

**ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРУЖНО ЗАТИСНЕНИХ
КОНСОЛЬНИХ ШАРУВАТИХ БАЛОК**

Розглядається застосування нового методу аналізу напруженого стану для визначення впливу умов закріплення шаруватих балок на їх динамічні властивості. Детально досліджено напружений стан в зоні закріплення. Наведена теоретична модель включає деформації шарів з урахуванням трансверсальної зсувної деформації, нормальних деформації і напружень. Виконано числові розрахунки залежності частотного спектра від анізотропії механічних властивостей і розподілу напружень в області пружного затиснення.

Вступ. Шаруваті композитні тонкостінні структури знаходять все більше застосування в конструкціях сучасних об'єктів аерокосмічної техніки, приладо- та машинобудування. У порівнянні з ізотропними одношаровими пластинами та оболонками вони мають ширший спектр механічних властивостей, які дозволяють ефективніше їх використовувати. Для застосування пружних пластинчастих елементів у конструкціях літальних апаратів, автомобільній техніці, автобусобудуванні, приладобудуванні, будівельних конструкціях, а також у конструкціях звукозахисних бар'єрів і динамічних гасників коливань необхідно якомога точніше прогнозувати їх міцнісні та деформативні властивості, зокрема параметри жорсткості та демпфування.

1. Огляд попередніх досліджень. Багато дослідників проводять порівняльний аналіз різних теорій шаруватих елементів за різних умов навантаження [1, 2, 7, 13, 14, 16]. Важливим є питання ідентифікації модулів пружності шарів тонкостінного елемента. Тут як основний використовується метод частотного спектра, а також порівняння експериментально і теоретично визначених власних частот [6, 15]. Для цього розглядають спочатку «прямі» методи визначення власних частот при заданих пружних властивостях. Часто проводять попередні дослідження впливу власних частот коливань на пружні модулі анізотропії [12].

Умови закріплення тонкостінних елементів також значно впливають на їхні динамічні властивості. У схемах ідентифікації часто використовують пластини чи балки, вільно оперті або з вільними краями. У такий спосіб виключають невизначеність, що вноситься умовами закріплення. Розглядають також і умови жорсткого закріплення країв балки, однак при цьому часто нехтують крайовими ефектами закріплення в реальній конструкції [2].

Для дослідження динаміки тонкостінних елементів застосовують теорії все вищого порядку. В [3, 9, 10, 14] запропоновано розрахункові схеми, в яких порядок рівнянь є необмежений (розглядається довільне число апроксимацій по товщині пластини). У роботі [8] ці «уніфіковані» рівняння отримано на підставі змішаного варіаційного принципу Рейснера. Проте залишається відкритим питання про збіжність таких апроксимацій. У цій роботі використовуємо класичний метод Гальоркіна для еліптичної системи рівнянь лінійної теорії пружності, в якому гарантується існування і єдиність розв'язку задачі. У [3] розглянуто схему пружного затиснення шаруватої балки-консолі. У пропонованій роботі досліджуємо вплив умов закріплення балки на її напружено-деформований стан та амплітудно-частотні характеристики.

2. Основні співвідношення. Розглянемо циліндричний згин симетричної тришарової балки товщини $2H_p$ з товщиною внутрішнього шару $2H$ і завдовжки L (рис. 1) за таких кінематичних гіпотез (позначення такі, як у [9, 10]) ($U = U_e + U_d$):

$$U_e - \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i,k} u_{ik}^e z^{2i-1} \varphi_k(x) \\ \sum_{i,k} w_{ik}^e z^{2i-2} \gamma_k(x) \end{Bmatrix}, \quad 0 < z < H, \quad 0 < x < L,$$

$$U_d - \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i,k} u_{ik}^d (z-H)^i \varphi_k(x) \\ \sum_{i,k} w_{ik}^d (z-H)^i \gamma_k(x) \end{Bmatrix}, \quad H < z < H_p, \quad 0 < x < L. \quad (1)$$

Тут $\varphi_k(x)$, $\gamma_k(x)$ – апріорі відомі координатні функції за поздовжньою координатою (для відповідних умов закріплення балки); u_{ik}^e , w_{ik}^e , u_{ik}^d , w_{ik}^d – множина невідомих параметрів [9, 10].

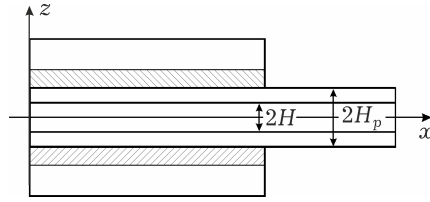


Рис. 1. Схема тришарової балки.

Підставляючи (1) у варіаційне рівняння Гамільтона – Остроградського для пружного закріплення типу Вінклера з коефіцієнтом K :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \tau_{xz} \delta \varepsilon_{xz} - \rho \frac{\partial u}{\partial t} \delta \frac{\partial u}{\partial t} - \rho \frac{\partial w}{\partial t} \delta \frac{\partial w}{\partial t}) dV + \int_{S_K} KU \delta U dS - \int_{S_P} P \delta U dS \right) dt = 0 \quad (2)$$

при одночастотних усталених коливаннях

$$u_{ik}^e = \bar{u}_{ik}^e e^{i\omega t}, \quad w_{ik}^e = \bar{w}_{ik}^e e^{i\omega t}, \quad u_{ik}^d = \bar{u}_{ik}^d e^{i\omega t}, \quad w_{ik}^d = \bar{w}_{ik}^d e^{i\omega t},$$

отримуємо [9, 10] систему лінійних алгебраїчних рівнянь для амплітуд:

$$[A] \bar{U} = \begin{bmatrix} A_1 & A_d \\ A_d^T & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_e \\ \bar{U}_d \end{bmatrix} = f. \quad (3)$$

Тут V – об'єм балки; S_K – поверхня пружного закріплення; S_P – поверхня з відомими зусиллями; P – зовнішні сили; t_i – довільний часовий момент; A_1 , A_2 – матриці жорсткості основних і додаткових кінематичних умов (1), A_d – матриця змішаних умов [9, 10], A_d^T – транспонована до неї матриця. Для числа шарів $n = 1, \dots, N$ рівняння (1) набудуть вигляду

$$U_d^n - \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i,k} u_{ik}^n (z - H^{(n)})^i \varphi_k(x) \\ \sum_{i,k} w_{ik}^n (z - H^{(n)})^i \gamma_k(x) \end{Bmatrix}, \quad H^{(n)} < z < H^{(n+1)},$$

$$0 < x < L, \quad n = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Тут $H^{(n)} = H_p^{(n+1)} - H_p^{(n)}$, $H_p^{(1)} = H$; H і $H^{(n)}$ – відповідно півтовщина внутрішнього шару і товщина зовнішнього n -го шару. Матриця такої системи визначається подвійним інтегруванням за товщиною і за довжиною балки. Зазначимо, що при $N = 1$ і $N = 2$ система (4) відповідає випадкам три- і п'ятишарової балок симетричної конструкції.

Для матеріалів балки з лінійним в'язким демпфуванням частотне рівняння має вигляд

$$-\omega^2[M]\bar{U} + i\omega[C]\bar{U} + [K]\bar{U} = [A]\bar{U} = \bar{f}. \quad (5)$$

Це традиційний частотний метод для лінійних в'язкопружних тіл [11].

3. Вплив параметрів затиснення на динамічні характеристики. Для досліджень вибрано анізотропну пружно закріплену консольну балку з геометричними параметрами: довжина $L = 0.3$ м, товщина $2H = 0.0127$ м, $2H_p = 0.0132$ м. Обчислення виконано для анізотропних матеріалів з такими константами пружності:

$$\text{I: } C_{xx} = 240 \text{ МПа, } C_{zz} = 250 \text{ МПа, } C_{xz} = 120 \text{ МПа, } G = 58 \text{ МПа,}$$

$$\text{II: } C_{xx} = 2400 \text{ МПа, } C_{zz} = 250 \text{ МПа, } C_{xz} = 120 \text{ МПа, } G = 58 \text{ МПа.}$$

Узагальнений закон Гука задано наступним чином:

$$\sigma_{xx} = C_{xx}\varepsilon_{xx} + C_{xz}\varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{zz} = C_{zx}\varepsilon_{xx} + C_{zz}\varepsilon_{zz}, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}. \quad (6)$$

Результати розрахунків на основі (1)–(5) відношення власних частот $f = f_i/f_{ie}$ наведено на рис. 2 (для анізотропного матеріалу I – пінопласту) і на рис. 3 (для анізотропного матеріалу II). Тут f_i – власні частоти балки,

f_{ie} – відомі власні частоти консольної балки Ейлера [5]: $f_{ie} = \frac{H}{2\pi} \sqrt{\frac{Eg}{12\rho}} \frac{\alpha_i^2}{L^2}$, $\alpha_1 = 1.875$, $\alpha_2 = 4.694, \dots$. За координатні вибирали тригонометричні функції [3, 9, 10, 14] $\varphi_k(x) = \gamma_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{2L}\right)$.

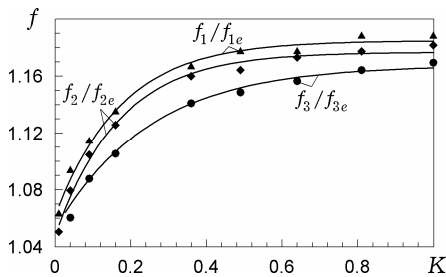


Рис. 2. Залежності відношення власних частот f_i/f_{ie} від жорсткості закріплення K для матеріалу I.

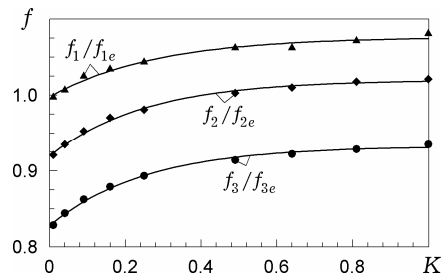


Рис. 3. Залежності відношення власних частот f_i/f_{ie} від жорсткості закріплення K для матеріалу II.

Бачимо, що для матеріалу II вплив параметра жорсткого закріплення істотніший.

На рис. 4 і рис. 5 наведено відповідно дотичні та нормальні напруження в зоні закріплення для однорідної балки під дією перерізуючої сили F для різних значень ступеня анізотропії E/G .

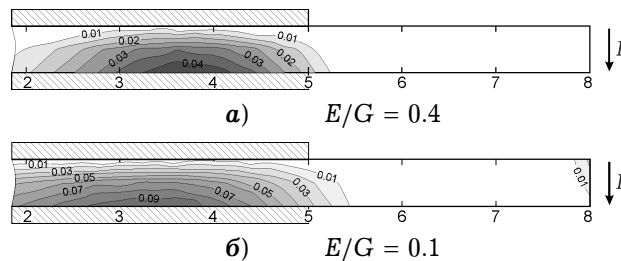


Рис. 4. Дотичні напруження σ_{xz}/E для різного ступеня анізотропії.

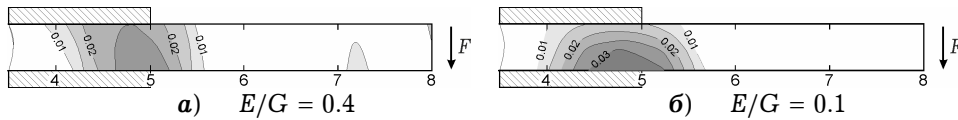


Рис. 5. Нормальні напруження σ_{zz}/E для різного ступеня анізотропії.

Бачимо, що при більшому ступеню анізотропії зона великих нормальних деформацій більша.

4. Вплив анізотропії пружних властивостей балки на динамічні характеристики. Розглянемо вплив анізотропії пружних властивостей однорідної балки на її амплітудно-частотні характеристики (АЧХ). На рис. 6 наведено АЧХ для різних значень констант пружності C_{xx} , C_{zz} , G і C_{xz} , A – безрозмірна амплітуда. Обчислення виконано для шарнірно опертої балки зі збуренням в центральній точці [3, 9, 10, 12, 14].

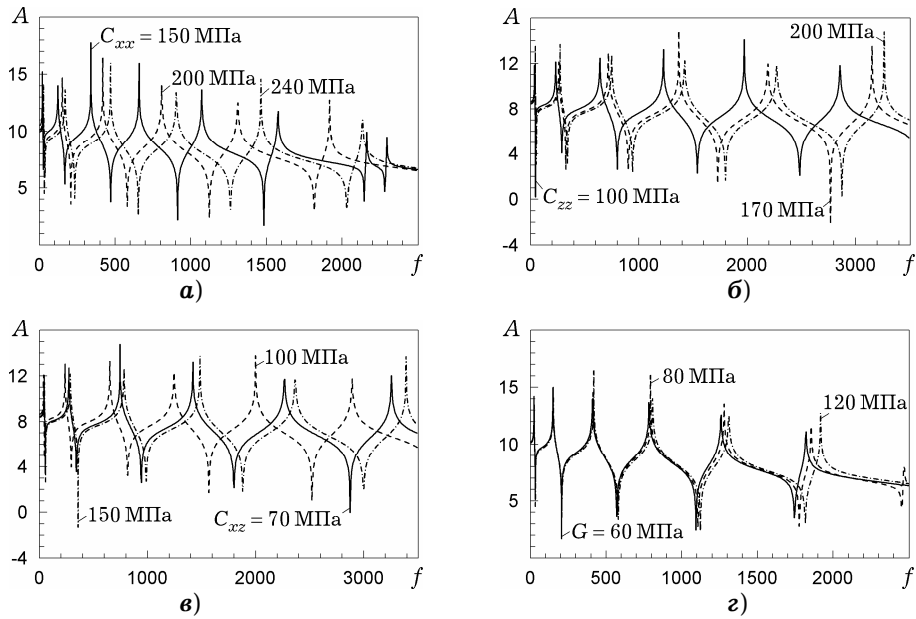


Рис. 6. АЧХ для різних пружних констант.

Відмітимо, що поруч з відомим фактом залежності динамічних характеристик балки від поздовжнього модуля C_{xx} (рис. 6а), виявлено також значний вплив модуля C_{xz} (рис. 6в). Цей факт ніяк не відображають класичні теорії балок Ейлера чи Тимошенка.

5. Тришарова балка. Розглянемо тепер тришарову симетричну балку з параметрами $H_p - H = 0.005$ м; $C_{xx} = 17$, $C_{zz} = 1.5$ ГПа, $G = 580$ МПа, $C_{xz} = 700$ МПа. Зовнішні шари жорсткі. Обчислено зміни АЧХ для зовнішнього (рис. 7) та внутрішнього (рис. 8) шарів.

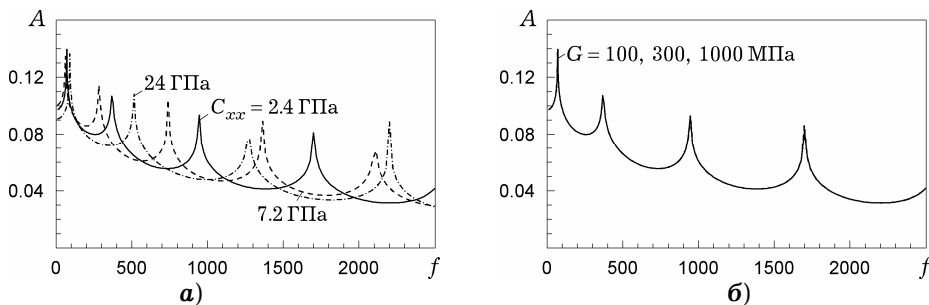


Рис. 7. АЧХ для різних пружних констант зовнішнього шару.

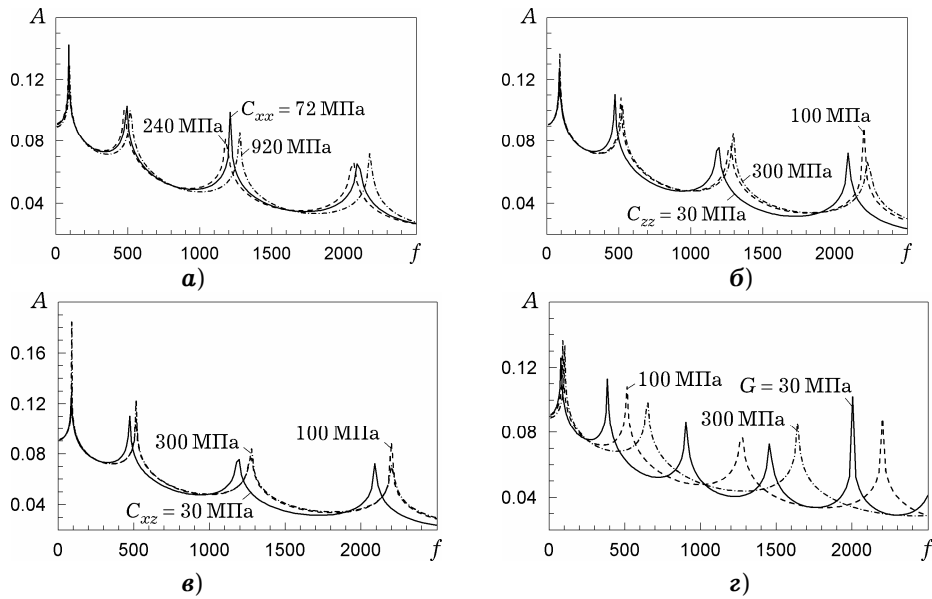


Рис. 8. АЧХ для різних пружних констант внутрішнього шару.

Як і слід було очікувати, тільки зміна модуля зсуву G внутрішнього шару та поздовжнього модуля пружності C_{xx} зовнішніх жорстких шарів істотно впливає на АЧХ. Вплив інших трансверсальних констант C_{xz} , C_{zz} зовнішнього шару на АЧХ тришарової балки (не наведено) теж є незначним.

Висновки. Запропоновано розрахункові схеми шаруватої балки, в яких порядок рівнянь необмежений (розглядається довільне число апроксимацій за товщиною балки). Розглянуто схему пружно затисненої шаруватої балки-консолі. Досліджено вплив затиснення і параметрів анізотропії шаруватого балочного елемента на його динамічні характеристики: вплив жорсткості закріплення на напружений стан балки; вплив модулів пружності шарів балки на її амплітудно-частотні характеристики. Виявлено значний вплив на частотні характеристики балки трансверсальних модулів пружності та порівняно менший вплив модуля зсуву (що не відображається теоріями нижчого порядку). Для тришарової балки з жорсткими зовнішніми шарами частотні характеристики істотно залежать лише від поздовжньої жорсткості зовнішніх шарів і зсувної жорсткості внутрішнього шару.

1. Богданович А. Е., Ярве Э. В. Оценка пределов применимости инженерных моделей расчета слоистых сред в задачах поперечного динамического изгиба // Механика композитных материалов. – 1988. – **24**, № 6. – С. 1076–1088.
Te same: Bogdanovich A. E., Yarve É. V. Evaluation of the limits of applicability of engineering models for the calculation of laminate media in problems of transverse dynamic bending // Mech. Compos. Mater. – 1988. – **24**, No. 6. – P. 810–821.
2. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. – Москва: Машиностроение, 1980. – 375 с.
3. Дивеев Б. М., Николишин М. М. Уточнені розрахункові схеми для напружено-деформованого стану конструктивних з'єднань шаруватих елементів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 4. – С. 130–134.
4. Пелех Б. Л., Дивеев Б. М. Некоторые динамические задачи для вязкоупругих слоистых анизотропных оболочек и пластин. 1. Обобщенные динамические уравнения теории слоистых оболочек с учетом граничных условий на поверхностях // Механика композитных материалов. – 1980. – **16**, № 2. – С. 277–280.
Te same: Pelekh B. L., Diveev B. M. Some dynamic problems involving laminated anisotropic viscoelastic shells and plates. 1. Generalized dynamic equation in the theory of laminated shells with boundary conditions at the surfaces // Mech. Compos. Mater. – 1980. – **16**, No. 2. – P. 206–209.

5. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. – Москва: Наука, 1967. – 444 с.
6. Araújo A. L., Mota Soares C. M., Moreira de Freitas M. J., Pedersen P., Herskovits J. Combined numerical-experimental model for the identification of mechanical properties of laminated structures // Compos. Struct. – 2000. – **50**. – P. 363–372.
7. Carrera E. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells // Appl. Mech. Rev. – 2003. – **56**. – P. 287–308.
8. Carrera E. Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking // Arch. Comput. Methods Eng. – 2003. – **10**. – P. 215–296.
9. Diveyev B., Butiter I., Shcherbina N. Identifying the elastic moduli of composite plates by using high-order theories 1. Theoretical approach // Mech. Compos. Mater. – 2008. – **44**, No. 1. – P. 25–36.
Те саме: Дивеев Б., Бутитер И., Щербина Н. Идентификация упругих модулей композитных пластин на базе уточненных теорий. 1. Теоретический подход // Механика композитных материалов. – 2008. – **44**, № 1. – С. 35–50.
10. Diveyev B., Butiter I., Shcherbina N. Identifying the elastic moduli of composite plates by using high-order theories 2. Theoretical-experimental approach // Mech. Compos. Mater. – 2008. – **44**, No. 2. – P. 139–144.
Те саме: Дивеев Б., Бутитер И., Щербина Н. Идентификация упругих модулей композитных пластин на базе уточненных теорий. 2. Теоретико-экспериментальный подход // Механика композитных материалов. – 2008. – **44**, № 2. – С. 207–216.
11. *Encyclopedia of acoustics* / Ed. Crocker M. J. – Vol. II. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 1997.
12. Frederiksen P. S. Parameter uncertainty and design of optimal experiments for the estimation of elastic constants // Int. J. Solids Struct. – 1998. – **35**, No. 12. – P. 1241–1260.
13. Frostig Y., Thomsen O. T. High-order free vibration of sandwich panels with a flexible core // Int. J. Solids Struct. – 2004. – **41**, No. 5–6. – P. 1697–1724.
14. Kim J.-S. Free vibration of laminated and sandwich plates using enhanced plate theories // J. Sound Vib. – 2007. – **308**, No. 1–2. – P. 268–286.
15. Rikards R., Chate A., Gailis A. Identification of elastic properties of laminates based on experiment design // Int. J. Solids Struct. – 2001. – **38**, No. 1–2. – P. 5097–5115.
16. Roland L. Woodcock. Free vibration of advanced anisotropic multilayered composites with arbitrary boundary conditions // J. Sound Vib. – 2008. – **312**, No. 4–5. – P. 769–788.

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УПРУГО ЗАЖАТЫХ КОНСОЛЬНЫХ СЛОИСТЫХ БАЛОК

Рассматривается применение нового метода анализа напряженного состояния для точного определения влияния условий закрепления слоистых балок на их динамические свойства. Детально рассматривается напряженное состояние в области закрепления. Представленная теоретическая модель включает деформации слоев с учетом трансверсальной деформации сдвига, нормальной деформации и напряжения. Приведены числовые расчеты зависимости частотного спектра от анизотропии механических свойств и распределения напряжений в зоне зажима.

FREQUENCY CHARACTERISTICS OF ELASTICALLY CLAMPED CANTILEVER LAYERED BEAMS

The application of new method of stress state analysis for determination of the clamping conditions effect of layered beams on dynamic properties is considered. The stress state in clamped region is under detailed analysis. The proposed theoretical model includes deformation of layers taking into account the transverse shear deformation, normal deformations and stresses. The numerical calculation of dependences of the frequency spectrum on the mechanical properties anisotropy and stresses distribution in the clamped region are carried out.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
² Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
21.12.10