

Л. М. Васильев /д. т. н./,  
 Д. Л. Васильев /к. т. н./  
 Н. Г. Малич /к. т. н./

ИГТМ НАН Украины, г. Днепро, Украина

Национальная металлургическая академия  
 Украины, г. Днепро, Украина

## Аналитический метод расчета предела прочности образцов горных пород при их клиновидной форме разрушения

L. M. Vasiliev /Dr. Sci. (Tech.),  
 D. L. Vasiliev /Cand. Sci. (Tech.)/  
 N. G. Malich /Cand. Sci. (Tech.)/

IGTM NAN of Ukraine, Dnipro, Ukraine

National Metallurgical Academy of Ukraine,  
 Dnipro, Ukraine

## Analytical method of calculation ultimate strength of rock specimens wedge at their form of destruction

**Цель.** Совершенствование методики расчета предела прочности образцов горных пород для управления напряженно-деформированным состоянием горного массива и эффективного разрушения горных пород при дезинтеграции.

**Методика.** Аналитически проведено моделирование процесса разрушения образцов горных пород при их клиновидной форме разрушения с использованием экспериментальных значений трех показателей свойств горных пород – предела сопротивляемости сдвигу, коэффициентов внутреннего и внешнего трения.

**Результаты.** Метод позволяет определить предел и остаточную прочность образцов горных пород с использованием трех показателей свойств, которые простыми способами могут быть установлены экспериментально.

**Научная новизна.** Впервые проведено аналитическое моделирование процесса разрушения образцов горных пород при их клиновидной форме разрушения с учетом внутреннего и внешнего трения.

**Практическая значимость.** Предложенный метод позволяет определить предел и остаточную прочность образцов горных пород с использованием трех показателей свойств, которые простыми способами могут быть установлены экспериментально в условиях горных предприятий, где результаты расчета могут быть оперативно использованы для управления состоянием горного массива и эффективного разрушения при дезинтеграции. (Ил. 5. Библиогр.: 7 назв.)

**Ключевые слова:** горная порода; предел прочности; разрушение; трещина; диаграмма «напряжение – деформация».

**Постановка проблемы.** Одной из важных информационных характеристик, необходимых для управления напряженно-деформированным состоянием массива горных пород и их эффективным разрушением при дезинтеграции, является предел прочности и остаточная прочность образцов, определяемые по диаграммам «нормальное напряжение – продольная деформация» их запредельного разрушения. Эти характеристики определяют на специальных прессах, которые имеются в отдельных НИИ Украины, например в ИГТМ и ИФГП НАНУ. Эти работы требуют высококвалифицированного персонала, а оборудование находится вдали от потребителя, где как раз и нужна оперативная информация о свойствах горных пород.

**Цель.** Разработать аналитический метод расчета пределов и остаточной прочности образцов, путем использования показателей свойств горных пород, определяемых способами, доступными для горных предприятий.

**Изложение основного материала.** Известно, что при одноосном сжатии образца правильной геометрии образуется клиновидная форма его разрушения – наиболее распространенная из пяти общеизвестных. Одна из первых попыток аналитического построения упомянутых диаграмм рассмотрена в работе [1]. Однако авторы ввели себя и читателей в заблуждение тем, что для построения диаграмм «напряжение – деформация» были взяты три показателя свойств пород. Для построения этих диаграмм нужен еще четвертый показатель  $E$  – модуль упругости породы, определение которого имеет свои сложности. Так, поставленная авторами проблема определения прочностных характеристик образца при знании трех показателей свойств пород – предела сопротивления материала сдвигу, коэффициентов внутреннего и контактного трения – осталась нерешенной. Кроме того, предстоит объяснить экспериментально установленную

Л. И. Бароном [2] закономерность снижения высоты клина с повышением временного сопротивления образца одноосному раздавливанию, а также повысить точность соответствия результатов расчета предела прочности экспериментальными данными.

Определение прочности образцов при этой форме разрушения представляется возможным производить по следующей методике. По мере развития трещины часть материала выходит из-под нагрузки. При знании в каждый момент значения координат вершины одной или двух трещин можно определить несущую часть материала образца, которая равна первоначальной площади последнего за вычетом части, вышедшей из-под нагрузки. Вышедшая из-под нагрузки часть легко определяется по геометрии развития трещины по линиям скольжения (ЛС).

При знании напряжений в вершине трещины, ее координат и закономерности распределения контактных напряжений на несущей части образца можно построить диаграмму «нормальное напряжение – ордината вершины трещины» при наличии значений упомянутых трех показателей свойств.

На рис. 1 показан образец. Центр осей координат располагаем в левом верхнем углу образца. На верхней левой половине образца контактные касательные напряжения  $\tau_x$  имеют положительный знак, а на нижней – отрицательный. На правой половине знаки имеют противоположные значения.

Математическая модель формирования диаграмм «нормальное напряжение – ордината» может быть представлена аналитически. Текущее значение суммы нормальных напряжений – силу, действующую на контактной поверхности несущей площадки, представим в виде:

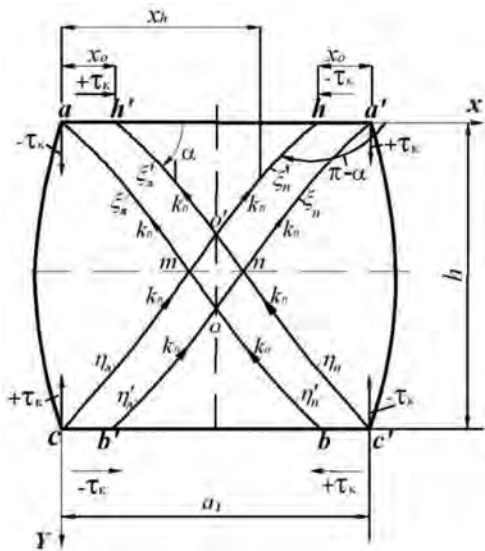


Рис. 1. Схема ЛС при клиновидной форме разрушения

$$P = 2 \int_0^{0,5a_1} \sigma_y \cdot F(x) dx, \quad (1)$$

где  $\sigma_y$  – нормальное напряжение в вершине трещины;  $F(x)$  – функция приращения нормального напряжения на единичной контактной поверхности части образца, не вышедшей из-под нагрузки.

Коэффициент, равный двум, означает две симметричные половины образца. Вышедшая из-под нагрузки часть образца определяется по значениям абсциссы вершины трещины как  $x = n \cdot \Delta h \cdot ctg \alpha$ , где  $n$  – число слоев по ординате  $y$ ,  $\alpha$  – угол наклона ЛС в вершине трещины относительно оси  $ax$ ,  $\Delta h$  – высота слоя.

Теперь, используя значение силы, действующей на несущей (не вышедшей из-под нагрузки) части образца, следует перейти к напряжениям по его начальной площади горизонтального сечения (длине  $a_1$ ). Тогда на основании (1) получим:

$$\sigma_c = 2 \int_0^{0,5a_1} \sigma_y \frac{F(x) dx}{a_1}, \quad (2)$$

В работе [3] дан метод расчета прочности горных пород при линейной связи между контактными напряжениями применительно к разрушению призматических образцов в виде усеченного клина, особенностью которого является отсутствие пересечения линиями скольжения (ЛС) вертикальной оси симметрии. В отличие от этой формы клиновидная форма характеризуется пересечением ЛС этой оси. Но математические подходы для обеих форм являются общими. Распределение контактных нормальных напряжений принимается экспоненциальным согласно [4]:

$$\sigma_{yi} = \sigma_y \cdot e^{-\frac{2f \cdot x}{h}}, \quad (3)$$

$f$  – коэффициент контактного трения;  $h$  – высота образца,  $x$  – абсцисса.

Все ЛС пересекают среднюю линию вертикальной симметрии и выходят на противоположную половину контактной плоскости. Вначале необходимо определить, в каком направлении будет развиваться трещина – сверху вниз или снизу вверх; в данном случае по ЛС  $\xi'_a$  и  $\xi'_n$  или  $\eta'_a$  и  $\eta'_n$ . Трещина начинает развиваться в направлении меньшего значения необходимой нагрузки. Сущность задачи не меняется, если будем рассматривать развитие трещины по схеме (рис. 1), начиная с верхней горизонтальной половины образца. Так более наглядно. Для этого случая нами разработана программа на ЭВМ на основе метода итераций. Отметим, что под действием вертикальной нагрузки образец приобретает выпуклую форму. Поэтому в углах об-

разца применимо правило парности касательных напряжений.

Тогда распишем конечные формулы для всего цикла развития трещины (рис. 2) для построения диаграммы «нормальное напряжение – ордината».

Для этого используем левую ЛС  $\xi'_n$  и правую ЛС  $\eta_n$  или правую ЛС  $\xi'_n$  и левую ЛС  $\eta_n$ . Как следует из рис. 2, образуется разнородная пара линий скольжения (одна выпуклая, другая – вогнутая), в точке встречи которых напряжения должны иметь одинаковые значения. Такой точкой встречи является точка  $O'$  на вертикальной линии симметрии (рис. 1). В этой точке контактные касательные напряжения равны нулю. Представим, что сначала трещина образуется в точке  $h$ . По нашим представлениям формируется в первую очередь ЛС  $\xi'_n$  (или ЛС  $\xi'_n$ ), вторая из них подключается (рис. 2), когда трещина выходит на ЛС  $\eta_n$  (или ЛС  $\eta_n$ ), нагрузка на ней возрастает и достигает значения, превышающего на первой ЛС  $\xi'_n$ .

Распишем формулы расчета пределов давления (прочности) по всему циклу развития трещин по правой ЛС  $\xi'_n$  и левой ЛС  $\eta_n$ , определяемые с учетом выхода части образца из-под нагрузки согласно выражению (2) с использованием уравнения (3) и схемы рис. 2в.

Итак, при  $x \geq 0,5 a_1$ :

$$\sigma_c = \sigma_{y\xi} \frac{h}{f} \left( \exp\left(\frac{f \cdot a_1}{h}\right) - 0,5 \exp\left(\frac{2f \cdot (a_1 - x_{\xi'_n})}{h}\right) + 0,5 \exp\left(\frac{2f \cdot (x_o)}{h}\right) - 1 \right) / a_1, \quad (4)$$

при  $x \leq 0,5 a_1$ :

$$\sigma_c = \sigma_{y\eta} \frac{h}{2f} \left( \exp\left(\frac{2f \cdot x_{\eta_n}}{h}\right) + \exp\left(\frac{2f \cdot x_o}{h}\right) - 2 \right) / a_1, \quad (5)$$

где  $\sigma_{y\xi}$  и  $\sigma_{y\eta}$  – вертикальные нормальные напряжения в вершине трещины на ЛС  $\xi'_n$  и ЛС  $\eta_n$ ;  $x_{\xi'_n}$  и  $x_{\eta_n}$  – значения абсцисс вершин трещин на ЛС  $\xi'_n$  и ЛС  $\eta_n$ .

Теперь необходимо определить напряжения  $\sigma_y$  по методу, изложенному в статье [1]. Тогда систему расчета напряжений для правой ЛС  $\xi'_n$  следует записать в виде:

$$\begin{cases} \sigma_{y\xi} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{k_n \left( 1 + \sin \rho \sqrt{1 - b_{\xi'_n}^2} \right) \cdot \exp(-2\mu \cdot \beta_{\xi'_n})}{1 - \sin \rho} - k_o \right); \\ k_o = \frac{(\mu \sigma_{y\xi} + k_n) \left( 1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_{\xi'_n}^2} \right)}{(1 + \sin \rho)}, \end{cases} \quad (6)$$

где  $\mu$  и  $\rho = \arctg \mu$  – коэффициент и угол внутреннего трения;  $k_n$  – предел сопротивления материала сдвигу;  $\beta_{\xi'_n}$  – угол поворота ЛС  $\xi'_n$  от контактного трения в вершине трещины;  $k_o$  – эффективное касательное напряжение в точке  $O'$ ;

$$b_{\xi'_n} = \frac{f \cdot \sigma_y \left( 1 - \frac{2y}{h} \right) \cdot \exp\left(\frac{2f \cdot (a_1 - x_{\xi'_n})}{h}\right)}{k_n + \mu \sigma_y \cdot \exp\left(\frac{2f \cdot (a_1 - x_{\xi'_n})}{h}\right)};$$

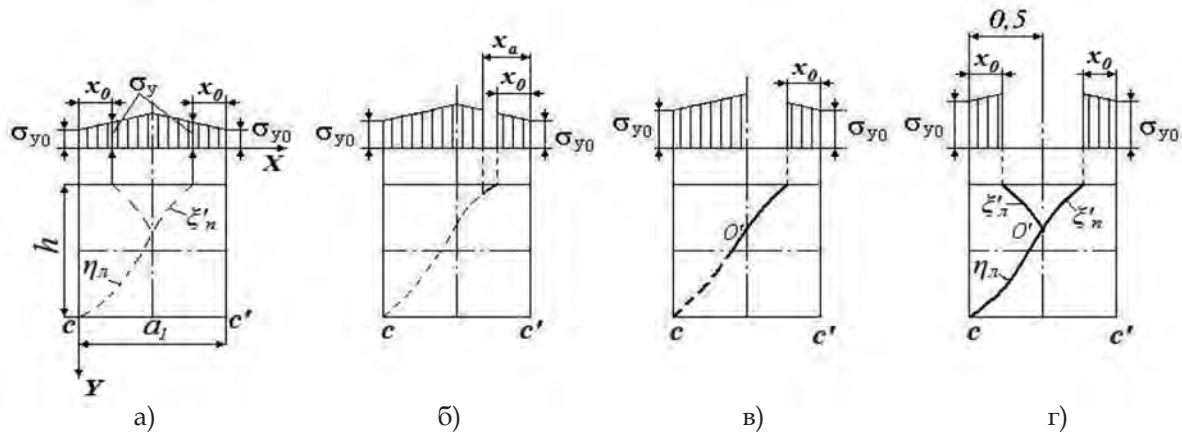
$$\beta_{\xi'_n} = -\frac{1}{2} \arctg \frac{b_{\xi'_n} \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1 - b_{\xi'_n}^2}},$$

При этом необходимо соблюдать условие:  $x \geq 0,5 a_1$   $x_{\xi'_n} = a_1 - x$ .

Угол наклона ЛС  $\xi'_n$  определяется по формуле:

$$\alpha_{\xi'_n} = \frac{3\pi}{4} - \rho/2 + \beta_{\xi'_n}. \quad (7)$$

Теперь рассмотрим развитие трещины по ЛС  $\eta_n$  при  $x \leq 0,5 a_1$ . Напряжения  $\sigma_{y\eta}$  определяются по системе уравнений:



а) – в момент предразрушения; б) – в момент образования стороны клина; в) – в момент формирования стороны клина; г) – в момент образования клина.

Рис. 2. Схема образования клина при сжатии образца горной породы



$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{y_{\eta}} &= \frac{1}{\mu} \left( \frac{k_n (1 + \sin \rho \sqrt{1 - b_{\eta}^2}) \cdot \exp(-2\mu(\beta_{\eta} + \beta_c))}{1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_c^2}} - k_c \right); \\ k_c &= \frac{(\mu \sigma_{y_{\eta}} + k_n) (1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_{\eta}^2})}{(1 + \sin \rho \sqrt{1 - b_c^2}) \cdot \exp(-4\mu\beta_c)}, \end{aligned} \right. \quad (8)$$

где  $b_{\eta} = \frac{f \left(1 - \frac{2y}{h}\right) \cdot \sigma_{y_{\eta}} \exp\left(\frac{2f \cdot x_{\eta}}{h}\right)}{k_n + \mu \sigma_{y_{\eta}} \exp\left(\frac{2f \cdot x_{\eta}}{h}\right)}$ ;  $b_c = -\frac{f \cdot \sigma_{y_{\eta}}}{k_c + \mu \sigma_{y_{\eta}}}$ .

$\beta_{\eta}$  и  $\beta_c$  – углы поворота ЛС  $\eta$  от контактного трения самой линии и на нижней контактной плоскости в точке  $c$ ;

$$\beta_{\eta} = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b_{\eta} \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1 - b_{\eta}^2}};$$

$$\beta_c = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b_c \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1 - b_c^2}}.$$

Угол наклона ЛС  $\eta$  описывается формулой:

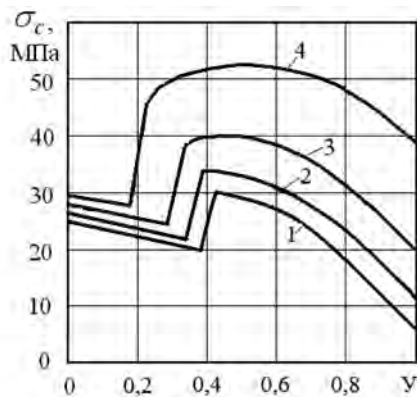
$$\alpha_{\eta} = \frac{3\pi}{4} - \rho/2 - \beta_{\eta}. \quad (9)$$

При этом необходимо соблюдать условие:  $x_{\eta} \leq 0,5a$  и  $x_{\eta} = x$ .

Теперь по изложенным формулам (3)–(9) проведем построение запредельных кривых диаграмм «напряжение – ордината» кубического образца со сторонами  $a_1 = h = 1,0$  при  $k_n = 10$  МПа,  $f = 0,25$  и различных значениях угла внутреннего трения.

На рис. 3 приведены эти теоретические диаграммы. По внешнему виду запредельных кривых они хорошо согласуются с диаграммами, полученными на прессах при разрушении образцов из пород алевролита и аргиллита [5].

Анализ запредельных кривых разрушения свидетельствует, что имеет место сброс напря-



1 –  $\rho = 22^\circ$ , 2 –  $\rho = 26^\circ$ , 3 –  $\rho = 30^\circ$ , 4 –  $\rho = 36^\circ$

Рис. 3. Диаграммы «напряжение – ордината»

жения  $\sigma_c$  в момент перехода с ЛС  $\xi_n'$  на ЛС  $\eta$ . Сбросы формируют площадки, напоминающие площадки текучести при деформировании металлов. Кривые имеют известный так называемый *зуб текучести*. Мы эти площадки объясняем переходом разрушения с выпуклой ЛС  $\xi_n'$  на вогнутую ЛС  $\eta$ , имеющие разный характер запредельных кривых. Развивается одна трещина до пересечения оси симметрии. Вторая (левая) трещина, формирующая клин, примыкает к правой последовательно с некоторым небольшим опозданием. Согласно наблюдениям Б. Поля [6], в «испытаниях на сжатие косое и коническое (клиновое) разрушение происходит почти одновременно». С этого можно сделать вывод, что процесс формирования клина идет неодновременно, с некоторой задержкой во времени. Как видно из рис. 3, имеет место перегиб кривых, и линейность их заканчивается при низких значениях  $\sigma_c$ . В. В. Виноградов [5] отмечает, что при конусообразной (клиновой) форме разрушения и нагрузке свыше 70 % максимальной имеет место существенная нелинейность. Добавим, что в запредельной кривой идет так называемое упрочнение материала согласно возрастающей кривой с последующим ее спадом. На рис. 4 приведена теоретическая ниспадающая зависимость высоты клина от возрастания предела прочности образца, что экспериментально и наблюдал Л. И. Барон [2].

Проведем сопоставление расчетных значений предела прочности при  $k_n = 10,0$  МПа и  $f = 0,25$  с экспериментальными данными (рис. 5), позаимствованными из кадастра [7], пересчитанные под  $k_n = 10,0$  МПа.

Сравнение этих значений свидетельствует о том, что в совокупности данных сходимость составляет 82–85 % при  $f = 0,25$ . Надо отметить, что в кадастре не представлены отдельно клиновая и диагональная формы. Известно, что слабые породы имеют наибольшую вероятность разрушения по диагональной форме, которая имеет, по нашим расчётам, более высокую достоверность, чем клиновая форма.

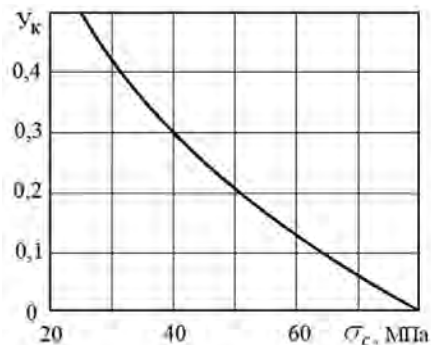


Рис. 4. Зависимость высоты клина от предела прочности образца

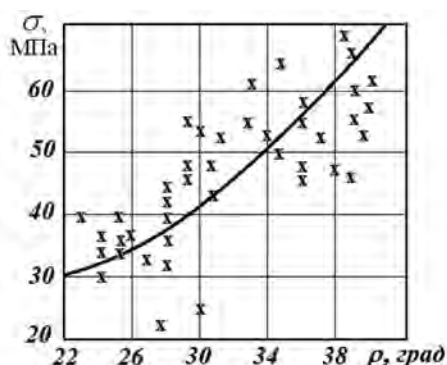


Рис. 5. Зависимость предела прочности образца от угла внутреннего трения при клиновом разрушении

### Выводы

1. Разработан аналитический метод построения диаграмм «напряжение – ордината» при клиновом разрушении горных пород с использованием трех показателей их свойств ( $k_n$  – предела сопротивления материала сдвигу,  $f$  и  $\mu$  – коэффициентов контактного и внутреннего трения), доступных для экспериментального определения в лабораториях производственных предприятий. По максимальным и минимальным значениям нормальных напряжений запредельных кривых диаграмм могут быть определены значения пределов и остаточной прочности образцов, которые по значению равноценны получаемым по диаграммам «нормальное напряжение – продольная деформация».

2. Запредельные кривые диаграмм имеют сбросы напряжений, подтверждающиеся экспериментальными наблюдениями. В момент сброса возникают площадки в виде так называемого *зуба пластичности*, образование которых мы объясняем переходом процесса разрушения с выпуклой линии скольжения на вогнутую, формирующую разный характер запредельных кривых. В средней части запредельные кривые имеют кривые упрочнения, не получившие пока теоретического обоснования. Мы это явление объясняем переходом процесса разрушения с выпуклой линии скольжения на вогнутую линию скольжения, характеризующуюся такой особенностью. Получена теоретическая ниспадающая зависимость высоты клина от возрастания предела прочности образца, что экспериментально и наблюдал Л. И. Барон.

3. В процессе построения запредельных кривых представляется возможным определение прочности образцов при их одноосном сжатии. Сопоставление расчетных пределов прочности с экспериментальными данными подтвердило достоверность разработанного метода в пределах 82–85 %. Это позволит улучшить методы управления горным массивом, а также даст возможность повысить эффективность дезинтегра-

ции горных пород и уменьшить при этом энергозатраты.

4. В перспективе планируется проверка метода при других формах разрушения (диагональной, продольной и взрывоподобной).

### Библиографический список / References

1. Васильев Л. М. Аналитический метод построения диаграмм «напряжение – деформация» образцов горных пород при их клиновом разрушении / Л. М. Васильев, Д. Л. Васильев // Известия ВУЗов. Горный журнал. – 2013. – № 7. – С. 80–87.

Vasil'ev L. M., Vasil'ev D. L. *Analiticheskiy metod postroeniya diagramm "napryazhenie – deformatsiya" obraztsov gornykh porod pri ikh klinovoy forme razrusheniya*. Izvestiya VUZov. Gornyy zhurnal. 2013, no.7, pp. 80-87.

2. Барон Л. И. Горно-техническое породоведение / Л. И. Барон. – М.: Наука, 1977. – 324 с.

Baron L. I. *Gorno-tekhnicheskoe porodovedenie*. Moscow, Nauka. 1977, 324 p.

3. Васильев Л. М. Аналитическое построение диаграмм «напряжение – деформация» образцов горных пород при их усеченно – клиновом разрушении / Л. М. Васильев, Д. Л. Васильев, О. А. Усов // *Металлургическая и горнорудная промышленность*. – 2013. – № 6. – С. 81–84.

Vasil'ev L. M., Vasil'ev D. L., Usov O. A. *Analiticheskoe postroenie diagramm "napryazhenie – deformatsiya" obraztsov gornykh porod pri ikh usechenno - klinovoy forme razrusheniya*. Metallurgicheskaya i gornorudnaya promysh-lennost'. 2013, no. 6. pp. 81-84.

4. Сторожев М. В. Теория обработки металлов давлением / М. В. Сторожев, Е. А. Попов. – М.: Машиностроение, 1967. – 423 с.

Storozhev M. V., Popov E. A. *Teoriya obrabotki metallov davleniem*. Moscow, Mashinostroenie. 1967, 423 p.

5. Виноградов В. В. Геомеханика управления состоянием массива вблизи горных выработок / В. В. Виноградов. – К.: Наук. думка, 1989. – 190 с.

Vinogradov V. V. *Geomekhanika upravleniya sostoyaniem massiva vblizi gornykh vyrobotok*. Kyiv, Nauk. dumka. 1989, 190 p.

6. Поль Б. Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения / Б. Поль // *Разрушение*. – М.: Мир, 1975. – Т. 2. – С. 336–520.

Pol' B. *Makroskopicheskie kriterii plasticheskogo techeniya i khrupkogo razrusheniya*. Razrushenie. Moscow, Mir. 1975, vol. 2, pp. 336-520.

7. Справочник (кадастр) физических свойств горных пород. – М.: Недра, 1975. – 277 с.

*Spravochnik (kadastr) fizicheskikh svoystv gornykh porod*. Moscow, Nedra. 1975, 277 p.

**Purpose.** Improving the method for calculating the limit of rock samples strength to control the stress-strain state of the rock mass and effective destruction of rocks during disintegration.

**Methodology.** Analytically, the simulation of the process of destruction of rock samples in their V-shaped fracture using the experimental values of the three indicators of rock properties – resistance to shear limit, coefficients of internal and external friction.

**Findings.** The method allows to define and limit the residual strength of rock samples using three indicators properties that simple methods can be established experimentally.

**Originality.** For the first time, an analytical modeling of the fracture image of samples of rocks at their V-shaped fracture in view of the internal and external friction.

**Practical value.** The proposed method allows to define and limit the residual strength of rock samples using three indicators of the properties that are simple ways can be established experimentally in terms of mining enterprises, where calculation results can be promptly used to control the state of the rock mass and effective destruction upon disintegration.

**Key words:** rock; strength limit; destruction; crack; diagram “voltage-ordinate”.

Рекомендована к публикации  
д. т. н. М. С. Четвериком

Поступила 28.09.2016



УДК 622.271.452

С. К. Молдабаев /д. т. н./

Е. Абен

Е. В. Бабий /к. т. н./

Казахский национальный исследовательский технический университет имени К. И. Сатпаева, г. Алматы, Республика Казахстан  
e-mail: moldabaev\_s\_k@mail.ru

Казахский национальный исследовательский технический университет имени К. И. Сатпаева, г. Алматы, Республика Казахстан  
e-mail: aeke@bk.ru

Институт геотехнической механики им. Н. С. Полякова Национальной академии наук Украины, г. Днепро, Украина  
e-mail: katebabiy@yandex.ua

## Оптимизации положения нижней части вскрышной зоны карьера при новом развитии горных работ

S. K. Moldabayev /Dr. Sci. (Tech.)/

Y. Aben

K. B. Babiy /Cand. Sci. (Tech.)/

Kazakh National Research Technical University after K. I. Satpayev, Almaty, Republic of Kazakhstan

e-mail: moldabaev\_s\_k@mail.ru

Kazakh National Research Technical University after K. I. Satpayev, Almaty, Republic of Kazakhstan

e-mail: yeldos.aben@gmail.com

Institute of Geotechnical Mechanics N. S. Polyakova NAS Ukraine, Dnipro, Ukraine  
e-mail: katebabiy@yandex.ua

## Optimization of the lower part of the zone stripping career in the new development of mining

**Цель.** Апробация алгоритма оптимизации положения рабочего борта по этапам отработки нижней части вскрышной зоны карьера с учетом выдерживания необходимого соотношения низкосолевого и высокосолевого углей во вскрываемых его запасах.