

А. Д. Учитель /д. т. н./,
Ю. А. Малиновский /к. т. н./
Г. В. Данилина /к. т. н./, С. Ю. Даценко,
Е. В. Омельченко

Национальная металлургическая академия
Украины, г. Днепро, Украина
Криворожский колледж НАУ, г. Кривой Рог,
Украина

Влияние параметрического резонанса на механизм разрушения контактирующих поверхностей при трении и изнашивании

A. D. Uchitel /Dr. Sci. (Tech.)/,
Yu. A. Malinovsky /Cand. Sci. (Tech.)/
G. V. Danilina /Cand. Sci. (Tech.)/,
S. Yu. Datsenko, E. V. Omelchenko

National Metallurgical Academy of Ukraine, Dnipro,
Ukraine
Krivoy Rog College of NAU, Krivoy Rog, Ukraine

Influence of parametric resonance on the mechanism of destruction of contacting surfaces during training and wearing

Цель. Исследование влияния параметрического резонанса в зоне взаимодействия движущихся контактирующих поверхностей на трение и износ при протекании деформационно-волновых процессов перед движущимся штампом.

Методика. Для обоснования причин возникновения параметрических колебаний на контактирующих поверхностях предложена физическая модель, в которой присутствует нелинейное сухое трение между взаимодействующими деталями, зависящее от скорости их относительного перемещения, которое является источником возникновения параметрических (авто) колебаний на участке перед подвижной деталью.

Использованы приемы, позволяющие определить длину деформированного участка поверхности детали, количество полуолн на участке, а также применены уточненные методы вычисления высот деформационных микронеровностей.

Научная новизна работы заключается в том, что выявлена причина интенсивного изнашивания взаимодействующих деталей, которая заключается в нарастании амплитуд колебаний поверхностных слоев деталей в результате проявления эффекта параметрического резонанса.

Практическая значимость работы состоит в достижении большей достоверности при определении деформационных микронеровностей за счет использования более точного выражения для кривизны изогнутой оси балки, а также учете нелинейных зависимостей между продольными и поперечными деформациями продольной оси гипотетической балки при потере ею продольной устойчивости.

Ключевые слова: трение, износ, упругая устойчивость, балка на упругом основании, параметрическая нагрузка, уравнение Матье, радиус кривизны балки, диаграмма Айнса – Стретта, метод Бубнова – Галеркина. (Ил. 4. Библиогр.: 7 назв.)

Постановка проблемы. Исследования вопросов трения и изнашивания деталей машин, проведенные крупными исследовательскими организациями? показали, что при взаимодействии двух контактирующих объектов, независимо от принятой к рассмотрению гипотезы трения, на соприкасающихся поверхностях появляются волны растяжения и сжатия [1] (рис. 1). Фактически наша задача сводится к контактной задаче теории упругости с учетом нелинейных эффектов трения (с падающей характеристикой относительно скорости взаимного проскальзывания на соприкасающихся поверхностях).

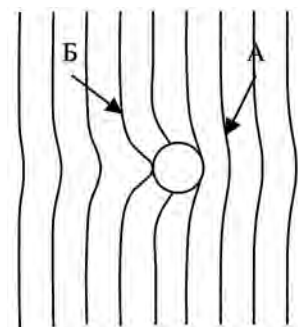


Рис. 1. Твердый индентор взаимодействует с упругим полупространством: видно сжимающее напряжение в зоне А и растягивающее в зоне Б

Непосредственно выполнить постановку и осуществить решение такой задачи с позиций теории упругости при наличии особенностей на соприкасающихся поверхностях весьма затруднительно. Поэтому в первом приближении, с позиций качественного рассмотрения, примем более простую расчетную схему задачи, которая сводится к представлению поверхностного слоя каждого из полупространств в виде балки на упругом основании с шарнирно закрепленными концами. Такая балка опирается на более податливое основание, чем поверхностные слои полупространств.

Предложенная схема позволяет наглядно воссоздать физическую картину процесса. По длине балка ограничивается в одной крайней точке – области контакта подвижного (штампа) и неподвижного полупространства и в другой крайней точке – области затухания упругих волн сжатия по длине неподвижного полупространства (балки), рис. 2.

Далее, рассматривая контактное взаимодействие полупространств, в качестве нагрузок на балку принимаем контактные напряжения в зоне взаимодействия деталей (σ_x, τ_{xy}), обусловленные нормальной нагрузкой и силами трения.

Наша контактная задача может быть рассмотрена как две связанные задачи – одна в области под штампом, а другая в области перед штампом. Первая задача позволила установить, что при взаимодействии двух деталей имеют место интервалы их совместного и относительного движений, иначе присутствует неравномерность движения, которая обусловлена наличием положительной разности между силами трения движения и покоя [2].

Методика исследований. Изложение основного материала. Таким образом, силы трения на контакте двух деталей не постоянны, а зависят от скорости их относительного скольжения. На основании [2] сила трения на контактах двух деталей может быть представлена в виде:

$$T(t) = T(x) = T_0 \text{sign}(\dot{x}) + b\dot{x} + c\dot{x}^3, \quad (1)$$

где T_0 – установившееся значение силы трения покоя;

b – коэффициент отрицательного демпфирования;

c – коэффициент, характеризующий демпфирование, пропорциональное кубу скорости;

x – продольная координата при смещении двух деталей.

Наличие такого характера силового взаимодействия деталей является предпосылкой возникновения фрикционных автоколебаний как в области под штампом, так и перед штампом.

При этом нестационарная сила $T(x)$ – является внешней нагрузкой для тонких слоев полупространства, находящихся в области перед штампом. Учитывая локальный характер внешнего нагружения поверхностных слоев, формализуем этот участок полупространства в виде «подвижной» балки фиксированной длины на упругом основании и на подвижных опорах, нагруженной продольной нестационарной нагрузкой

$$T(t) = T(x).$$

Так как сила трения зависит от относительной скорости взаимного проскальзывания деталей, то наша гипотетическая балка будет нагружена не-

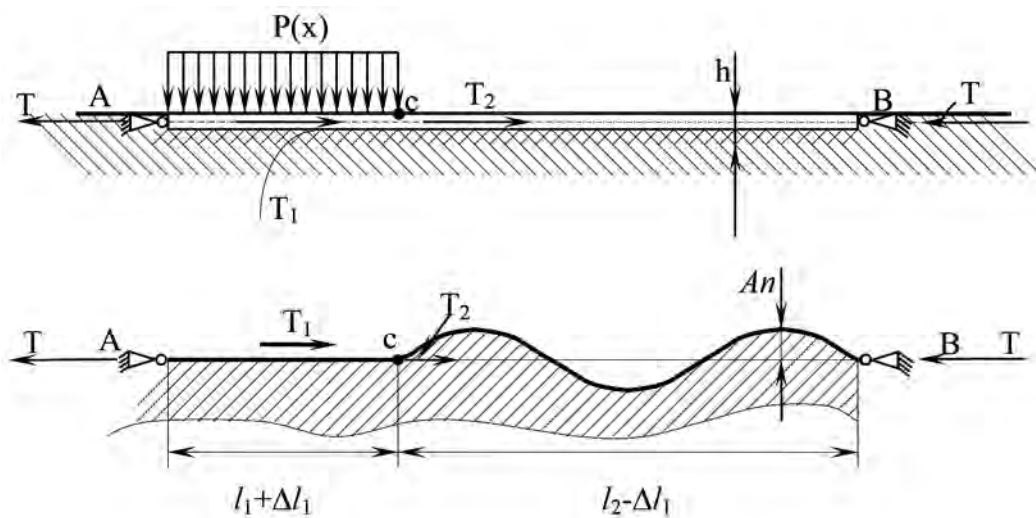


Рис. 2. Гипотетическая балка на упругом основании в подвижной системе координат

Принятые обозначения:

h – толщина балки; A_n – амплитуда деформационных микронеровностей; l_1, l_2 – длины участков балки; Δl_1 – продольная деформация участка l_1 ; $P(x), T, T_0, T_1, T_2$ – действующие усилия.

стационарной силой $T(t) = T \left[\dot{x}(t) \right]$, которая при определенном соотношении параметров может привести к возникновению динамических и статических неустойчивых состояний балки. Рассматривая нашу движущуюся балку относительно подвижной системы координат, перемещающуюся относительно продольной оси со скоростью V (скорость перемещения подвижной детали), составим дифференциальное уравнение, описывающее поведение упругой линии балки на упругом основании, сжатой нестационарной силой $T(t) = T(x)$ и имеющей шарнирное опирание, в следующем виде:

$$E_n J \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + T(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + cw + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

где $T(t) = T(x)$ – нестационарная сила трения между взаимодействующими деталями, приложенная к гипотетической балке в виде продольной нагрузки;

E_n – модуль упругости поверхностного (упрочненного) слоя полупространства (гипотетической балки);

J – момент инерции гипотетической балки;

$w(x, t)$ – динамический прогиб гипотетической балки под действием нестационарной сжимающей силы $T(t)$;

c – коэффициент жесткости упругого основания балки (коэффициент постели);

m_0 – масса единицы длины балки.

Дифференциальное уравнение (2) рассматриваем совместно с граничными условиями

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 : x = 0; x = l \quad (3)$$

и начальными условиями

$$\begin{aligned} w(x_0, 0) &= w_0(x_0) \\ \frac{\partial w(x_0, 0)}{\partial t} &= V_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Если характер изменения силы трения (1) близок к гармоническому, то силу трения, представленную выражением (1), удобно записать в виде:

$$T(t) = T_0 + T_3 \sin \omega_1 t, \quad (5)$$

где T_0 – установившееся значение силы трения (стационарное значение);

T_3 – амплитудное значение переменной части силы трения, если характеристику трения можно представить в виде квазигармонической функции времени (t) ;

ω_1 – первая собственная частота колебаний гипотетической балки без учета трения (принимаем, что автоколебательный процесс происходит с первой собственной частотой колебаний гипо-

тетической балки, что подтверждается многочисленными экспериментами с автоколебательными системами).

Вышеприведенное дифференциальное уравнение продольно-изгибных колебаний балки на упругом основании, по сути, представляет собой дифференциальное уравнение, описывающее параметрические колебания балки под действием сил «сухого» трения.

Запишем выражения для наибольшей и наименьшей силы трения (по характеристике трения), как функции относительной скорости скольжения груза p в виде:

$$T_3 + T_0 = f_0 p, \quad (6)$$

$$T_0 - T_3 = f p. \quad (7)$$

В приведенных выражениях $T_3 + T_0$ – наибольшее значение силы трения (касательной силы); $T_0 - T_3$ – наименьшее значение силы трения; f_0 – коэффициент трения покоя при взаимодействии двух деталей; f – коэффициент трения скольжения.

Исходя из выражений (6), (7), можно определить T_3, T_0 при изменении $T(t)$ по квазигармоническому или релаксационному закону.

Решение уравнения (2) можно выполнить по методу Бубнова –Галеркина [3] в виде:

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \varphi_k(x). \quad (8)$$

В нашем случае, учитывая граничные условия (3), запишем решение (2) в виде:

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{\pi k x}{e}. \quad (9)$$

Подставляя выражение (9) в дифференциальное уравнение (2), получим совокупность обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций $f_k(t)$, где $k = 1, 2, 3, \dots, \infty$:

$$\begin{aligned} f_k + \left[\frac{E_n J}{m_0} \left(\frac{\pi k}{l} \right)^4 - \frac{T_0}{m_0} \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{T_3}{m_0} \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 \sin \omega t + \frac{c}{m_0} \right] f_k = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

где l – длина гипотетической балки, в зоне перед движущимся штампом, может быть представлена в виде $l = n\lambda$;

n – число полуволин гипотетической балки, потерявшей продольную устойчивость;

λ – длина одной такой полуволины.

Число полуволин гипотетической балки, потерявшей устойчивость, находим в соответствии с

[4], как действительный положительный корень квадратного уравнения:

$$n^2 + \frac{2}{2 - \frac{T\lambda^2}{E_n J \pi^2}} n + \frac{1}{2 - \frac{T\lambda^2}{E_n J \pi^2}} = 0. \quad (11)$$

Длину одной полуволны балки находим в соответствии с [4] из выражения:

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{4E_n J}{E}}. \quad (12)$$

Отметим, что дифференциальные уравнения (10) систему не составляют и представляют собой уравнения с параметрическим возбуждением колебаний.

Выражение в квадратных скобках является квадратом «плавающей» частоты колебаний системы для каждого значения k .

Представленные уравнения (10) в ряде случаев описывают «псевдопараметрические» резонансы при воздействии на механическую систему, так как они оказываются более опасными, чем системы с обычным возбуждением окolorезонансных эффектов. Дифференциальные уравнения (10) весьма сложны, точного решения которых в элементарных функциях не существует, поэтому для них можно записать некоторые приближенные решения [5]. Однако об устойчивом (или неустойчивом) поведении совокупности уравнений можно судить по виду дифференциальных уравнений (10). Для дальнейшего анализа целесообразно привести уравнения (10) к некоторому стандартному виду. Далее полагаем $\omega_k t = 2\tau - \frac{\pi}{2}$, то есть, производя замену переменной, перейдем к уравнениям:

$$f_k'' + [a_k + 2q_k \cos 2\tau] f_k = 0 \quad (13)$$

Полученные уравнения называются дифференциальными уравнениями (с переменными коэффициентами при f_k) Матъе, где:

$$a_k = \frac{4}{\omega_k^2} \left[\frac{E_n J}{m_0} \left(\frac{\pi k}{l} \right)^4 - \frac{T_0}{m_0} \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 + \frac{c}{m_0} \right];$$

$$2q_k = \frac{4}{\omega_k^2} + \frac{T_1}{m_0} \left(\frac{\pi k}{2} \right)^2.$$

Приведенные коэффициенты называются коэффициентами Матъе.

Для определения динамической устойчивости колебательной системы, описываемой уравнениями (10), (13), не прибегая к решению уравнений, воспользуемся диаграммой Айнса – Стретта применительно к уравнениям Матъе. Для этого в каждом из уравнений (13) определяем параметры a_k, q_k для каждого значения k . Эти значения a_k, q_k откладываем на диаграмме Айнса – Стретта (рис. 3), если точка с координатами a_k, q_k попадает

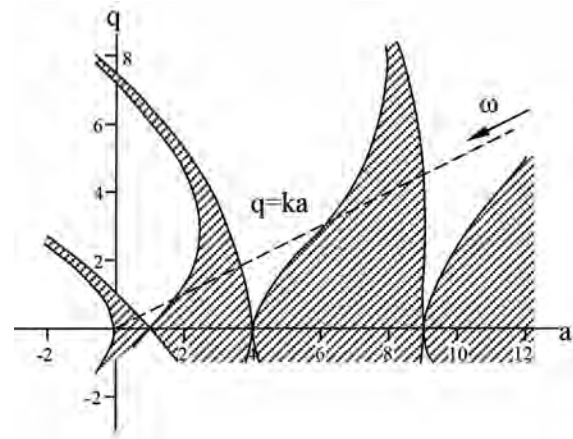


Рис. 3. Диаграмма Айнса – Стретта

Штриховой луч является геометрически местом изображающих точек данной механической системы; при увеличении частоты ω изображающая точка приближается к началу координат.

в заштрихованную область диаграммы, то колебательный режим является устойчивым, и при этом не произойдет потеря динамической устойчивости колеблющегося поверхностного слоя полупространства, то есть гипотетической балки.

Для данной механической системы наиболее вероятной причиной возникновения параметрических колебаний являются периодические изменения (квазигармоническое или релаксационное) параметрических нагрузок. Параметрические – это такие нагрузки, при статических действиях которых возможна потеря устойчивости гипотетической балки в Эйлеровом смысле.

С целью определения частот (переменных, плавающих) и амплитуд колебаний целесообразно разрешить совокупность дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций времени $f_k(t)$, которые после их определения подставляем в тригонометрический ряд (8). Обращаясь к уравнениям (10), видим, что совокупность уравнений является нелинейной. Для построения количественных решений уравнений (10) воспользуемся приближенным методом решения нелинейных дифференциальных уравнений, методом ВКБ (Вентцеля – Крамерса – Бриллюена). В соответствии с методом, искомое уравнение представим в виде:

$$f_k''(t) + \Omega_k^2(t) f_k(t) = 0. \quad (14)$$

В приведенном уравнении (14) функция $\Omega_k(t)$ имеет смысл собственной частоты системы, «плавающей» около своего среднего значения:

$$\Omega_k(t) = \sqrt{\frac{EJ}{m_0} \left(\frac{\pi k}{l} \right)^4 - \frac{T_0}{m_0} \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 + T_3 \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 \sin \omega_1 t + \frac{c}{m_0}}, \quad (15)$$

где ω_1 – одна из собственных частот колебаний балки на упругом основании, для случая отсут-

ствия трения (собственные колебания или, точнее, автоколебания могут возникнуть с одной из собственных частот системы, например, первой или второй). Как правило, отношение $\frac{T_3}{T_0}$ при устойчивых колебаниях составляют не более 10–15 %. При параметрическом резонансе колебания носят нарастающий, неустановившийся характер.

Решение каждого уравнения (15) согласно методу ВКБ имеет вид:

$$f(t) = \Omega_k^{1/2}(t) \left(c_{1k} \cos \int \Omega_k(t) dt + c_{2k} \sin \int \Omega_k(t) dt \right). \quad (16)$$

Выражение (16) может быть принято в качестве приближенного, если выполняется условие:

$$\left| 0,5 \frac{\ddot{\Omega}_k(t)}{\Omega_k^3(t)} - 0,75 \left(\frac{\dot{\Omega}_k(t)}{\Omega_k^2(t)} \right)^2 \right| \ll 1. \quad (17)$$

Постоянные C_{1k}, C_{2k} определяем из начальных условий:

$$f_k(0) = f_{k0}; \quad \dot{f}_k(0) = \dot{f}_{k0}. \quad (18)$$

Тогда окончательно получим:

$$f_k(t) = \sqrt{\frac{\Omega_{k0}}{\Omega_k}} f_{k0} \cos \int_0^t \Omega_k(t) dt + \frac{1}{\Omega_k \Omega_{k0}} \times \left(\dot{f}_{k0} \frac{\dot{\Omega}_k}{\Omega_{k0}} f_{k0} \right) \sin \int_0^t \Omega_k(t) dt, \quad (19)$$

где $\Omega_{k0} = \Omega_k(0); \quad \dot{\Omega}_{k0} = \dot{\Omega}_k(0)$.

На практике наиболее опасным является режим, соответствующий $k = 1$. Описанная нами совокупность уравнений является отдельными уравнениями с периодически изменяющейся частотой Ω_k . Такая совокупность обладает положением равновесия, которое может оказаться неустойчивым при определенных условиях.

Можно указать качественное решение уравнений (10) в виде [5]:

$$f_k(t) = C_{1k} e^{\mu t} \psi_{1k}(t) + C_{2k} e^{-\mu t} \psi_{2k}(t). \quad (20)$$

Выражение (20) является полным решением уравнений Матье, где:

$\mu = \mu(a_k, q_k)$ – константа, зависящая от коэффициентов a_k, q_k ;

$\psi_{1k}(t), \psi_{2k}(t)$ – некоторые периодические функции времени;

C_{1k}, C_{2k} – произвольные постоянные искомым решений.

В нашей системе «движущийся штамп и гипотетическая балка» могут возникать параметрические колебания под воздействием малых возмущений. Первое слагаемое (20) представляет собой колебательный процесс с возрастающими амплитудами, поэтому амплитудные значения

решения (20) могут достигать значительных величин. Такие колебания, вызванные неустойчивостью равновесного состояния системы, называются параметрическим резонансом.

Параметрический резонанс является наиболее опасной формой параметрических явлений, по своим внешним проявлениям он похож на обычный резонанс. Однако согласно (20) амплитуда колебаний при параметрическом резонансе возрастает по экспоненциальному закону, а при обычном резонансе – по линейному закону. Параметрический резонанс может развиваться при наличии трения [5], что характерно для нашей задачи, при этом параметрический резонанс может возникать в тех случаях, когда отношение собственной частоты колебаний системы к половине частоты изменения коэффициентов уравнения (10) близко к целому числу.

Для решения квазилинейной задачи (2), (3), (4) воспользуемся методом Бубнова – Галеркина совместно с приближенным методом нелинейной механики – ВКБ. Такое решение дает приемлемые результаты в моменты времени, предшествующие потере устойчивости гипотетической балки или в начальный момент при потере устойчивости. Сам факт устойчивого состояния системы определяется, как было отмечено, по диаграмме Айнса – Стретга.

После потери устойчивости гипотетическая балка получает нелинейные (неупругие) волнообразные деформации. Поэтому в качестве деформационной микронеровности принимаем половину амплитуды волны деформации. В результате потери устойчивости балка получает остаточные деформации, которые характеризуют образовавшиеся дополнительные микронеровности, для определения которых достаточно рассмотреть вместо динамического уравнения (2) его статический аналог [6]. Из преобразованного уравнения можно определить параметрическую нагрузку:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{T}{E_n J} \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{C}{E_n J} w = 0. \quad (21)$$

В данном уравнении (21) введены те же обозначения, что и в уравнении (2) с частными производными, только:

$w = w(x)$ – статический прогиб гипотетической балки;

$T = T_0$ – стационарное (параметрическое) значение сжимающей силы.

Критическая (параметрическая) нагрузка может быть определена согласно [7] из выражения:

$$T_0 = T_{kp} = 2\sqrt{E_n J C} = 2\sqrt{\frac{E E_n}{2} J^3 \sqrt{\frac{E}{4 E_n J}}}. \quad (22)$$

Уравнение (21) рассматриваем с граничными условиями (3). Решение уравнения (21) по методу Бубнова – Галеркина запишем в виде:

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (23)$$

Как правило, поверхностные слои взаимодействующих деталей при интенсивных нагрузках, обладают значительной гибкостью, если кривизну гипотетической балки $\frac{1}{\rho}$ принимаем равной $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2w}{dx^2}$, то в расчеты вкрадывается существенная погрешность, поэтому используем точное значение кривизны кривой в виде:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2w}{dx^2} \left[1 - \left(\frac{dw}{ds} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (24)$$

С помощью бинома Ньютона упростим (24):

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2w}{dx^2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{ds} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{dw}{ds} \right)^4 \dots \right]. \quad (25)$$

При определении кривизны балки пока ограничимся двумя слагаемыми в выражении (25).

В выражениях (24), (25) линейная координата x заменена дуговой координатой s .

В связи со структурой уравнения (21), описывающей продольный изгиб балки на упругом основании, вместо величины $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2w}{ds^2}$ рассматривается вторая производная от уточненного выражения кривизны (25). Уточненное выражение кривизны балки подставим в первое слагаемое (21), после двукратного его дифференцирования.

Обращаясь к

$$\frac{d^2w}{ds^2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{ds} \right)^2 \right], \quad (26)$$

выполним его двукратное дифференцирование по координате s :

$$\begin{aligned} & \frac{d^4w}{ds^4} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{ds} \right)^2 \right] + 2 \frac{d^3w}{ds^3} \left[\frac{dw}{ds} \frac{d^2w}{ds^2} \right] + \\ & + \frac{d^2w}{ds^2} \left[\left(\frac{d^2w}{ds^2} \right)^2 \frac{dw}{ds} \frac{d^3w}{ds^3} \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Для определения стрелы прогиба балки в случае учета точного значения кривизны выполним подстановку $w = f \sin \frac{\pi s}{l}$ в выражениях (21) и (27). Не нарушая общности рассуждений в выражении для w , условно опускаем индексы k .

После подстановки w в выражение (27) получим:

$$\begin{aligned} & f \frac{\pi^4}{l^4} \sin \frac{\pi s}{l} \left[1 + \frac{1}{2} f^2 \frac{\pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi s}{l} \right] - \\ & - \frac{\pi^3}{l^3} f \cos \frac{\pi s}{l} \left[f \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi s}{l} \frac{\pi^2}{l^2} f^2 \sin^2 \frac{\pi s}{l} \right] \\ & - f \frac{\pi^3}{l^3} \cos \frac{\pi s}{l} \left[f \left(-\frac{\pi}{l} \right) \cos \frac{\pi s}{l} - \frac{\pi^2}{l^2} f^2 \sin \frac{\pi s}{l} \right] - \\ & - \frac{\pi^2}{l^2} f \sin \frac{\pi s}{l} \left[-\frac{\pi^2}{l^2} f \sin \frac{\pi s}{l} - \left(-f \cos \frac{\pi s}{l} \right) \left(\frac{\pi^3}{l^3} f \cos \frac{\pi s}{l} \right) \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя функцию кривизны (27) в уравнение (21), а также выражение w в оставшиеся слагаемые дифференциального уравнения (21), потребуем ортогональности результата выбранного функционала с функцией $\sin \frac{\pi s}{l}$. В результате интегрирования выбранного функционала в пределах от 0 до l получим выражение для определения стрелы прогиба гипотетических балок, обладающих большой гибкостью (и нелинейной упругостью):

$$f \frac{\pi^4}{l^4} \frac{l}{2} + f^3 \frac{\pi^6}{l^6} \frac{l}{8} - \frac{T}{EJ} f \frac{\pi^2}{l^2} \frac{l}{2} + \frac{T}{EJ} f \frac{l}{2} = 0. \quad (29)$$

Пренебрегая тривиальным значением $f = 0$, получим выражение для определения стрелы прогиба:

$$f = + \sqrt{\frac{8l^2}{\pi^2} \left(\frac{T}{EJ} \frac{l^2}{\pi^2} - \frac{T}{EJ} \frac{l^4}{\pi^4} - 1 \right)}. \quad (30)$$

Кроме того, на развитие поперечных прогибов влияет смещение свободного (подвижного) конца гипотетической балки и учет продольной жесткости балки $E_n F$ (рис. 4).

При воздействии продольной силы T в балке (перед штампом) происходит смещение ее подвижного конца на величину $l - v$, при этом второй конец балки остается неподвижным. Тогда

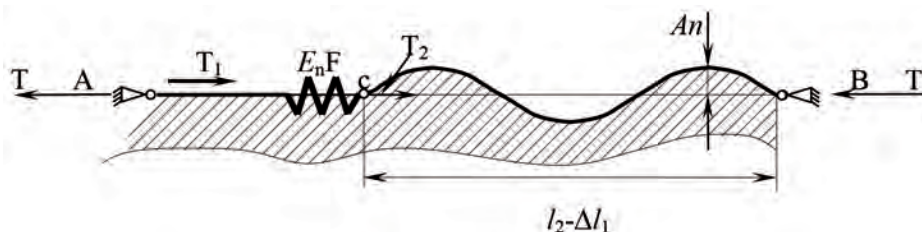


Рис. 4. Гипотетическая балка на упругом основании с учетом продольной жесткости $E_n F$

между продольным смещением балки v и поперечным прогибом w устанавливается нелинейная зависимость. Продольное перемещение подвижного конца балки найдем как разность между первоначальной длиной l и проекцией искривленной оси балки:

$$v = l - \int_0^l \cos \varphi ds = l - \int_0^l \sqrt{1 - \left(\frac{dw}{ds}\right)^2} ds. \quad (31)$$

В приведенном выражении φ – угол, который составляет касательная к дуге изогнутой оси балки с продольной осью Ox .

Разложим подынтегральное выражение в ряд по формуле бинома Ньютона:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{dw}{ds}\right)^2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{ds}\right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{dw}{ds}\right)^4 - \dots + \dots \quad (32)$$

Подставляя в (32) выражение (28) и выполняя интегрирование в пределах от 0 до l и учитывая значение интегралов $\int_0^l \cos^2 \frac{\pi s}{l} ds = \frac{l}{2}$; $\int_0^l \cos^4 \frac{\pi s}{l} ds = \frac{3}{8}l$, получим значение продольного смещения v через стрелу прогиба f и длину балки l в виде:

$$v = \frac{\pi^2 f^2}{4l} + \frac{3}{64} \frac{\pi^4 f^4}{l^3} + \dots + \dots \quad (33)$$

При продольных смещениях балки, помимо переменной силы трения $T(t) = T\left(\dot{x}\right)$, возникает приращение продольной силы ΔT , обусловленное продольной жесткостью материала балки под штампом:

$$\Delta T = -Gv. \quad (34)$$

Тогда дифференциальное уравнение продольной устойчивости (статической или динамической устойчивости), если обращаться к выражению (2), приобретает вид:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{T}{E_n J} \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{C}{E_n J} w - \frac{Gv}{E_n J} = 0. \quad (35)$$

В приведенных выражениях (34), (35) $G = E_n F$ – продольная жесткость гипотетической балки; F – площадь ее поперечного сечения. Как следует из (31), продольное смещение свободного конца балки в области перед штампом связано нелинейно с поперечным смещением (33).

Подставляя выражение (33) в дифференциальное уравнение (35) с учетом (34) и требуя ортогональности полученного функционала с функцией $\sin \frac{\pi s}{l}$, приходим к выражению, содержащему стрелу прогиба балки f :

$$E_n J \frac{\pi^4}{l^4} f + T \frac{\pi^2}{l^2} f + Cf - \frac{\pi^2 f^2}{4l} - \frac{3}{64} \frac{\pi^4 f^4}{l^3} - EF = 0. \quad (36)$$

Если прогиб f , входящий в уравнение (36), принимает не слишком большое значение, что на практике соответствует вязкоупругому поведению материалов (при рабочем диапазоне температур порядка $450 \div 600^\circ\text{C}$), то в выражении для определения сближения концов (33) достаточно ограничиться первым слагаемым, тогда стрела прогиба гипотетической балки может быть определена из выражения:

$$\frac{\pi^2}{4l} E_n F = E_n F \frac{\pi^4}{l^4} f + T \frac{\pi^2}{l^2} f + Cf. \quad (37)$$

Окончательно стрела прогиба вычисляется из выражения:

$$f = \frac{4J}{F} \frac{\pi^2}{l^2} + \frac{4T}{Fl} + \frac{C}{EF} \frac{4l}{\pi^2}. \quad (38)$$

Если при потере балкой устойчивости прогибы f будут значительными, что соответствуют состоянию текучести материала (при $t^0 \geq 600^\circ\text{C}$), то в выражении для сближения концов (33) ограничимся двумя первыми слагаемыми. Тогда, выполняя преобразования с дифференциальным уравнением (35) также по методу Бубнова – Галеркина, сохраняя в выражении (33) для v два слагаемых, приходим к следующему выражению для определения стрелы прогиба f в пластической области:

$$f^3 + \frac{16}{3} \frac{l}{\pi^2} f - \frac{64}{3l} \frac{J}{F} - \frac{64}{3} \frac{Tl}{\pi^2 EJ} - \frac{64}{3} \frac{Cl^3}{\pi^4 EF} = 0. \quad (39)$$

Полученное кубическое уравнение является неполным уравнением Кардано:

$$f^3 + pf + q = 0, \quad (40)$$

где $p = \frac{16}{3} \frac{l}{\pi^2}$; $q = -\frac{64}{3l} \frac{J}{F} - \frac{64}{3} \frac{Tl}{\pi^2 EJ} - \frac{64}{3} \frac{Cl^3}{\pi^4 EF}$ – коэффициенты неполного уравнения Кардано.

Корни уравнения (39) вычислим по формулам Кардано:

$$f_1 = A + B; f_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm i \frac{A-B}{2} \sqrt{3}, \quad (41)$$

где $A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}$; $B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}$; $Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$.

Причем в качестве корней (40) принимаем только действительные числа. Для решения уравнения (40) достаточно отделить один действительный положительный корень, если остальные корни комплексно сопряженные или действительные и отрицательные, тогда первый корень будет решением уравнения (40). Если же все корни действительные, то в качестве решения выбираем наибольший положительный корень.

Дальнейшее уточнение решения нашей задачи по определению прогибов балки (наибольших значений микронеровности) в пластической зоне получим, используя уточненное значение кри-

визны балки, формула (25), а также продольное смещение передней опоры гипотетической балки v в формуле (33), и используя алгоритм решения в форме Бубнова – Галеркина, получим:

$$\frac{\pi^2 f EF}{4l EJ} + \frac{3 \pi^4 f^3}{64 l^3} = \frac{\pi^4}{l^4} + T \frac{\pi^2}{l^2 EJ} + \frac{C}{EJ} + f \frac{t^2 \pi^6}{8l^4};$$

$$\frac{3 \pi^3}{64 l^3} f^3 - f^2 \frac{\pi^6}{8l^4} + f \frac{\pi^2 F}{4l J} - \frac{\pi^4}{l^4} - T \frac{\pi^2}{l^2 EJ} - \frac{C}{EJ} = 0. (42)$$

Данное выражение является кубичным уравнением общего вида. Для решения его необходимо привести к виду (40) или отделить один действительный корень, после чего, путем разложения (40) на множители определить другие корни. Если корни действительные, то в качестве f выбираем наибольший положительный корень, если один корень действительный (положительный), а два других комплексно сопряженные, то в качестве решения принимаем действительный положительный корень.

Общие выводы и задачи исследований. Для возникновения параметрических эффектов в поверхностных слоях деталей при трении и изнашивании необходимо, чтобы характеристика трения

$T = T \left[\dot{x}(t) \right]$, как функция скорости взаимного перемещения деталей, имела «падающий» характер и в системе наблюдалось отрицательное демпфирование, тогда в поверхностных слоях деталей развивается автоколебательный процесс, и эти слои имеют неустойчивое равновесное состояние, вызванное касательными усилиями $T \geq T_{кр}$.

Поэтому в системе имеются предпосылки к возникновению автоколебаний и параметрического резонанса. Сам характер процесса обусловлен видом решения уравнений Матье и соотношением коэффициентов a_k, q_k , в котором присутствуют нарастающие и затухающие составляющие.

Изложенные соображения позволяют выделить следующие варианты развития нестационарных процессов в поверхностных слоях полупространства:

1. Непосредственно параметрический колебательный режим, когда колебательный процесс является самовозбуждающимся (неустойчивым) при продольных нагрузках, близких к критическим $T = T_{кр}$ и малых возмущающих воздействиях. В этом случае развивается параметрический резонанс с возрастающими амплитудами и последующим быстрым разрушением поверхностных слоев гипотетической балки (хрупкий скол для материалов с высокой твердостью $HRC \geq 40$ или пластическое смятие и последующий срез деформационных микронеровностей).

2. Псевдоавтоколебательный процесс с плавающей частотой и ограниченными амплитудами.

Если при этом каждая пара значений a_k, q_k попадает в зону устойчивости на диаграмме Айнса – Стретта и , то потеря устойчивости поверхностных слоев в Эйлеровом смысле может произойти, но параметрический резонанс на фоне потери устойчивости не разовьется, и быстрое разрушение поверхностных слоев не произойдет. Тогда будет иметь место износ образовавшихся деформационных микронеровностей совместно с технологическими микронеровностями (причем величины технологических и деформационных микронеровностей будут соизмеримы). Вследствие циклического характера нагружения произойдет дальнейшее усталостное разрушение всех микронеровностей, при этом интенсивность изнашивания возрастает.

3. Стационарный продольный волновой процесс возникает, если $T(t) = T \left[\dot{x}(t) \right]$ и при этом характеристика трения не имеет падающего участка или отрицательного демпфирования, то в области перед штампом образуется стационарная волна, движущаяся со скоростью штампа, которая рассматривается в подвижной системе координат. Если волнообразные деформации поверхностных слоев остаточные, то процесс износа аналогичен износу технологических микронеровностей.

4. Неподвижный поперечный волновой процесс (в подвижной системе координат) возникает при жидкостном трении, когда силой трения $T(t)$ можно пренебречь в связи с ее малостью. При этом гипотетическая балка будет испытывать деформацию изгиба от действия веса перемещающегося штампа P . В этом случае перемещение штампа и изгибной волны деформации в конечном случае ведет к усталостному разрушению взаимодействующих плоскостей поверхностей даже при незначительной величине веса штампа P .

Обращаясь к варианту 1, как к наиболее неблагоприятному, соответствующему параметрическому резонансу, можно вычислить наибольшие деформации для статического нагружения и по деформациям определить наибольшие напряжения, как в задаче Эйлера. Учитывая при этом нелинейную зависимость модуля упругости от деформаций $E_n = E_n(\epsilon)$. Предварительно рассчитываем напряжения в гипотетической балке при наибольших поперечных деформациях без учета зависимости $E_n(\epsilon)$, считая $E_n = const$, а затем с учетом поправки на изменение $E_n(\epsilon)$, получим реальные напряжения, при которых происходит потеря устойчивости балки с ее последующим разрушением.

Рассмотренное физическое явление волнообразования перед движущимся плоским штампом может быть обобщено и на случай перемещения вращающегося катка по полупространству. Предлагаемые материалы могут оказаться полезными

при расчетах технологических процессов по обработке металлов давлением (прокатке, волочении, ковке и других). Расчет таких процессов необходим для правильного выбора мощности прокатных и волочильных станов. Во многих случаях они позволяют правильно установить размеры заготовки, вычислить оптимальные условия деформирования, обеспечивающие изготовление изделий высокого класса.

Библиографический список / References

1. Крагельский И. В. Основы расчетов на трение и износ / И. В. Крагельский, М. Н. Добычин, В. С. Камбалов. – М.: Машиностроение, 1977.

Kragel'skij I. V., Dobychin M. N., Kambalov V. S. *Osnovy raschetov na trenie i iznos*. Moscow, Mashinostroenie, 1977.

2. Крагельский И. В. Трение и износ / И. В. Крагельский. – М.: Машиностроение, 1968.

Kragel'skij I. V. *Trenie i iznos*. Moscow, Mashinostroenie, 1968.

3. Светлицкий В. А. Сборник задач по теории колебаний / В. А. Светлицкий, И. К. Стасенко. – М.: Высшая школа, 1973.

Svetlickij V. A., Stasenko I. K. *Sbornik zadach po teorii kolebanij*. Moscow, Vysshaya shkola, 1973

4. Малиновский Ю. А. Квазистатические особенности постановки деформационно-волновых задач при трении и изнашивании / Ю. А. Малиновский и др. // *Металлургическая и горнорудная промышленность*. – 2018. – № 3. – С. 75–81.

Malinovskij Yu. A. *Kvazistaticheskie osobennosti postanovki deformacionno-volnovykh zadach pri trenii i iznashivanii*. Metallurgicheskaya i gornorudnaya promyshlennost'. 2018, no. 3, pp. 75-81.

5. Вульфсон И. И. Нелинейные задачи динамических машин / И. И. Вульфсон, М. З. Коловский. – М.: Машиностроение, 1968.

Vul'fson I. I., Kolovskij M. Z. *Nelinejnye zadachi dinamicheskikh mashin*. Moscow, Mashinostroenie, 1968.

6. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем / В. В. Болотин. – М.: ГИТТЛ, 1956.

Bolotin V. V. *Dinamicheskaya ustojchivost' uprugih sistem*. Moscow, GITTL, 1956.

7. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем / А. С. Вольмир. – М.: Физматгиз, 1968.

Vol'mir A. S. *Ustojchivost' uprugih sistem*. Moscow, Fizmatgiz, 1968.

Мета. Дослідження впливу параметричного резонансу в зоні взаємодії рухомих контактуючих поверхонь на тертя і знос при перебігу деформаційно-хвильових процесів перед рухомих штампом.

Методика. Для обґрунтування причин виникнення параметричних коливань на контактуючих поверхнях запропоновано фізичну модель, в якій присутнє нелінійне сухе тертя між взаємодіючими деталями,

залежне від швидкості їх відносного переміщення, яке є джерелом виникнення параметричних (авто) коливань на ділянці перед рухомою деталлю.

Використано прийоми, що дозволяють визначити довжину деформованої ділянки поверхні деталі, кількість півхвиль на ділянці, а також застосовано уточнені методи обчислення висот деформаційних мікронерівностей.

Наукова новизна роботи полягає в тому, що виявлено причину інтенсивного зношування взаємодіючих деталей, яка полягає в наростанні амплітуд коливань поверхневих шарів деталей у результаті прояву ефекту параметричного резонансу.

Практична значущість роботи полягає в досягненні більшої достовірності при визначенні деформаційних мікронерівностей за рахунок використання більш точного вираження для кривизни зігнутої осі балки, а також урахування нелінійних залежностей між поздовжніми і поперечними деформаціями поздовжньої осі гіпотетичної балки при втраті нею поздовжньої стійкості.

Ключові слова: тертя, зношування, пружна стійкість, балка на пружній основі, параметричне навантаження, рівняння Матьє, радіус кривизни балки, діаграма Айнса – Стретта, метод Бубнова – Гальоркіна.

Purpose. Investigation of the influence of parametric resonance in the zone of interaction of moving contacting surfaces on friction and wear when deformation-wave processes occur in front of a moving stamp.

Methodology. To substantiate the reasons for the emergence of parametric oscillations on the contacting surfaces, a physical model has been proposed in which nonlinear dry friction between interacting parts is present, depending on the speed of their relative movement, which is the source of parametric (auto) oscillations in the area in front of the moving part.

The techniques used to determine the length of the deformed part of the surface of the part, the number of half-waves on the site, as well as refined methods for calculating the heights of the deformation microroughnesses were used.

Originality of the work lies in the fact that the reason for the intense wear of the interacting parts was revealed, which is the increase in the amplitudes of oscillations of the surface layers of the parts as a result of the manifestation of the parametric resonance effect.

Practical value of the work is to achieve greater reliability in determining the deformation microroughness due to the use of a more accurate expression for the curvature of the bent beam axis, as well as taking into account the nonlinear relationships between the longitudinal and transverse deformations of the longitudinal axis of the hypothetical beam when it loses its longitudinal stability.

Key words: friction, wear, elastic stability, beam on an elastic foundation, parametric load, Mathieu equation, radius of curvature of a beam, Ains-Strett diagram, Bubnov-Galerkin method.

Рекомендована к публикации
к. т. н. Ю. Г. Осадчуком
Поступила 20.09.2018