ки с горизонтальными проходами. На ее основе для ламинарной, переходной и турбулентной областей течения получены зависимости критерия Нуссельта от критерия Рейнольдса для сплошного канала и каналов с тремя и двумя проходами. На основании полученных экспериментальных зависимостей сделана оценка величины коэффициентов теплоотдачи и критериев Nu для регенеративной насадки воздухонагревателя с горизонтальными проходами, которая может быть использована в проектных расчетах.

**Библиографический список**

1. Шкляр Ф. Р. Доменные воздухонагреватели / Ф. Р. Шкляр, В. М. Малкин, С. П. Каштанова [и др.]. – М.: Металлургия, 1982. – 176 с.

***Поступила 15.01.2016.***

УДК 621.1.016

Наука

**В. П. Иващенко /д. т. н./, Г. Г. Швачич /д. т. н./,**
**А. В. Соболенко /к. т. н./**
Национальная металлургическая академия
Украины

# Максимально параллельные вычислительные алгоритмы в решениях задач тепло- и массообмена

*Рассмотрены проблемы математического моделирования задач Дирихле на основе использования параллельных вычислительных систем кластерного типа. Особое внимание уделяется построению максимальных параллельных форм алгоритмов разностных схем, имеющих трехдиагональную структуру. Выявлены особенности распараллеливания при помощи метода перестановок. (Библиогр.: 8 назв.).*

***Ключевые слова:*** *уравнение теплопроводности; методы параллельных вычислений; алгоритмы распараллеливания.*

*The problems of mathematical design of the Dirichlet's problems are considered on the basis of the use of the parallel computer systems of cluster type. The special attention is spared to the construction of maximal parallel forms of algorithms of difference charts having a three-diagonal structure. The features of parallelization are educed through the method of transpositions.*

***Key words:*** *thermal conductivity equation; methods of parallel computing; parallelization algorithms.*

**Постановка проблемы и анализ последних достижений в данной области**

Актуальность проблемы разработки численных методов для решения многомерных систем параболических квазилинейных уравнений, описывающих процессы тепло- и массообмена, можно считать не вызывающей сомнений. Одним из наиболее интересных примеров таких систем могут служить уравнения гидродинамики и металлургической теплофизики [1; 2]. К настоящему времени сложилась такая ситуация, когда решение одномерных нестационарных задач может осуществляться с точностью, достаточной для большинства технических запросов. О массовом решении трехмерных нестационарных задач теплопроводности на нынешнем уровне технической возможности и на базе традиционных методов, разработанных к настоящему времени, по-видимому, можно говорить, только учитывая следующие обстоятельства.

Во-первых, появление современных и недорогих средств коммуникации вычислительной техники стимулировало развитие новых информационных технологий (ИТ), к которым относятся системы параллельной обработки информации. Организация параллельной обработки информационных потоков, связь проблем распараллеливания с архитектурой ПЭВМ, системы параллельного программирования, методы и алгоритмы параллельных вычислений – вот ключевые фазы развития вычислительной техники на данном этапе [3–5].

Во-вторых, к настоящему времени наметились определенные тенденции развития вычислительных методов со сложной логической структурой, имеющих по сравнению с традиционными конечно-разностными методами более высокий порядок точности [6–8]. Серьезным прогрессом в области решения многомерных пространственных задач можно считать ряд предложений, преследующих одну стереотипную цель – свести задачу трехмерного распределения области изменения переменных к последовательности схем, исключающих неизвестные величины лишь в одном направлении – попеременно в продольном, поперечном и вертикальном. Использование неявных схем приводит к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), имеющих трехдиагональную структуру [8]. Заметим, что наибольший эффект от параллельного процессора достигается применением для выполнения матричных вычислений элементов линейной алгебры.

Рассмотрим особенности распараллеливания СЛАУ, имеющих трехдиагональные структуры, на примере решения тестовой задачи для уравнения теплопроводности.

**Математическая постановка задачи**

Рассмотрим решение краевой задачи Дирихле для одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2},\ x \in [x_0, x_L],\ t \in [t_0, T] \quad (1)$$

с начальным

$$Y\big|_{t=t_0} = \varphi(x) \quad (2)$$

и граничными условиями

$$Y\big|_{x=x_0} = YW(t),\ Y\big|_{x=x_L} = YL(t)\,. \quad (3)$$

Области определения искомой функции $Y(t,x)$ в задаче (1)–(3) сопоставим сеточную область

$$\left.\begin{array}{ll} t_j = J \times Dt1,\quad j = \overline{1, M}, & Dt1 = T / M,\ M \in Z \\ x_p = p \times Dx1,\ p = \overline{0, 2m} & Dx1 = (x_L - x_0)/2m,\ m \in Z \end{array}\right\}, \quad (4)$$

здесь введение целочисленного параметра $m$ в топологию построения сеточных узлов по пространственной переменной $x$ используется для решения задачи векторизации вычислений. Требуется решить задачу дискретизации уравнения (1)–(3) на основе максимального параллельного алгоритма.

**Изложение основного материала исследований**

Рассмотрим способ дискретизации задачи (1)–(3) методом конечных разностей [7–8]. Простейшая неявная схема по времени и центральные разности по координате $x$ приводят к СЛАУ

$$C_p Y_{p+1,1} - Y_{p,1} + D_p Y_{p-1,1} = f_{p,1},\ p = \overline{1, 2m-1}, \quad (5)$$

где

$$\left.\begin{array}{l} C_p = D_p = \dfrac{A}{(1+2A)},\ A = \dfrac{\alpha}{Dx1^2} Dt1 \\ f_{p,1} = -\dfrac{YOp,1}{(1+2A)} \end{array}\right\}. \quad (6)$$

Здесь сеточные функции $Y_{0,1} = fW(t_j)$, $Y_{2m,1} = fL(t_j)$ – несут информацию о граничных (3), а правые части $f_{p,1}$ – о начальных условиях, так как сеточные функции $YO_{p,1}$ берутся с предыдущего $j$-1-го временного слоя. Следовательно, численный алгоритм (5), (6) является эволюционным и состоит в пошаговом изменении от одного момента времени $t_{j-1}$ к другому $t_j = t_{j-1} + Dt1$. Для СЛАУ (5) с матрицами вида (6) есть эффективный метод решения – метод исключения Гаусса. Этот метод реализуется прямой и обратной прогонкой. Свойства прогонки – малое число арифметических действий и слабая чувствительность к вычислительным погрешностям – делают прогонку очень удобным вычислительным алгоритмом. Однако этот алгоритм является ресурсным и не может быть векторизован.

Среди известных алгоритмов рекурсивной декомпозиции решения ленточных систем уравнений, пожалуй, только алгоритм циклической редукции перестановок допускает наиболее высокую степень векторизации. Идея этого алгоритма состоит в исключении некоторых коэффициентов СЛАУ (5) при помощи элементарных преобразований строк. Проведенные исследования показали, что процедура элементарных преобразований строк возможна только тогда, когда целочисленное значение параметра $m$ в топологии сеточных узлов (5) является четным числом. Это позволило установить глобальную симметрию по отношению к номеру $k$ центрального узла $m$, и формализовать процедуру элементарных преобразований строк методом «нечетно-четной» редукции строк СЛАУ (5) в параллельный алгоритм, имеющий максимальную степень векторизации.

Вычислительный алгоритм

Этапы редукции исключения переменных с нечетными номерами и далее переменных с четными номерами $\{2,4,6,\ldots\}$, $\{4,8,12,\ldots\}$ и т. д. реализуются с помощью бинарных конструкций:

$$\left.\begin{array}{l} Y_{p+2^{k-1},1} = -f^{k-1}_{p+2^{k-1},1} + C^{k-1}_{p+2^{k-1}} Y_{p+2^k,1} + D^{k-1}_{p+2^{k-1}} Y_{p,1}, \\ Y_{p-2^{k-1},1} = -f^{k-1}_{p-2^{k-1},1} + C^{k-1}_{p-2^{k-1}} Y_{p,1} + D^{k-1}_{p-2^{k-1}} Y_{p-2^k,1}, \end{array}\right\}, \quad (7)$$

где $k = 1, 2, \ldots$ – номера по порядку редукции.

При $k = 1$ получим:

$$Y_{p\pm1,1} = -f_{p\pm,1} + C_{p\pm,1}\begin{Bmatrix} Y_{p+2,1} \\ Y_{p,1} \end{Bmatrix} + \\ +D_{p\pm,1}\begin{Bmatrix} Y_{p,1} \\ Y_{p-2,1} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

После замещения переменных $Y_{p\pm1}$, с помощью соотношений (8) в СЛАУ (5) получим СЛАУ той же структуры:

$$C_p^1 Y_{p+2,1} - Y_{p,1} + D_p^1 Y_{p-2,1} = f_{p,1}^1, \quad (9)$$

но относительно переменных с четными номерами $\{Y_{2,1}, Y_{4,1}, ... Y_{2m-2,1}\}$, пропорциональными кратности 2.

Коэффициенты $C_p^1, D_p^1, f_{p,1}^1$ в (9) вычисляются рекуррентно по формулам при $k = 1$:

$$\left.\begin{aligned} & C_p^k = \frac{C_p^{k-1} C_{p+2^{k-1}}^{k-1}}{Det_k}, D_p^k = \frac{D_p^{k-1} D_{p-2^{k-1}}^{k-1}}{Det_k}, \\ & f_{p,1}^k = \frac{1}{Det_k}\left[ f_{p,1}^{k-1} + C_p^{k-1} f_{p+2^{k-1},1}^{k-1} + D_p^{k-1} f_{p-2^{k-1},1} \right], \\ & Det_k = 1 - C_p^{k-1} D_{p+2^{k-1}}^{k-1} - D_p^{k-1} C_{p-2^{k-1}}^{k-1}, \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

где $C_p^0, D_p^0, f_{p,1}^0$ соответствуют входным данным исходной СЛАУ (5).

Повторное применение этого процесса редукции при $k = 2$ приводит к

$$\left.\begin{aligned} Y_{p+2,1} &= -f_{p+2,1}^1 + C_{p+2}^1 Y_{p+4,1} + D_{p+2}^1 Y_{p,1}, \\ Y_{p-2,1} &= -f_{p-2,1}^1 + C_{p-2}^1 Y_{p,1} + D_{p-2}^1 Y_{p-4,1}, \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

После замещения переменных $Y_{p\pm2,1}$ в (9) получим СЛАУ трехдиагональной структуры:

$$C_p^2 Y_{p+4,1} - Y_{p,1} + D_p^2 Y_{p-4,1} = f_{p,1}^2, \quad (12)$$

где $p = \{4, 8, 12, ..., 2m - 4\}$, т. е. пропорциональны .., а данные $\{C_p^2, D_p^2, f_{p,1}^2\}$ вычисляются по формулам (10) при $k = 2$.

Повторное применение этого процесса редукции приводит к СЛАУ той же структуры, которая в общем случае принимает следующий вид:

$$C_p^k Y_{p+2^k,1} - Y_{p,1} + D_p^k Y_{p-2^k,4} = f_{p,1}^k, \quad (13)$$

где $k = \overline{0, k_*}$ – номера процессов редукции.

Таким образом, на уровне процесса декомпозиции СЛАУ (5) декомпозиция всех промежуточных систем $\{C_p^k, D_p^k, f_{p,1}^k\}$ может выполняться параллельно и может быть возмещена с вычислением переменной центрального узла $Y_{m,1}$. Следовательно, можно утверждать, что разработанный алгоритм обладает высокой степенью параллелизма.

**Вывод**

В алгоритме «нечетно-четной» редукции скрыто много возможностей распараллеливания. Его применение для решения трехдиагональных систем на параллельных вычислительных системах является весьма перспективным направлением прикладной математики. Особенно актуально его применение для решения многомерных систем параболических квазилинейных уравнений, описывающих процессы тепло-и массообмена, т. е. для решения трехмерных нестационарных задач теплопроводности.

**Библиографический список**

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика: пер. с англ. / П. Роуч. – М.: Мир, 1980. – 616 с.

2. Коздоба Л. А. Вычислительная теплофизика / Л. А. Коздоба. – Киев: Наук. Думка, 1992. – 224 с.

3. Іващенко В. П. Система автоматизованого контролю температурних режимів термічної обробки сталевого виробу / В. П. Іващенко, Г. Г. Швачич, О. В. Соболенко // Металлургическая и горнорудная промышленность. – 2015. − № 1. − С. 142−147.

4. Воеводин В. В. Математические модели и методы в параллельных процессах / В. В. Воеводин. – М.: Наука., 1986. – 29 с.

5. Системы параллельной обработки: пер. с англ. / под ред. Д. Ивенса. – М.: Мир, 1985. – 416 с.

6. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н. Н. Яненко. – Новосибирск: Наука, 1967. – 196 с.

7. Ковеня В. М. Метод расщепления в задачах газовой динамики / В. М. Ковеня, Н. Н. Яненко. – Новосибирск: Наука, 1981. – 304 с.

8. Ivaschenko V. P. Extreme algorithms of solving problems with higher order accuracy / V. P. Ivaschenko, G. G. Shvachych, E. G. Kholod // Applied and fundamental research. – Publishing House Science and Innovation Center, Ltd. (St. Louis, Missouri, USA), 2014. – P. 157–170.

***Поступила 04.02.2016***