УДК 517.98

М. А. Митрофанов

ВЛАСТИВОСТІ ВІДОКРЕМЛЮВАЛЬНИХ ПОЛІНОМІВ І ВІДОКРЕМЛЮВАЛЬНИХ РІВНОМІРНО АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянуто властивості відокремлювальних поліномів та рівномірно аналітичних відокремлювальних функцій. Доведено збереження відокремлювальних поліномів з додатно визначеними компонентами при поліноміальних автоморфізмах. Показано, що композиція рівномірно аналітичної і відокремлювальної функції з лінійним відображенням, яке не зменшує норми, є рівномірно аналітичною і відокремлювальною функцією.

Вступ. У теорії апроксимації неперервних функцій аналітичними на сепарабельних дійсних банахових просторах перший ґрунтовний результат отримав у 1954 році J. Kurzweil у праці [8], показавши, що достатньою умовою для такої апроксимації є існування відокремлювального полінома на просторі. У 2001 році M. C. Boiso і P. Hájek у праці [5] довели, що для випадку апроксимації *рівномірно* неперервної функції на просторі ця умова може бути послаблена до існування рівномірно аналітичної і відокремлювальної функції. Таких достатніх умов існування апроксимації досі не вдалося позбутися, незважаючи на подальші дослідження (зокрема, працю [4] D. Azagra, R. Fry, L. Keener). Тому стоїть питання про те, які саме простори допускають відокремлювальні поліноми та відокремлювальні рівномірно аналітичні функції.

У теорії відокремлювальних поліномів на банахових просторах суттєві результати отримано у 1989 році у статті [6] авторами M. Fabian, D. Preiss, J. H. M. Whitfield, V. Zizler, а ґрунтовний огляд зроблено у 1997 році R. Gonzalo, J. A. Jaramillo у статті [7].

У цій роботі викладено деякі нові результати з цієї тематики. Всі поліноми, які будемо розглядати в цій статті, вважаємо неперервними.

Існує декілька (нееквівалентних) означень відокремлювального полінома (див., наприклад, [6, 7]). Будемо використовувати таке

Означення 1. Нехай X − нормований простір над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Дійсний поліном $q : X \to \mathbb{R}$ називаємо *відокремлювальним поліномом,* якщо q задовольняє умови:

1°) $q(0) = 0$;

2°) $\inf\{|q(x)| : \|x\| = 1\} > 0$.

Це означення не є еквівалентним до класичного, в якому умова ***2***° виглядає таким чином:

$$|q(x)| \ge 1 \text{ для кожного } x \in X \text{ такого, що } \|x\| = 1. \tag{1}$$

Але питання про *існування* відокремлювального полінома на просторі має однакову відповідь у сенсі класичного означення та *означення 1*.

Також нагадаємо, що, якщо на просторі X існує відокремлювальний поліном q степеня k, то на цьому просторі також існує $2(k!)$-однорідний невід'ємний відокремлювальний поліном d. Наприклад, у **п. 1.7** праці [7] це доводиться для випадку відокремлювального полінома, означеного трохи інакше, ніж в *означенні 1*.

1. Загальні властивості відокремлювальних поліномів. Зауважимо, що, якщо розмірність простору X дорівнює одиниці, то кожне ненульове лінійне відображення p, наприклад, $p(x) = x$, буде відокремлювальним поліномом.

У випадку, коли розмірність нормованого простору X над полем $\mathbb{R}$ (або $\mathbb{C}$) є не меншою ніж 2, з результатів О. Д. Александрова [1] випливає, що сфера в просторі X є лінійно зв'язною множиною. Надалі будемо вважати, що простори X, Y є такими, як описано в цьому абзаці вище.

Твердження 1. *Якщо поліном p відокремлювальний на X, то він додатно або від'ємно визначений на одиничній сфері, тобто або $p(x) > 0$ для всіх $x \in X$ таких, що $\|x\| = 1$, або $p(x) < 0$ для всіх $x \in X$ таких, що $\|x\| = 1$.*

Д о в е д е н н я. Оскільки сфера є лінійно зв'язною множиною, а відокремлювальний поліном − неперервною функцією, то, якщо би він змінював знак на сфері, то приймав би нульове значення у деякій її точці що суперечить означенню відокремлювального полінома. Отже, p є знаковизначеним на сфері. ♦

З твердження 1 легко випливає наступне твердження, аналог якого доведено у праці [7].

Твердження 2. *Якщо поліном p відокремлювальний на X, то поліном p_e, складений з однорідних компонент p парних степенів, також є відокремлювальним на X.*

З твердження 2 випливає, що, якщо p − відокремлювальний поліном на X, то $(p_e \neq 0)$, тобто p має ненульову парну однорідну компоненту.

Твердження 3. *Якщо поліном p_e відокремлювальний на X і додатний (від'ємний) на одиничній сфері, то поліном p_{e_+} (p_{e_-}), складений з однорідних компонент p невід'ємних (недодатних) парних степенів, також є відокремлювальним на X.*

Проте, як показано у прикладі праці [2], існує відокремлювальний поліном, жодна однорідна компонента якого не є відокремлювальною.

Лема 1. *Якщо поліном p відокремлювальний на X і всі його однорідні компоненти невід'ємно визначені на X, то для довільної послідовності $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ елементів простору X з того, що $p(y_n) \to 0$ при $n \to \infty$, випливає, що $y_n \to 0$ при $n \to \infty$.*

Д о в е д е н н я. Припустимо протилежне, тобто нехай існує така послідовність $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ елементів простору X, що $p(y_n) \to 0$, але $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$. Переходячи до підпослідовності, можемо вважати, що існує таке дійсне число $\varepsilon \in (0, 1)$, що $\|y_n\| > \varepsilon$ для всіх n. Розглянемо послідовність $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ елементів одиничної сфери, визначену умовою $z_n = \dfrac{y_n}{\|y_n\|}$ для всіх n. Тоді

$$p(z_n) = \sum_k \frac{1}{\|y_n\|^k} p_k(y_n) \le \frac{1}{\varepsilon^m} \sum_k p_k(y_n) = \frac{1}{\varepsilon^m} p(y_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

де m − степінь полінома p, а p_k − його однорідна компонента степені k. Це суперечить тому, що p − відокремлювальний поліном. Отже, припущення неправильне. ♦

Теорема 1. *Якщо $F : X \to Y$ − поліноміальний автоморфізм (тобто поліноміальне бієктивне відображення таке, що F^{-1} − поліном і $F(0) = 0$), $p : Y \to \mathbb{R}$ − відокремлювальний поліном і всі його однорідні компоненти невід'ємно визначені на Y, то відображення $p(F) : X \to \mathbb{R}$ буде відокремлювальним поліномом.*

Д о в е д е н н я. Відомо, що композиція поліноміальних відображень є поліноміальним відображенням, тому $p(F)$ є поліномом. Крім того, $p(F)(0) =$

$= 0$. Припустимо, що $p(F)$ не є відокремлювальним поліномом. Тоді існує послідовність $\{x_n\}$ елементів одиничної сфери в X така, що $p(F(\{x_n\})) \to$ $\to 0$ при $n \to \infty$. Оскільки p задовольняє умови леми 1, то $\{F(x_n)\} \to 0$. Оскільки $F : X \to Y$ − поліноміальний автоморфізм, то $\{F^{-1}(F(x_n))\} =$ $= \{x_n\} \to 0$, що суперечить вибору $\{x_n\}$. Отже, $p(F)$ − відокремлювальний поліном. ♦

2. Сильно відокремлювальні поліноми. Розглянемо множину відокремлювальних поліномів на X, що задовольняють таку умову: *для довільного дійсного числа* $\alpha > 0$ *поліном* $p(\alpha x)$ *є відокремлювальним поліномом.* Такі поліноми назвемо *сильно відокремлювальними* і розглянемо їх властивості.

Легко бачити, що кожен однорідний відокремлювальний поліном є сильно відокремлювальним.

Будемо говорити, що однорідний відокремлювальний поліном p на X є *додатним* (*від'ємним*), якщо p додатно (від'ємно) визначений на деякій сфері з центром в нулі. Якщо поліном є сумою однорідних відокремлювальних поліномів одного знака, то він є сильно відокремлювальним.

На просторі $\mathbb{R}^2$ розглянемо поліном $2(x^2 + y^2) - x$. Цей поліном не є сильно відокремлювальним на $\mathbb{R}^2$. Більше того, додатно визначений на цьому просторі поліном $(2(x^2 + y^2) - x)^2$ не є сильно відокремлювальним на $\mathbb{R}^2$.

Зауважимо, що, якщо поліном p є сильно відокремлювальним на X, то p є знаковизначеним на $X \setminus \{0\}$. Справді, припустимо протилежне. Тоді існують такі точки $x, y \in X$, що $p(x) > 0$, а $p(y) < 0$. З'єднаємо точки x та y дволанковою ламаною, яка не проходить через нуль. За неперервністю p, на цій ламаній знайдеться точка z така, що $p(z) = 0$. Тоді $0 = p(z) = p(\|z\|(\|z\|^{-1} z))$, що суперечить тому, що поліном $p(\|z\| x)$ є відокремлювальним.

Твердження 4. *Кожен сильно відокремлювальний на* X *поліном* p *степеня* n *можна подати у вигляді суми невід'ємно визначеного на* X $p^+ = \sum_{k=1}^{n} p_k^+$ *і недодатно визначеного на* X $p^- = \sum_{k=1}^{n} p_k^-$ *поліномів, де* $p_k^+ \geq 0$, *і* $p_k^- \leq 0$ *− однорідні компоненти* p^+ *та* p^-.

Д о в е д е н н я. Використавши формулу Мартіна (див. [9]), подамо кожну однорідну компоненту p_k полінома p у вигляді: $p_k = \sum a_{kj} p(\lambda_j x)$, де λ_j − деякі невід'ємні попарно різні константи, а a_{kj} − константи, які залежать від степеня полінома p. Оскільки p відокремлювальний, то, за твердженням 1, він є додатно або від'ємно визначеним на одиничній сфері. Позначимо

$$a_{kj}^+ = \begin{cases} a_{kj}, & a_{kj} \geq 0, \\ 0, & a_{kj} < 0, \end{cases} \qquad a_{kj}^- = \begin{cases} a_{kj}, & a_{kj} \leq 0, \\ 0, & a_{kj} > 0. \end{cases}$$

Компонента p_k набуває вигляду $p_k = \sum a_{kj}^+ p(\lambda_j x) + \sum a_{kj}^- p(\lambda_j x)$. Якщо p додатно визначений на одиничній сфері, покладемо $p_k^+ = \sum a_{kj}^+ p(\lambda_j x)$ та $p_k^- = \sum a_{kj}^- p(\lambda_j x)$. У випадку від'ємно визначеного на одиничній сфері p

покладемо $p_k^- = \sum a_{kj}^+ p(\lambda_j x)$ та $p_k^+ = \sum a_{kj}^- p(\lambda_j x)$, тоді $p_k = p_k^+ + p_k^-$. Оскільки p_k^+ є невід'ємно визначеним на одиничній сфері і однорідним, то він є невід'ємним на X, аналогічно p_k^- є недодатним на X. ♦

Твердження 5. *Якщо поліном p є сильно відокремлювальним і додатно визначеним на $X \setminus \{0\}$, то p^+ є відокремлювальним поліномом на X.*

Д о в е д е н н я. За побудовою полінома p^+, маємо, що $p^+(0) = 0$. Оскільки для довільного $x \in X$ такого, що $\|x\| = 1$, $p^+(x) \ge p(x) > 0$, то p^+ − відокремлювальний поліном. ♦

Твердження 6. *Якщо поліном p сильно відокремлювальний і додатно визначений на $X \setminus \{0\}$, то для довільної послідовності $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ елементів простору X з того, що $p^+(y_n) \to 0$ при $n \to \infty$, випливає, що $p^-(y_n) \to 0$ при $n \to \infty$ та $p(y_n) \to 0$ при $n \to \infty$.*

Д о в е д е н н я. Оскільки $p(y_n) \ge 0$, то $p^+(y_n) \ge p(y_n) \ge 0$, і оскільки $p^+(y_n) \to 0$ при $n \to \infty$, то і $p(y_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Враховуючи, що $p(y_n) = p^+(y_n) + p^-(y_n)$, маємо, що і $p^-(y_n) \to 0$ при $n \to \infty$. ♦

Наведемо приклад відокремлювального полінома, який змінює знак всередині одиничної кулі.

Приклад 1. Нехай $X = \ell_2$. Означимо поліном p на просторі X, прийнявши, що $p(x) = \sum\limits_k 2x_k^4 - x_k^2$ для кожного елемента $x \in X$, де $x = \sum\limits_k e_k x_k$ − розвинення x за канонічним базисом $\{e_k\}$ простору X. Легко бачити, що p − відокремлювальний поліном і $p(e_1) = 1$. Оскільки $p(\lambda e_1) = 2\lambda^4 - \lambda^2 < 0$ при $0 < \lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$, то на сфері такого радіуса λ поліном p приймає від'ємні значення. Також для полінома p не виконується твердження 6. ◄

3. Конус відокремлювальних поліномів. Оскільки при дослідженні проблеми апроксимації неперервних функцій аналітичними на дійсних нормованих просторах важливу роль при побудові апроксимації відіграють відокремлювальні поліноми, то виникає питання про «ширину» множини відокремлювальних поліномів на (дійсному нормованому) просторі.

Зафіксуємо простір X. Нехай Γ − опуклий конус (див., наприклад, [3, с. 54]) у лінійному просторі $P_0(X)$ всіх дійсних поліномів p на X таких, що $p(0) = 0$, такий, що $\Gamma \bigcap (-\Gamma) = 0$. Тоді на $P_0(X)$ можна ввести частковий порядок $\prec$, прийнявши $q \prec p$ тоді й лише тоді, коли $p - q \in \Gamma$. Тоді, якщо $q \in \Gamma$, то $p \in \Gamma$ для довільного $p \succ q$. Легко перевірити, що $(P_0(X), \prec)$ є напрямленим, тобто для довільних двох поліномів $p, q \in P_0(X)$ існує поліном $r \in P_0(X)$ такий, що $p \prec r$ та $q \prec r$ тоді й тільки тоді, коли $\Gamma - \Gamma = P_0(X)$.

За твердженням 1, якщо поліном p відокремлювальний на X, то він додатно або від'ємно визначений на одиничній сфері простору X. Таким чином, множина всіх відокремлювальних поліномів на X розбивається на множину Γ_+ всіх додатно визначених поліномів на одиничній сфері простору X та множину $-\Gamma_+$. Доповнимо множину Γ_+ до конуса, прийнявши $\Gamma_{+0} = \Gamma_+ \bigcup \{0\}$.

Твердження 7. *Якщо на X існує відокремлювальний поліном, то* $\Gamma_{+0} - \Gamma_{+0} = P_0(X)$.

Д о в е д е н н я. Нехай $p \in P_0(X)$ – довільний поліном, а $q \in \Gamma_+$. Тоді існує таке число $\lambda > 0$, що

$$\lambda \inf\{|q(x)| : \|x\| = 1\} > \sup\{|p(x)| : \|x\| = 1\} + 1 .$$

Тоді $\lambda q, \lambda q - p \in \Gamma_+$ і $p = \lambda q - (\lambda q - p)$. ♦

Зауваження 1. Аналог твердження 7 для відокремлювальних поліномів, невід'ємно визначених на всьому X, вже не справджується, оскільки всі невід'ємно визначені поліноми з $P_0(X)$ мають нульову лінійну компоненту.

4. Рівномірно аналітичні та відокремлювальні функції. Нагадаємо означення рівномірно аналітичної і відокремлювальної функції:

Означення 2. Нехай X – дійсний нормований простір. Будемо говорити, що дійсна функція $Q : X \to \mathbb{R}$ є *рівномірно аналітичною* (детальніше про аналітичні функції на нормованих просторах див., наприклад, [10]) і *відокремлювальною*, якщо вона задовольняє наступні умови:

1°) функція Q є дійсною аналітичною на X з радіусом збіжності R_{Q_x} у кожній точці $x \in X$ таким, що $R_{Q_x} \ge R_Q$ для деякого $R_Q > 0$;

2°) існує $\alpha \in \mathbb{R}$ таке, що множина $\{x \in X : Q(x) < \alpha\}$ є непорожньою і лежить у відкритій одиничній кулі B_X.

У цьому означенні радіус збіжності обчислюється за формулою

$$R_{Q_x} := \big(\limsup_{n\to\infty} |Q_n|^{1/n}\big)^{-1}, \qquad Q_n = \frac{d^n Q(x)}{n!}, \tag{2}$$

і в цьому випадку дорівнює радіусу обмеженості функції Q в точці x.

Теорема 2. *Нехай X та Y – дійсні банахові простори, $f : Y \to \mathbb{R}$ є рівномірно аналітичною і відокремлювальною функцією такою, що $f(0) = 0$, $g : X \to Y$ – лінійне відображення, що не зменшує норму. Тоді композиція $\tilde g = f \circ g : X \to \mathbb{R}$ є рівномірно аналітичною і відокремлювальною функцією.*

Д о в е д е н н я. Функція $\tilde g$ є аналітичною як композиція двох аналітичних функцій. Перевіримо, чи вона задовольняє умови *означення 2*.

1°. Нехай x – довільна точка простору X. Для норми k-ї компоненти $\tilde g_k = f_k(g)$ розвинення функції $\tilde g$ в ряд в околі точки x, маємо оцінку $\|f_k(g)\| \le \|f_k\|\|g\|^k$, де f_k – k-та компонента розвинення функції f в околі точки $g(x)$. Нехай радіус збіжності R_{f_y} в кожній точці $y \in Y$ є більшим від $R_f > 0$ або дорівнює йому. Оцінимо, використовуючи (2), радіус збіжності $R_{\tilde g_x}$ функції $\tilde g$ в точці x:

$$0 \le R_{\tilde g_x}^{-1} = \limsup_{k\to\infty} \|\tilde g_k\|^{1/k} \le \limsup_{k\to\infty} (\|f_k\| \cdot \|g\|^k)^{1/k} =$$

$$= \|g\| \limsup_{k\to\infty} (\|f_k\|)^{1/k} = \|g\| R_{f_{g(x)}}^{-1} .$$

Отже,

$$R_{\tilde g_x} \ge \frac{R_{f_{g(x)}}}{\|g\|} \ge \frac{R_f}{\|g\|} > 0 .$$

2°. Оскільки f є рівномірно аналітичною і відокремлювальною функцією, то існує число $\alpha \in \mathbb{R}$ таке, що $\{y \in Y : f(y) < \alpha\} \subset B_Y$. Нехай $x \in X$ та $\tilde{g}(x) < \alpha$. Тоді $f(g(x)) < \alpha$ і тому $g(x) \in B_Y$. Оскільки відображення g не зменшує норму, то $x \in B_X$. Крім того, оскільки g – лінійне відображення, то $g(0) = 0$ і тому $\tilde{g}(0) = f(g(0)) = f(0) = 0$. ♦

Приклад 2. *Розглянемо лінійний простір* $Z = \overset{\infty}{\underset{k=1}{\oplus}} \ell_{2k}$ *– пряму суму лінійних просторів* ℓ_{2k}. *Якщо на* Z *задати* ℓ_m *-норму, прийнявши*

$$\|x\| = \left(\sum_k \|x_k\|_{\ell_{2k}}^m \right)^{1/m} \tag{3}$$

для кожного елемента $x = (x_k) \in Z$, *то для непарного* $m > 0$ *простір* Z *з такою нормою не буде допускати ні відокремлювального полінома, ні рівномірно аналітичної і відокремлювальної функції.*

Д о в е д е н н я. Нехай Z_0 – підпростір в Z, який складається з елементів вигляду $x = \sum x_k$ де $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in \ell_{2k}$, та $x_k = (a_k, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Тоді для довільного $x \in X_0$, за умовою, $\|x\| = \left(\sum |a_k|^m \right)^{1/m}$. Тому Z_0 є ізоморфним до ℓ_m. Оскільки на ℓ_m для непарного m не існує відокремлювального полінома, то такого полінома не існує і на X. І оскільки на ℓ_m для непарного m не існує рівномірно аналітичної і відокремлювальної функції (інакше, за теоремою 1 з [5], норма простору ℓ_m апроксимувалась би аналітичними функціями, що так не є [8, с. 227], то такої функції не існує і на Z. ♦

1. *Александров А. Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. – Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1948. – 387 с.
2. *Митрофанов М. А.* Апроксимація неперервних функцій на дійсних банахових просторах // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2007. – Вип. 5. – С. 48–51.
3. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. – Москва: Мир, 1971. – 360 с.

   Те саме: *Shaefer H. H.* Topological vector spaces. – Berlin: Springer, 1967. – 294 p.
4. *Azagra D., Fry R., Keener L.* Real analytic approximation of Lipschitz functions on Hilbert space and other Banach spaces // J. Funct. Anal. – 2012. – **262**, No. 1. – P. 124–166.
5. *Boiso M. C., Hájek P.* Analytic approximations of uniformly continuous functions in real Banach spaces // J. Math. Anal. Appl. – 2001. – **256**. – P. 80–98.
6. *Fabian M., Preiss D., Whitfield J. H. M., Zizler V.* Separating polynomials on Banach spaces // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). – 1989. – **40**, No. 2. – P. 409–422.
7. *Gonzalo R., Jaramillo J. A.* Separating polynomials on Banach spaces // Extracta Mathematicae. – 1997. – **12**, No. 2. – P. 145–164.
8. *Kurzweil J.* On approximation in real Banach spaces // Studia Math. – 1954. – **14**. – P. 214–231.
9. *Martin R. S.* Contributions to the theory of functionals. – Ph. D. Thesis: Univ. California, 1932.
10. *Mujica J.* Complex analysis in Banach spaces: Holomorphic functions and domains of holomorphy in finite and infinite dimensions. – Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland, 1986. – 434 p.

СВОЙСТВА РАЗДЕЛЯЮЩИХ ПОЛИНОМОВ И РАЗДЕЛЯЮЩИХ РАВНОМЕРНО АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрены свойства разделяющих полиномов и равномерно аналитических разделяющих функций. Доказано сохранение разделяющих полиномов с положительно определенными компонентами при полиномиальных автоморфизмах. Показано, что композиция равномерно аналитической и разделяющей функции с линейным отображением, не уменьшающим норму, является равномерно аналитической и разделяющей функцией.

PROPERTIES OF SEPARATING POLYNOMIALS AND SEPARATING UNIFORMLY ANALYTIC FUNCTIONS

The properties of separating polynomials and uniformly analytic and separating functions are considered. It is proved that an image of a separating polynomial with positively defined components by a polynomial automorphism is a separating polynomial. It is shown that the composition of a uniformly analytic and separating function and a linear map, which does not diminish norm, is a uniformly and analytic separating function.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
28.05.10