xi^{\,2}}, \tag{9}$$

где ρ = arctgμ – угол внутреннего трения; τ_{xy} – касательные напряжения в вершине трещины.

На нижней контактной плоскости в точке b (рис. 1)

$$\sigma_{\alpha_b} = \sigma_y\left(1 - \sin\rho\sqrt{1 - b_b^{\,2}}\right) - \tau_к \cdot \cos\rho\sqrt{1 - b_b^{\,2}}; \tag{10}$$

$$b_\xi = \frac{\tau_{xy}}{\mathrm{k}_n + \mu\sigma_y}; \tag{11}$$

$$b_b = \frac{\tau_к}{\mathrm{k}_b + \mu\sigma_{yb}}, \tag{12}$$

где σ_y – нормальное напряжение в вершине трещины; $\sigma_{yb} = \sigma_y\left(1 + \frac{2f \cdot x_b}{h}\right)$ – нормальное напряжение в точке b; x_b – абсцисса в точке b; $\tau_к$ – контактное касательное напряжение; k_b – эффективное касательное напряжение в точке b.

Напряжение k_b меньше k_n до тех пор, пока трещина не выйдет на нижнюю контактную поверхность в точку b, в которой $k_b = k_n$.

Касательное напряжение τ_{xy} определяется по принципу линейного затухания от контактных плоскостей. С учетом закона Кулона-Амонтона это напряжение

$$\tau_{xy} = \tau_к\left(1 - \frac{2Y}{h}\right) = f\sigma_y\left(1 - \frac{2Y}{h}\right). \tag{13}$$

Угол наклона ЛС ξ определяется по формуле

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2} + \beta_\xi, \tag{14}$$

где β_ξ – угол поворота ЛС от контактного трения.

Параметр β_ξ в любой точке ЛС ξ определяется по формуле

$$\beta_\xi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{f\sigma_y \cdot \left(1 - \frac{2Y}{h}\right)\cos\rho}{\left(k_n + \mu\sigma_y\right)\left(\sin\rho - \sqrt{1 - b_\xi^{\,2}}\right)}, \tag{15}$$

а β_b на нижней контактной плоскости в точке b – по формуле

$$\beta_b = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{f\sigma_{yb} \cdot \cos\rho}{\left(k_n + \mu\sigma_{yb}\right)\left(\sin\rho - \sqrt{1 - b_b^{\,2}}\right)}. \tag{16}$$

Угол поворота ЛС ξ для уравнения (8) определяется по выражению

$$\alpha_b = \beta_b + \beta_\xi. \tag{17}$$

Используя выражения (9)–(17) при решении дифференциального уравнения (8) и опуская громоздкие преобразования, получим систему уравнений для расчета нормального сжимающего напряжения на линии скольжения ξ в образце правильной формы (например, для параллелепипеда)

$$\begin{cases} \sigma_{y_0} = \dfrac{1}{\mu}\left[\dfrac{k_n\left(1 + \sin\rho \cdot \sqrt{1 - b_\xi^{\,2}}\right) \cdot \exp\left(2\mu\left(\beta_\xi + \beta_b\right)\right)}{1 - \sin\rho \cdot \sqrt{1 - b_\xi^{\,2}}} - k_b\right]; & (18) \\ k_b = \dfrac{\left(k_n + \mu\sigma_y\right)\left(1 - \sin\rho \cdot \sqrt{1 - b_\xi^{\,2}}\right)}{\left(1 + \sin\rho\sqrt{1 - b_b^{\,2}}\right) \cdot \exp\left(4\mu\beta_b\right)}. & (19) \end{cases}$$

Уравнения (18) и (19) позволяют определить нормальное напряжение в вершине трещины в динамике ее развития. Условием предельного состояния в вершине трещины является равенство активного касательного напряжения пределу сопротивляемости материала сдвигу, равному сумме сопротивления материала от сцепления и фрикционной составляющей $\mu\sigma_a$. Для расчета напряжений разработана программа для ПЭВМ с использованием метода итераций.

Теперь рассмотрим динамику развития трещин (рис. 1). Представим, что развивается одна или две трещины по ЛС ξ. Часть материала по мере ее движения уходит из-под нагрузки на величину x. Тогда несущая площадка образца будет для одной трещины

$$a_1 = a - x,$$

а относительная площадка –

$$S_1 = \frac{a - x}{a}.$$

Для двух трещин

$$a_2 = a - 2x,$$

$$S_2 = \frac{a - 2x}{a}. \qquad (20)$$

Как только возникла одна трещина, она сразу же вызывает симметрично вторую. С выходом трещин из-под нагрузки происходит и изменение распределения контактной нагрузки и среднего давления на образец. Среднее давление согласно схеме (рис. 1б) и выражению (6) определяется по формуле

$$p = \frac{2\sigma_y}{a - 2x_\xi}\int_0^L\left(1 + \frac{2f \cdot L}{h}\right)dL =$$

$$= \frac{\sigma_y}{0{,}5 - x_\xi}\left(0{,}5 - x + \frac{f \cdot \left(0{,}5a - x_\xi\right)^2}{h}\right), \qquad (21)$$

где $L = 0{,}5a - x_\xi$.

Теперь по формулам (1-5) с использованием выражения (21) можно построить запредельные кривые условной диаграммы «нормальное напряжение–продольная деформация» при различных значениях коэффициентов внешнего и внутреннего трения. Для этого принимаем условие соответствия деформации напряжению по закону Гука в вершине трещины согласно выражению (3). Умножая согласно уравнению (5) выражение (21) на значение относительной площадки, рассчитываемой по формуле (20), представляется возможным построение условной диаграммы «напряжение-деформация», которую получают исследователи на прессах при усечено - клиновой форме разрушения. Для подтверждения достоверности расчёта запредельных кривых позаимствуем из книги [7] четыре экспериментальные диаграммы «напряжение – продольная деформация» (рис. 2).

Экспериментальная диаграмма 1 аппроксимируется расчетной диаграммой 2 при k_n = 60 МПа, μ = 1,0, f = 0,02, E = 5,1·10^4 МПа; диаграмма 3 – расчетной диаграммой 4 при k_n = 69 МПа, μ = 1,0, f = 0,02, E = 5,8·10^3 МПа; диаграмма 5 – расчетной диаграммой 6 при k_n = 59 МПа, μ = 1,0, f = 0,02, E = 5,9·10^3 МПа; диаграмма 7 – расчетной диаграммой 8 при k_n = 15 МПа, μ = 1,0, f = 0,35, E = 3,5·10^3 МПа. Сходимость расчётных данных с экспериментальными по пределу прочности составляет 82–90 %.

Сопоставление расчетных диаграмм с экспериментальными диаграммами «напряжение–продольная деформация», полученными при одноосном сжатии, убедительно свидетельствуют о высокой результативности предлагаемого метода расчета предела прочности и построения запредельных кривых разрушения горных пород.

Выводы

Разработан метод построения диаграммы «нормальное напряжение–продольная деформация» для усечено–клиновой формы разрушения образцов горных пород с использованием трех экспериментальных их характеристик (предела сопротивляемости сдвигу, коэффициентов контактного и внутреннего трения), доступных для определения в лабораториях горных предприятий. Достоинство метода - доступность и оперативность получения результатов непосредственно на предприятиях.

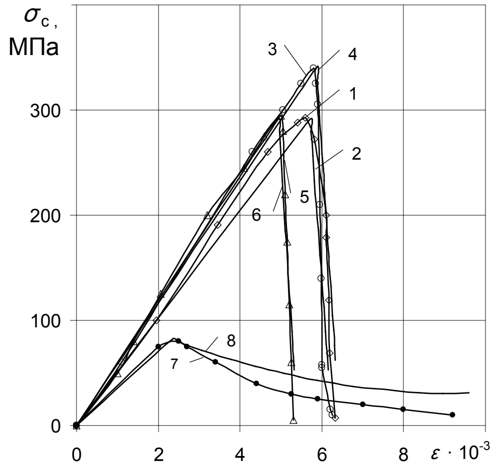

Рис. 2. Диаграмма «напряжение–продольная деформация»: 1 – биотитовый плагиогранит (Южуралзолото); 3 – плагиогранит (Южуралзолото); 5 – диабаз (Братская ГЭС); 7 – коелганский мрамор; 2, 4, 6, 8 – соответствующие расчётные диаграммы

В основу метода положен усовершенствованный критерий прочности Кулона, дополненный параметрами контактного трения. Расчетные запредельные кривые разрушения образцов горных пород сопоставлены с экспериментальными диаграммами «нормальное напряжение–продольная деформация». Сходимость по пределу прочности образцов горных пород составила 85-90 %. Это позволяет нам рекомендовать метод для использования при определении предела прочности и построения диаграмм «напряжение–деформация» образцов горных пород и других целей, например, для определения несущей способности целиков на горных предприятиях. В перспективе планируется проверка метода при других формах разрушения: клиновой, диагональной, продольной и взрывоподобной.

Библиографический список

1. Чанышев А.И., Абдулин И.М. Характеристики и соотношения на характеристиках на запредельной стадии деформирования горных пород / ФТПРПИ. – 2008. – № 5. – С. 27–41.

2. Чанышев А.И. Запредельное деформирование материалов при антиплоской деформации и его учёт в задаче о распространении прямолинейной полубесконечной трещины. Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках. – Симферополь: Таврический НУ им. В.И. Вернадского, 2010. - С. 349–354.

3. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – К.: Наукова думка, 1968. – 246 с.

4. Сторожев М.В., Попов Е.А. Теория обработки давлением. – М.: Машиностроение, 1977. – 423 с.

5. Васильев Д.Л. Метод расчета предела прочности на сжатие образцов горных пород при постоянстве контактного касательного напряжения. Зб. наук. пр. НГУ. – Дніпропетровськ: РВК НГУ, 2009. – № 33, т. 1. – С. 111–117.

6. Сопротивление материалов / И.А. Биргер, Р.Р. Мавлютов. – М.: Наука, 1986. – 560 с.

7. Прочность горных пород и устойчивость выработок на больших глубинах / А.Н. Ставрогин, А.Г. Протосеня. – М.: Недра, 1985. – 271 с.

Поступила 04.02.2013