

## Математическое моделирование движения ходовых тележек по подвесному монорельсу

Установлена взаимосвязь между параметрами движения тележек и подвешенного монорельсового пути. Определены зависимости формирования дополнительных динамических нагрузок от перемещений монорельса. Проведены теоретические исследования процесса взаимодействия тележек и монорельсового пути с учетом упругих деформаций. Найденны амплитуды вынужденных колебаний на стыках монорельса. Полученные зависимости позволят обоснованно устанавливать параметры ходовых тележек и монорельсового пути. Ил. 2. Библиогр.: 6 назв.

**Ключевые слова:** монорельсовый путь, стык, тележка, вынужденные колебания, амплитуда

*There has been determined the correlation between parameters of vehicles motion and suspended monorail. There have been stated the dependences of formation of extra dynamic loads onto monorail motion. There have been carried out the theoretical researches of process of vehicles and monorail interaction taking into account the resiliencies. There have been found out the amplitudes of stimulated oscillations at monorail joints. Received dependences will permit to reasonably determine the parameters of running vehicles and monorail.*

**Keywords:** monorail, joint, vehicle, stimulated oscillation, amplitude

### Постановка проблемы

Движение ходовых тележек по подвесному монорельсу неразрывно связано с силовыми воздействиями, которые возникают из-за упругих деформаций и дополнительных перемещений, а также сил инерции. Силовые воздействия приводят к динамическим колебаниям и дополнительным нагрузкам, действующим на колеса ходовых тележек и подвеску монорельса, что увеличивает износ и уменьшает ресурс взаимодействующих элементов.

### Анализ последних исследований и публикаций

В работах [1, 2] исследовано взаимодействие подвижных транспортных средств и рельсового пути. Моделирование динамических процессов транспортных средств выполнено в работах [2, 4]. Поведение монорельсового вагона исследовано в работе [5]. Настоящая статья является продолжением указанных исследований.

**Цель работы** заключается в установлении взаимосвязи между параметрами ходовых тележек и подвешенного монорельсового пути с учетом упругих деформаций монорельса и вертикальных сил инерции.

### Изложение основного материала

Рассмотрим движение одиночной тележки по подвесному монорельсовому пути, секции которого имеют длину  $L$  и шарнирно соединены между собой (рис. 1). Монорельс в начале пути закрепляется, чем исключается его продольное раскачивание. Тележку представим в виде одномассовой модели с колесами. Под действием массы продольная ось монорельсового пути изгибается, и поступательное ее движение сопровождается вертикальными смещениями, которые зависят не только от статической нагрузки, но и от вертикальной силы инерции.

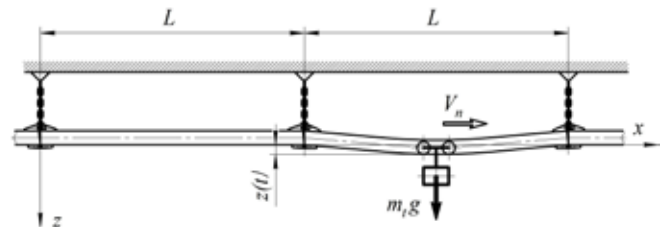


Рис. 1. Схема деформации подвешенного монорельсового пути под движущейся тележкой

Рассмотрим монорельс как невесомую балку, изгибаемую сосредоточенной силой  $F_\mu$ , линия действия которой проходит через центр тяжести тележки. Дифференциальное уравнение изогнутой оси монорельса будет [6]

$$\frac{\partial^4 z}{dx^4} EJ + k_\mu z = 0, \quad (1)$$

где  $k_\mu$  жесткость упругого основания, которая определяет погонную нагрузку  $k_\mu z$ , вызывающую прогиб монорельса  $Z$ .

Обозначим

$$\alpha_\mu = \sqrt[4]{\frac{k_\mu}{4EJ}}, \quad \varphi_z = \alpha_\mu x. \quad (2)$$

С учетом обозначений (2) найдем интеграл выражения (1)

$$z = \frac{F_\mu \alpha_\mu}{2k_\mu} e^{-\varphi_z} (\cos \varphi_z + \sin \varphi_z) \quad (3)$$

Отсюда следует, что наибольший прогиб монорельса, возникающий под нагрузкой, будет

$z_f = F_\mu \alpha_\mu / (2k_\mu)$ . Входящий в это выражение параметр  $k_\mu$  может быть получен как  $k_\mu = D_z / L$ , где  $D_z$  усилие, которое необходимо приложить к монорельсовому пути для того, чтобы деформировать его подвеску на единицу длины.

Тогда

$$\alpha_\mu = \frac{1}{L} 4 \sqrt{\frac{3}{2\gamma_z}}, \quad (4)$$

где  $\gamma_z$  — коэффициент, учитывающий относительную жесткость монорельса и его подвески, равный  $\gamma_z = 6EJ / (D_z L^3)$ .

Во время движения тележки с постоянной скоростью вертикальная реакция в месте контакта колеса с монорельсом составит

$$R_z = \frac{2k_\mu z}{\alpha_\mu} = 2D_z 4 \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma_z z.$$

Уравнение движения тележки будет

$$\frac{d^2 z}{dt^2} m_t + \frac{2k_\mu}{\alpha_\mu} z = F_\mu. \quad (5)$$

В случае, когда  $F_\mu = 0$ , выражение (5) описывает свободные колебания тележки, перемещающегося по монорельсу. Прогиб монорельса под действием силы тяжести тележки в этом случае равен

$$z = z_o \cos \sqrt{\frac{2k_\mu}{m_t \alpha_\mu}} t + z'_o \sqrt{\frac{m_t \alpha_\mu}{2k_\mu}} \sin \sqrt{\frac{2k_\mu}{m_t \alpha_\mu}} t, \quad (6)$$

где  $z_o$  — начальное вертикальное перемещение колеса тележки относительно первоначального положение равновесия;  $z'_o$  — вертикальная скорость колеса в начальный момент времени.

В случае, когда  $F_\mu \neq 0$ , выражение (5) описывает вынужденные колебания, возникающие под действием силы тяжести тележки, усилия прижатия ее колеса к монорельсу, силы инерции, вызываемой из-за несовпадения оси вращения колеса с его центром тяжести.

При движении тележки по упругому монорельсу, за счет происходящих колебаний, усилие прижатия колеса может изменяться в широких пределах. Обозначим  $\beta_m$  — отношение усилия прижатия колеса тележки к ее силе тяжести. При этом будет

$$F_\mu = m_t g (1 + \beta_m)$$

Тогда решение уравнения (5) имеет вид

$$z = A_\mu \cos \sqrt{\frac{2k_\mu}{\alpha_\mu m_t}} t + B_\mu \sin \sqrt{\frac{2k_\mu}{\alpha_\mu m_t}} t + \frac{\alpha_\mu}{2k_\mu} m_t g (1 + \beta_m), \quad (7)$$

где  $A_\mu, B_\mu$  — произвольные постоянные интегрирования, устанавливающие амплитуду и фазу свободных колебаний, соответствующие начальным условиям движения тележки.

Если имеется несовпадение оси вращения коле-

са с его центром тяжести, то выражение  $F_\mu$  можно представить как  $F_\mu = q_o \cos \omega_k t$ , где  $q_o$  — значение центробежной силы;  $\omega_k$  — скорость вращения колеса во время движения тележки по монорельсу.

Отсюда

$$z = A_\mu \cos \sqrt{\frac{2k_\mu}{\alpha_\mu m_t}} t + B_\mu \sin \sqrt{\frac{2k_\mu}{\alpha_\mu m_t}} t + \frac{1}{1 - \frac{\alpha_\mu m_t \omega_k^2}{2k_\mu}} \frac{\alpha_\mu}{2k_\mu} q_o \cos \omega_k t. \quad (8)$$

В выражениях (7) и (8) первые два слагаемые учитывают свободные колебания тележки с монорельсом, а третье — вынужденные колебания. Входящие в эти выражения постоянные  $A_\mu, B_\mu$  должны выбираться так, чтобы выполнялись начальные условия. Так, если под действием силы тяжести в начальный момент движения прогиб монорельса равен статическому прогибу, а начальная скорость равна нулю, то значение прогиба монорельса будет

$$z = \frac{\alpha_\mu}{2k_\mu} m_t g (1 + \beta_m) + \frac{1}{1 - \frac{\alpha_\mu m_t \omega_k^2}{2k_\mu}} \frac{\alpha_\mu}{2k_\mu} q_o \left( \cos \omega_k t - \cos \sqrt{\frac{2k_\mu}{\alpha_\mu m_t}} t \right). \quad (9)$$

Следует отметить, что период свободных колебаний рассматриваемой системы не зависит от начальных условий и может быть найден как

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha_\mu m_t}{2k_\mu}}. \quad (10)$$

На практике скорость движения тележки изменяется постепенно. Так, когда угловая скорость  $\omega_k$  принимает наибольшее значение, влияние действия центробежных сил  $q_o$  снижается. При этом целесообразно учитывать только следующие вынужденные колебания

$$\frac{1}{1 - \frac{\alpha_\mu m_t \omega_k^2}{2k_\mu}} \frac{\alpha_\mu}{2k_\mu} q_o \cos \omega_k t.$$

От статического прогиба монорельса, определяемого как  $\alpha_\mu q_o / (2k_\mu)$ , амплитуда колебаний будет отличаться только множителем, так называемым динамическим коэффициентом центробежной силы

$$\mu_o = \frac{1}{1 - \frac{\alpha_\mu m_t \omega_k^2}{2k_\mu}}.$$

На практике данный коэффициент принимает значения больше единицы и определяется угловой скоростью вращения  $\omega_k$ , а также периодом собственных колебаний  $T$ . Используя время полного оборота колеса  $T_{ок}$  можно найти

$$\mu_o = \frac{1}{1 - \left(\frac{T}{T_{ок}}\right)^2}$$

Приведенные выше зависимости относятся для монорельса и колес идеальной формы, не имеющих впадин или выпуклостей. Если монорельс или колеса имеет впадину от уровня идеальной формы глубиной  $\Delta z$ , то при этом прогибу монорельса  $Z$  соответствует смещение тележки по вертикали  $z + \Delta z$ . Тогда уравнение вертикальных перемещений тележки можно представить в следующем виде

$$\frac{d^2(z + \Delta z)}{dt^2} m_t + \frac{2k_\mu}{\alpha_\mu} z = F_\mu. \quad (11)$$

Из (11) следует

$$\frac{d^2 z}{dt^2} m_t + \frac{2k_\mu}{\alpha_\mu} z = F_\mu - \frac{d^2 \Delta z}{dt^2} m_t. \quad (12)$$

Анализ выражения (12) показывает, что смещению  $\Delta z$  соответствует сила

$$f_z(t) = \frac{d^2 \Delta z}{dt^2} m_t.$$

При движении по монорельсовому пути возникает ряд последовательных ударов. Считаем, что в какой-то момент времени  $t_0$  возникает сила  $f_z(t_0)$ . За время  $dt_0$  эта сила изменит скорость движения тележки, что соответствует перемещению

$$z_t = \sqrt{\frac{\alpha_\mu m_t}{2k_\mu}} f_z(t_0) \sin\left(\sqrt{\frac{2k_\mu}{\alpha_\mu m_t}} (t - t_0)\right) dt_0.$$

С учетом (6) полное перемещение тележки за время  $t$  будет

$$z = \sqrt{\frac{\alpha_\mu m_t}{2k_\mu}} \int_0^t f_z(t_0) \sin\left(\sqrt{\frac{2k_\mu}{\alpha_\mu m_t}} (t - t_0)\right) dt_0. \quad (13)$$

Для незагруженного участка монорельсового пути, соединенного из гнутых отрезков (рис. 2а), уравнение продольной оси можно представить

$$\xi(x) = \frac{\Delta z}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L_{vz}}\right)$$

где  $L_{vz}$  – длина участка закругления, выполненного из гнутых отрезков монорельса.

Для этого случая выражение (12) примет вид

$$\frac{d^2 z}{dt^2} m_t + \frac{2k_\mu}{\alpha_\mu} z = F_\mu - m_t \frac{4\pi^2 V_n^2 \Delta z}{2L_{vz}} \cos \frac{2\pi x}{L_{vz}}. \quad (14)$$

где  $V_n$  – скорость движения тележки.

С учетом (13) решение уравнения (14) будет

$$z = \frac{2\pi^2 V_n^2 \Delta z}{L_{vz} \left(\frac{4\pi^2 V_n^2}{L_{vz}} - \frac{2k_\mu}{\alpha_\mu m_t}\right)} \left(\cos \frac{2\pi V_n t}{L_{vz}} - \cos \sqrt{\frac{2k_\mu}{\alpha_\mu m_t}} t\right). \quad (15)$$

Определим время движения тележки по впадине

$$T_{ov} = L_{vz} / V_n.$$

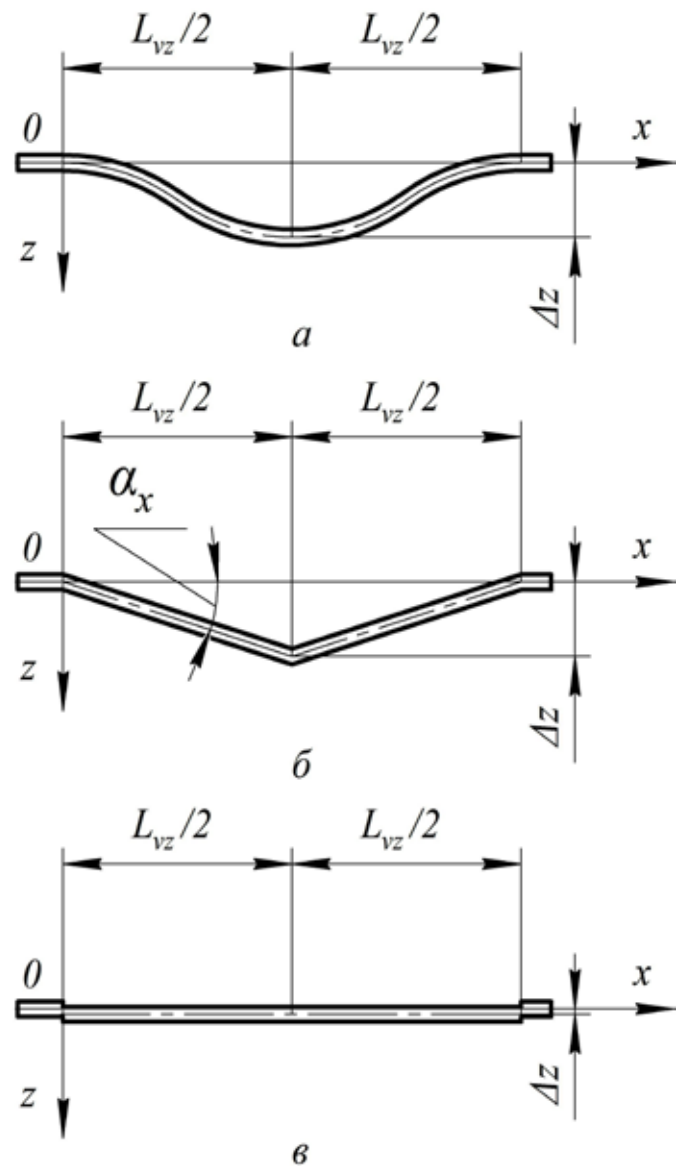


Рис. 2. Схема сопряжений секций подвесного монорельсового пути: а – из гнутых отрезков; б – из прямолинейных отрезков; в – со смещением

Тогда, используя выражение (10), уравнение (15) для любого момента времени  $t$ , принимающего значения  $0 < t < T_{ov}$ , можно записать

$$z = \frac{\Delta z}{2 \left( 1 - \frac{T_{ov}^2}{T^2} \right)} \left( \cos \frac{2\pi t}{T_{ov}} - \cos \frac{2\pi t}{T} \right). \quad (16)$$

Из (16) видно, что деформация монорельсового пути при отклонении  $\Delta z$  зависит главным образом от  $T_{ov}$ . Учитывая взаимосвязь между деформацией и действующими нагрузками, которые определяются жесткостью монорельса, следует, что для более жесткого пути одинаковые отклонения  $\Delta z$  будут приводить к более высоким нагрузкам, действующим на тележку и подвеску монорельса.

Для закруглений монорельса, состоящих из прямолинейных отрезков (секций), возникают колебания при переходе с горизонтального участка на наклонный. Если обозначить  $\alpha_x$  — угол наклона отрезка пути (рис. 2б), то смещение можно найти как

$$\xi(x) = \alpha_x x = \alpha_x V_n t.$$

При движении по горизонтальному отрезку вертикальные перемещения тележки определяются выражением (5). Далее, после прохода точки изгиба, когда вертикальная скорость еще равна нулю, считаем

$$\frac{d(z + \xi(x))}{dt} = 0.$$

В дальнейшем, при движении тележки по наклонному участку, соответственно имеем

$$\frac{d\xi(x)}{dt} = \alpha_x V_n, \left( \frac{dz}{dt} \right)_{t=0} = -\alpha_x V_n.$$

Амплитуда вынужденных колебаний на этом участке будет

$$z_x = -\frac{2\Delta z V_n}{L_x} \sqrt{\frac{\alpha_\mu m_t}{2k_\mu}} \sin \sqrt{\frac{2k_\mu}{\alpha_\mu m_t}} t. \quad (17)$$

Выражение (17) остается справедливым пока

$$0 \leq t \leq \frac{T_{ov}}{2}.$$

При  $x = \frac{L_x}{2}$  (см. рис. 2б) участок монорельсового пути меняет знак уклона. Далее, пока  $\frac{T_{ov}}{2} \leq t \leq T_{ov}$ , появляются новые колебания

$$z_x = -\frac{2\Delta z V_n}{L_x} \sqrt{\frac{\alpha_\mu m_t}{2k_\mu}} \sin \sqrt{\frac{2k_\mu}{\alpha_\mu m_t}} t + \frac{4\Delta z V_n}{L_x} \sqrt{\frac{\alpha_\mu m_t}{2k_\mu}} \sin \sqrt{\frac{2k_\mu}{\alpha_\mu m_t}} \left( t - \frac{T_{ov}}{2} \right) \quad (18)$$

При переходе на горизонтальный участок опять добавляются новые колебания, которые с учетом (17) и (18) будут

$$z_x = \frac{\Delta z T}{T_0} \left( -\sin \frac{2\pi t}{T} + 2 \sin \left( \frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi T_{ov}}{T} \right) - \sin \left( \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi T_{ov}}{T} \right) \right).$$

Если монорельсовый путь имеет впадины глубиной  $\Delta z$  (рис. 2в), то в начальный момент времени, когда тележка заезжает во впадину, возникают колебания с амплитудой

$$\Delta z \cos \left( \frac{2\pi t}{T} \right),$$

а когда выезжает

$$\Delta z \cos \left( \frac{2\pi t}{T} - T_{ov} \right).$$

### Выводы и перспективы развития направления

Полученные зависимости являются основой для разработки пространственной динамической модели подвесной монорельсовой дороги, необходимой для обоснованного выбора ее параметров.

В дальнейшем планируется провести экспериментальные исследования колебаний монорельсовой дороги, обусловленные извилистым движением подвижного состава и действием возмущений от подвесного монорельсового пути.

### Библиографический список

1. Говоруха В. В. Механика взаимодействия рельсового пути, подвижных транспортных средств и смежных устройств / В. В. Говоруха. – Д.: Лира, 2006. – 448 с.
2. Голубенко А. Л. Особенности механики контактного взаимодействия колеса и рельса в процессе его звукообразования / А. Л. Голубенко, Н. И. Кошечкина, Г. С. Носко // Вісник СНУ ім. В. Даля. – 2013. – № 18 (207). – С. 6-9.
3. Popp K. Ground Vehicle Dynamics / K. Popp, K. Schiehlen. – Berlin: Springer, 2010. – 350 p.
4. Губачева Л. О. Моделивання динамічних процесів транспортних засобів / Л. О. Губачева. – Луганськ: СНУ ім. В. Даля. – 2009. – 119 с.
5. Вербицкий В. Г. Моделирование динамического поведения монорельсового вагона / В. Г. Вербицкий, Л. Г. Лобас // Электронное моделирование. – 2000. – Т. 22, – № 1. – С. 86-94.
6. Тимошенко С. П. Прочность и колебания элементов конструкций / С. П. Тимошенко; ред. Э. И. Григолюк – М.: Наука, 1974. – 704 с.

Поступила 11.12.2013