

**ВЛИЯНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО КОНТУРА НА ИЗЛУЧЕНИЯ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ СФЕРОЙ**

Рассматривается нестационарная задача излучения акустических волн толстостенным сферическим пьезопреобразователем, который подключен к генератору электрических импульсов посредством колебательного контура с сосредоточенными параметрами. Переходный процесс моделируется уравнениями связанной теории электроупругости, акустического приближения и квазистатической теории для электрической цепи. Предложен метод, согласно которому задача сведена к решению системы интегральных уравнений Вольтерра с запаздывающими аргументами. На основе выполненных расчетов оценено влияние проводной линии на процессы в гидроэлектроупругой системе.

Введение. Актуальность исследований динамических процессов в пьезопреобразователях сферической формы обусловлена их широким распространением в современных технических устройствах, применяемых, в частности, в гидроакустике. В большинстве проведенных к настоящему времени исследований рассмотрен режим периодического во времени электромеханического нагружения. Практическое использование пьезопреобразователей при действии импульсных нагрузок делает актуальными задачи данного направления в нестационарной постановке. Из публикаций последних лет, в которых представлены различные методы решения прикладных задач нестационарной электроупругости, отметим [4, 7, 9–16]. При изучении переходных процессов в толстостенных сферических пьезопреобразователях авторами статьи [11] был применен численный подход, а изложенная в [16] методика, основанная на разделении искомых величин на «квазистатическую» и «динамическую» составляющие, позволила свести задачу к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Аналитический метод решения задачи о возбуждении нестационарным электрическим сигналом толстостенного сферического пьезопреобразователя, контактирующего с идеальной сжимаемой жидкостью, развита в работе [2].

Исследование электрически обусловленных колебаний пьезопреобразователей зачастую проводится в предположении, что известен закон изменения во времени разности потенциалов между их токопроводящими покрытиями. В реальных же условиях пьезопреобразователи соединены с электрическими генераторами через проводные линии, которые могут включать индуктивность, емкость и сопротивление, т. е. посредством линейных электрических цепей с сосредоточенными параметрами. В результате преобразователь возбуждается электрическим импульсом, конфигурация которого будет отличной от входной. В публикациях [1, 3, 8] проанализировано влияние проводной линии на работу тонкостенных сферических пьезоэлементов при их нестационарном возбуждении. Приведенные в этих работах расчетные выражения основаны на уравнениях теории тонких электроупругих оболочек, что лишает возможности рассмотрения волновых процессов в преобразователях. Настоящая работа посвящена исследованиям деформаций поляризованной в радиальном направлении толстостенной пьезокерамической сферы, которая погружена в безграничную акустическую среду (жидкость) и связана с генератором нестационарных электрических сигналов проводной линией с сосредоточенными параметрами.

Математическая модель. Рассматриваем гидроэлектроупругую систему, которая состоит из толстостенного радиально-поляризованного сферического пьезоэлектрического преобразователя, погруженного в безграничную жидкую среду (рис. 1). На внутренней и внешней поверхностях преоб-

разователя имеются сплошные токопроводящие покрытия, которые связаны с источником нестационарного электрического сигнала проводной линией, состоящей из последовательно соединенных индуктивности, емкости и сопротивления.

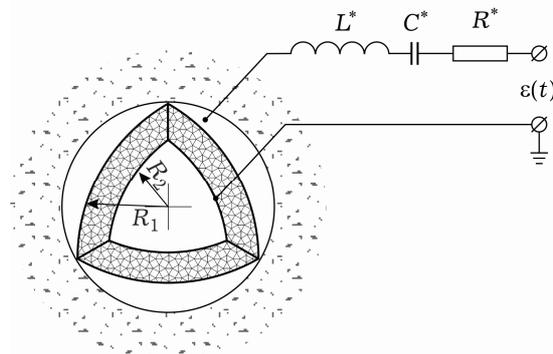


Рис. 1. Гидроэлектроупругая система.

Для описания электромеханических полей в сферическом излучателе используем уравнения линейной теории электроупругости [5]. Жидкость считаем идеальной сжимаемой средой и при моделировании ее движения привлекаем соотношения акустической теории. Процессы в проводной линии рассматриваем как квазистатические (т.е. мгновенные значения электрических переменных описываются согласно закону Кирхгофа [6]).

Геометрические и физические характеристики электроупругой сферы обозначены через R_1 и R_2 (внешний и внутренний радиусы), ρ_p (плотность), c_{33}^E , c_{13}^E , c_{11}^E , c_{12}^E (модули упругости), e_{33} , e_{31} (пьезомодули), d_{33} (пьезоэлектрическая постоянная) и ϵ_{33}^S (диэлектрическая проницаемость пьезокерамики). Параметры акустической среды определяются плотностью ρ_w и скоростью звука c_w . Параметры колебательного контура: L^* (индуктивность), C^* (емкость) и R^* (сопротивление).

С начального момента времени $t = 0$ к клеммам проводной линии подводится электрический импульс, профиль которого описывается функцией $\epsilon(t)$ (рис. 1).

К неизвестным переменным, характеризующим переходной процесс в пьезоэлектрическом преобразователе, относятся: u_r – радиальная составляющая вектора перемещения, σ_r – нормальное напряжение в радиальном направлении, E_r , D_r и ψ – напряженность, индукция и потенциал электрического поля, U_p – падение напряжения между электродами сферы; в акустической среде: v_r – радиальная скорость ее частиц, p – давление, ϕ – волновой потенциал; в проводной цепи: U_{L^*} , U_{C^*} и U_{R^*} – падения напряжений на индуктивности, емкости и сопротивлении, I – электрический ток в этих элементах.

Далее выполняем обезразмеривание параметров, согласно которому переменные u_r , радиальная координата r , R_1 и R_2 отнесены к R_1 ; p и σ_r – к $\rho_w c_w^2$; E_r – к $1/d_{33}$; D_r – к ϵ_{33}^S/d_{33} ; ψ , U_p , U_{L^*} , U_{C^*} и U_{R^*} – к R_1/d_{33} ; I – к $c_w R_1 \epsilon_{33}^S/d_{33}$; v_r – к c_w ; ϕ – к $c_w R_1$, а время t – к R_1/c_w .

В рассматриваемой постановке имеют место чисто радиальные колебания пьезокерамического преобразователя. При этом отличные от нуля смещения u_r , напряженность E_r и индукция D_r электрического поля удовле-

творяют уравнениям [2]

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + 2 \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - 2a_1 \frac{u_r}{r^2} - a_2 \frac{\partial E_r}{\partial r} - 2a_3 \frac{E_r}{r} = a_4 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) = 0, \quad E_r = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad (2)$$

$$D_r = E_r + 2a_5 \frac{u_r}{r} + a_6 \frac{\partial u_r}{\partial r}. \quad (3)$$

Здесь

$$a_1 = \frac{c_{11}^E + c_{12}^E - c_{13}^E}{c_{33}^E}, \quad a_2 = \frac{e_{33}}{c_{33}^E d_{33}}, \quad a_3 = \frac{e_{33} - e_{31}}{c_{33}^E d_{33}},$$

$$a_4 = \frac{\rho_p c_w^2}{c_{33}^E}, \quad a_5 = \frac{e_{31} d_{33}}{\varepsilon_{33}^S}, \quad a_6 = \frac{e_{33} d_{33}}{\varepsilon_{33}^S}.$$

В рамках принятых допущений волновое уравнение относительно потенциала скорости акустической среды φ и уравнение, обеспечивающее равенство суммы падений напряжений на элементах контура и на пьезопреобразователе подводимому электрическому импульсу, имеют вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (4)$$

$$U_p + U_{L^*} + U_{C^*} + U_{R^*} = \varepsilon(t), \quad (5)$$

где

$$U_p = \Psi|_{r=R_1} - \Psi|_{r=R_2}, \quad U_{L^*} = \lambda_L \frac{dI}{dt}, \quad \frac{dU_{C^*}}{dt} = \lambda_C I, \quad U_{R^*} = \lambda_R I, \quad (6)$$

$\lambda_L = \frac{c_w^2 \varepsilon_{33}^S}{R_1} L^*$, $\lambda_C = \frac{\varepsilon_{33}^S R_1}{C^*}$ и $\lambda_R = c_w \varepsilon_{33}^S R^*$ – постоянные.

Исходную систему (1)–(6) дополним следующими граничными условиями:

$$\sigma_r|_{r=R_1} = -p|_{r=R_1}, \quad \left. \frac{\partial u_r}{\partial t} \right|_{r=R_1} = v_r|_{r=R_1}, \quad \sigma_r|_{r=R_2} = 0, \quad (7)$$

предполагающими совместность движения внешней ее поверхности $r = R_1$ и прилегающих к сфере частиц среды, а также отсутствие нагрузки на внутренней поверхности сферы $r = R_2$.

Ток I , протекающий в сферическом излучателе, выражается через индукцию D_r зависимостью

$$I = -4\pi \left. \frac{dD_r}{dt} \right|_{r=R_1}. \quad (8)$$

Начальные условия принимаем нулевыми.

Метод решения. При решении задачи исходные уравнения и граничные условия (1)–(8) трансформируем в пространство изображений с использованием интегрального преобразования Лапласа по времени.

С учетом формулы (2) для электрической индукции и соотношения (3) уравнение для электрической напряженности принимает вид

$$E_r^L = -2a_5 \frac{u_r^L}{r} - a_6 \frac{du_r^L}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{C^L}{s}, \quad (9)$$

где s – параметр преобразования Лапласа, индексом L обозначаем соответствующие трансформанты, C^L – неизвестная функция параметра s .

Подстановкой формулы (9) в преобразованное по Лапласу уравнение (1) получим следующее равенство относительно одного неизвестного \tilde{u}_r^L ($\tilde{u}_r^L = \sqrt{r} \cdot u_r^L$):

$$\frac{d^2 \tilde{u}_r^L}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{u}_r^L}{dr} - \left(\frac{v^2}{r^2} + \lambda^2 s^2 \right) \tilde{u}_r^L = \beta \frac{1}{r^{2.5}} \frac{C^L}{s}. \quad (10)$$

Общее решение уравнения (10) получим методом вариации произвольной постоянной [2]:

$$u_r^L = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{C^L}{s} \left\{ \mathcal{A}^L e^{-s\lambda(R_1-r)} f_{0v}^L(s, \lambda r) + \mathcal{B}^L e^{-s\lambda(r-R_2)} g_{0v}^L(s, \lambda r) - \beta [f_{0v}^L(s, \lambda r) W^L(s, \lambda r) + g_{0v}^L(s, \lambda r) V^L(s, \lambda r)] \right\}, \quad (11)$$

где \mathcal{A}^L и \mathcal{B}^L – неизвестные функции параметра s ; I_v и K_v – модифицированные функции Бесселя,

$$v = \sqrt{\frac{1}{4} + 2 \frac{\epsilon_{33}^S (c_{11}^E + c_{12}^E - c_{13}^E) + e_{31} (2e_{31} - e_{33})}{c_{33}^E \epsilon_{33}^S + e_{33}^2}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\rho_p c_w^2 \epsilon_{33}^S}{c_{33}^E \epsilon_{33}^S + e_{33}^2}},$$

$$\beta = - \frac{2e_{31} \epsilon_{33}^S}{(c_{33}^E \epsilon_{33}^S + e_{33}^2) d_{33}}, \quad f_{mn}^L(s, \lambda r) = \frac{1}{s^m} e^{-s\lambda r} I_n(s\lambda r),$$

$$g_{mn}^L(s, \lambda r) = \frac{1}{s^m} e^{s\lambda r} K_n(s\lambda r), \quad V^L(s, \lambda r) = e^{-s\lambda r} \int_{R_2}^r \frac{1}{x^{1.5}} I_v(s\lambda x) dx,$$

$$W^L(s, \lambda r) = e^{s\lambda r} \int_r^{R_1} \frac{1}{x^{1.5}} K_v(s\lambda x) dx. \quad (12)$$

Решение трансформированного в пространство изображений волнового уравнения (4) с учетом затухания возмущений на бесконечности после выражения модифицированных функций Бесселя полуцелого индекса через элементарные функции представим в виде [2]

$$\phi^L = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{C^L}{s} \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \mathcal{D}^L e^{-s(r-R_1)}, \quad (13)$$

где \mathcal{D}^L – также неизвестная, зависящая от s , функция.

Отметим, что выделение функции $C^L(s)$ в решении (13) позволяет удовлетворять условиям (7) на границах $r = R_1$ и $r = R_2$ независимо.

С использованием общих решений (11) и (13) и зависимостей

$$\sigma_r = a_7 \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2a_8 \frac{u_r}{r} - a_9 E_r, \quad v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad p = - \frac{\partial \phi}{\partial t},$$

неизвестные значения σ_r^L , v_r^L и p^L можем записать следующим образом:

$$\sigma_r^L = \frac{1}{\sqrt{r}} C^L \left\{ \mathcal{A}^L e^{-s\lambda(R_1-r)} F^L(s, \lambda r) + \mathcal{B}^L e^{-s\lambda(r-R_2)} G^L(s, \lambda r) - \beta [F^L(s, \lambda r) W^L(s, \lambda r) + G^L(s, \lambda r) V^L(s, \lambda r)] - \frac{\mu}{r^{1.5}} \frac{1}{s} \right\},$$

$$v_r^L = \frac{1}{\sqrt{r}} C^L \left[- \mathcal{D}^L \sqrt{\frac{\pi}{2r}} e^{-s(r-R_1)} \left(1 + \frac{1}{sr} \right) \right],$$

$$p^L = \frac{1}{\sqrt{r}} C^L \left[- \mathcal{D}^L \sqrt{\frac{\pi}{2r}} e^{-s(r-R_1)} \right]. \quad (14)$$

Здесь приняты обозначения:

$$\begin{aligned} F^L(s, \lambda r) &= \xi f_{0\nu+1}^L(s, \lambda r) + \frac{\zeta}{r} f_{1\nu}^L(s, \lambda r), \\ G^L(s, \lambda r) &= -\xi g_{0\nu+1}^L(s, \lambda r) + \frac{\zeta}{r} g_{1\nu}^L(s, \lambda r), \end{aligned} \quad (15)$$

$a_7, a_8, a_9, \xi, \zeta$ и μ – постоянные:

$$\begin{aligned} a_7 &= \frac{c_{33}^E}{\rho_w c_w^2}, & a_8 &= \frac{c_{13}^E}{\rho_w c_w^2}, & a_9 &= \frac{e_{33}}{d_{33} \rho_w c_w^2}, & \xi &= \lambda \frac{c_{33}^E \varepsilon_{33}^S + e_{33}^2}{\rho_w c_w^2 \varepsilon_{33}^S}, \\ \zeta &= (v - 0.5) \frac{c_{33}^E \varepsilon_{33}^S + e_{33}^2}{\rho_w c_w^2 \varepsilon_{33}^S} + 2 \frac{c_{13}^E \varepsilon_{33}^S + e_{33} e_{31}}{\rho_w c_w^2 \varepsilon_{33}^S}, & \mu &= \frac{e_{33}}{\rho_w c_w^2 d_{33}}. \end{aligned}$$

Согласно формул (2), (6), (9) и (11), распределение электрического потенциала ψ^L по толщине сферы и разность потенциалов U_p^L между ее электродами представимы в виде

$$\begin{aligned} \psi^L(s, r) &= a_6 [u_r^L(s, r) - u_r^L(s, R_2)] + \\ &+ 2a_5 \int_{R_2}^r \frac{u_r^L(s, x)}{x} dx - \frac{C^L}{s} \frac{r - R_2}{r R_2} + \psi^L(s, R_2), \end{aligned} \quad (16)$$

$$U_p^L = \frac{C^L}{s} \left[\Phi_1^L + \Phi_2^L - \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} \right]. \quad (17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_1^L(s) &= \mathcal{A}^L \left\{ \left[\frac{a_6}{\sqrt{R_1}} f_{0\nu}^L(s, \lambda R_1) + 2a_5 V^L(s, \lambda R_1) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_6}{\sqrt{R_2}} e^{-s\lambda(R_1 - R_2)} f_{0\nu}^L(s, \lambda R_2) \right\} + \\ &\quad + \mathcal{B}^L \left\{ \left[-\frac{a_6}{\sqrt{R_2}} g_{0\nu}^L(s, \lambda R_2) + 2a_5 W^L(s, \lambda R_2) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_6}{\sqrt{R_1}} e^{-s\lambda(R_1 - R_2)} g_{0\nu}^L(s, \lambda R_1) \right\}, \\ \Phi_2^L(s) &= a_6 \beta \left[\frac{-1}{\sqrt{R_1}} g_{0\nu}^L(s, \lambda R_1) V^L(s, \lambda R_1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{R_2}} f_{0\nu}^L(s, \lambda R_2) W^L(s, \lambda R_2) \right] - 2a_5 \beta Z^L, \\ Z^L(s) &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{x^{1.5}} I_\nu(s\lambda x) \int_x^{R_1} \frac{1}{y^{1.5}} K_\nu(s\lambda y) dy dx + \\ &\quad + \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{x^{1.5}} K_\nu(s\lambda x) \int_{R_2}^x \frac{1}{y^{1.5}} I_\nu(s\lambda y) dy dx. \end{aligned} \quad (18)$$

Исходя из уравнений (2), (3), (8) и (16), электрический ток I^L в проводной цепи и пьезоэлектрическом преобразователе можем выразить через неизвестную функцию C^L :

$$I^L = -\frac{4\pi}{R_1^2} C^L.$$

Это позволяет представить падения напряжений $U_{L^*}^L$, $U_{C^*}^L$ и $U_{R^*}^L$ как

$$U_{L^*}^L = b_1 s C^L, \quad U_{C^*}^L = b_2 \frac{1}{s} C^L, \quad U_{R^*}^L = b_3 C^L, \quad (19)$$

где b_1 , b_2 и b_3 – постоянные:

$$b_1 = -\frac{4\pi}{R_1^2} \lambda_L, \quad b_2 = -\frac{4\pi}{R_1^2} \lambda_C, \quad b_3 = -\frac{4\pi}{R_1^2} \lambda_R.$$

Для отыскания неизвестных функций \mathcal{A}^L , \mathcal{B}^L , C^L и \mathcal{D}^L формулы (11), (14), (17) и (19) подставляем в преобразованные по Лапласу краевые условия (7) и (5). В результате получим систему трех алгебраических уравнений относительно неизвестных \mathcal{A}^L , \mathcal{B}^L , \mathcal{D}^L :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^L F^L(s, \lambda R_1) - \mathcal{D}^L \sqrt{\frac{\pi}{2R_1}} &= X_1^L - \mathcal{B}^L e^{-s\lambda(R_1-R_2)} G^L(s, \lambda R_1), \\ \mathcal{A}^L f_{0v}^L(s, \lambda R_1) + \mathcal{D}^L \sqrt{\frac{\pi}{2R_1}} \left(1 + \frac{1}{sR_1}\right) &= X_2^L - \mathcal{B}^L e^{-s\lambda(R_1-R_2)} g_{0v}^L(s, \lambda R_1), \\ \mathcal{B}^L G^L(s, \lambda R_2) &= Y_1^L - \mathcal{A}^L e^{-s\lambda(R_1-R_2)} F^L(s, \lambda R_2), \end{aligned} \quad (20)$$

и уравнение относительно C^L :

$$C^L (b_1 + \Omega^L) = \frac{1}{s} \varepsilon^L. \quad (21)$$

Функции f_{0v}^L , g_{0v}^L , F^L и G^L описаны формулами (12) и (15), а функции X_1^L , X_2^L , Y_1^L и Ω^L имеют вид

$$\begin{aligned} X_1^L(s) &= \beta G^L(s, \lambda R_1) V^L(s, \lambda R_1) + \frac{\mu}{R_1^{1.5}} \frac{1}{s}, \\ X_2^L(s) &= \beta g_{0v}^L(s, \lambda R_1) V^L(s, \lambda R_1), \\ Y_1^L(s) &= \beta F^L(s, \lambda R_2) W^L(s, \lambda R_2) + \frac{\mu}{R_2^{1.5}} \frac{1}{s}, \\ \Omega^L(s) &= \frac{1}{s^2} (\Phi_1^L(s) + \Phi_2^L(s)) + \frac{1}{s^2} \left(b_2 - \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} \right) + \frac{1}{s} b_3. \end{aligned}$$

Далее выполняем строгую инверсию по Лапласу уравнений (20) и (21), при этом граничные условия удовлетворяем в пространстве оригиналов. В результате задача сводится к решению системы интегральных уравнений Вольтерра относительно функций $\mathcal{A}(t)$, $\mathcal{B}(t)$ и $\mathcal{D}(t)$ с запаздывающими аргументами:

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathcal{A}(\tau) F(t - \tau, \lambda R_1) d\tau - \mathcal{D}(t) \sqrt{\frac{\pi}{2R_1}} &= \\ &= X_1(t) - \int_0^{t-T} \mathcal{B}(\tau) G(t - T - \tau, \lambda R_1) d\tau, \\ \int_0^t \mathcal{A}(\tau) f_{0v}(t - \tau, \lambda R_1) d\tau + \sqrt{\frac{\pi}{2R_1}} \left(\mathcal{D}(t) + \frac{1}{R_1} \int_0^t \mathcal{D}(\tau) d\tau \right) &= \\ &= X_2(t) - \int_0^{t-T} \mathcal{B}(\tau) g_{0v}(t - T - \tau, \lambda R_1) d\tau, \end{aligned}$$

$$\int_0^t \mathcal{B}(\tau)G(t-\tau, \lambda R_2) d\tau = Y_1(t) - \int_0^{t-T} \mathcal{A}(\tau)F(t-T-\tau, \lambda R_2) d\tau, \quad (22)$$

$$T = \lambda(R_1 - R_2),$$

и интегрального уравнения относительно $C(t)$:

$$b_1 C(t) + \int_0^t C(\tau)\Omega(t-\tau) d\tau = \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau. \quad (23)$$

Оригиналы функций $g_{mn}(t, z)$ и $f_{mn}(t, z)$ приведены в публикации [2]. Ядро $F(t, z)$ является линейной комбинацией функций $f_{0\nu+1}(t, z)$ и $f_{1\nu}(t, z)$, а $G(t, z)$ – функций $g_{0\nu+1}(t, z)$ и $g_{1\nu}(t, z)$ (см. (15)). Функции $V(t, z)$ и $W(t, z)$, фигурирующие в общем решении (11), представимы в виде:

$$\begin{aligned} V(t, z) = & H(z - \lambda R_2 - t) \int_{(z-t)/\lambda}^{z/\lambda} \frac{\cos\left(v \cdot \arccos \frac{z-t}{\lambda x}\right)}{\pi \lambda x^{2.5} \sqrt{1 - \left(\frac{z-t}{\lambda x}\right)^2}} dx + \\ & + H(t - z + \lambda R_2) H(z + \lambda R_2 - t) \int_{R_2}^{z/\lambda} \frac{\cos\left(v \cdot \arccos \frac{z-t}{\lambda x}\right)}{\pi \lambda x^{2.5} \sqrt{1 - \left(\frac{z-t}{\lambda x}\right)^2}} dx + \\ & + H(t - z - \lambda R_2) H(2z - t) \left[\int_{(t-z)/\lambda}^{z/\lambda} \frac{\cos\left(v \cdot \arccos \frac{z-t}{\lambda x}\right)}{\pi \lambda x^{2.5} \sqrt{1 - \left(\frac{z-t}{\lambda x}\right)^2}} dx - \right. \\ & \left. - \int_{R_2}^{(t-z)/\lambda} \frac{\sin(v\pi) e^{-v \cdot \operatorname{arccch} \frac{t-z}{\lambda x}}}{\pi \lambda x^{2.5} \sqrt{\left(\frac{t-z}{\lambda x}\right)^2 - 1}} dx - \right. \\ & \left. - H(t - 2z) \int_{R_2}^{(t-z)/\lambda} \frac{\sin(v\pi) e^{-v \cdot \operatorname{arccch} \frac{t-z}{\lambda x}}}{\pi \lambda x^{2.5} \sqrt{\left(\frac{t-z}{\lambda x}\right)^2 - 1}} dx, \right. \\ W(t, z) = & H(\lambda R_1 - z - t) \int_{z/\lambda}^{(t+z)/\lambda} \frac{\operatorname{ch}\left(v \cdot \operatorname{arccch} \frac{t+z}{\lambda x}\right)}{\lambda x^{2.5} \sqrt{\left(\frac{t+z}{\lambda x}\right)^2 - 1}} dx + \\ & + H(t - \lambda R_1 + z) \int_{z/\lambda}^{R_1} \frac{\operatorname{ch}\left(v \cdot \operatorname{arccch} \frac{t+z}{\lambda x}\right)}{\lambda x^{2.5} \sqrt{\left(\frac{t+z}{\lambda x}\right)^2 - 1}} dx, \end{aligned}$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда. При проведении расчетов подынтегральные функции на соответствующих временных интервалах раскладывали в степенные ряды [2], которые интегрировали аналитически. Ввиду громоздкости ограничимся формулой для $W(t, z)$:

$$\begin{aligned}
W(t, z) = & H(\lambda R_1 - z - t) \frac{\lambda^{0.5}}{2\sqrt{2}(t+z)^{1.5}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[\frac{1 - e^{-(2k-0.5-\nu)z_3}}{2k-0.5-\nu} + \right. \\
& \left. + \frac{1 - e^{-(2k-0.5+\nu)z_3}}{2k-0.5+\nu} \right] + H(t - \lambda R_1 + z) \frac{\lambda^{0.5}}{2\sqrt{2}(t+z)^{1.5}} \times \\
& \times \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[\frac{e^{-(2k-0.5-\nu)z_4} - e^{-(2k-0.5-\nu)z_3}}{2k-0.5-\nu} + \right. \\
& \left. + \frac{e^{-(2k-0.5+\nu)z_4} - e^{-(2k-0.5+\nu)z_3}}{2k-0.5+\nu} \right],
\end{aligned}$$

где

$$a_0 = 1, \quad a_{k+1} = -a_k \frac{2k-1}{2k+2}, \quad z_3 = \operatorname{arccch}\left(\frac{t+z}{z}\right), \quad z_4 = \operatorname{arccch}\left(\frac{t+z}{\lambda R_1}\right).$$

Доказана сходимость рядов и установлена оценка остаточных членов, что позволяет вычислять функции V и W с наперед заданной точностью.

Определение значений $X_1(t)$, $X_2(t)$ и $Y_1(t)$ проводили с использованием теоремы о свертке оригиналов:

$$X_1(t) = \beta \int_0^t V(\tau, \lambda R_1) G(t - \tau, \lambda R_1) d\tau + \frac{\mu}{R_1^{1.5}},$$

$$X_2(t) = \beta \int_0^t V(\tau, \lambda R_1) g_{0\nu}(t - \tau, \lambda R_1) d\tau,$$

$$Y_1(t) = \beta \int_0^t W(\tau, \lambda R_2) F(t - \tau, \lambda R_2) d\tau + \frac{\mu}{R_2^{1.5}}.$$

Систему интегральных уравнений (22) решали численно с учетом запаздывания аргументов неизвестных функций в ее правых частях. После нахождения $\mathcal{A}(t)$, $\mathcal{B}(t)$ и $\mathcal{D}(t)$ также с использованием квадратурных формул определяли функцию $C(t)$ из уравнения (23), в котором оригинал функции $\Omega^L(s)$ может быть записан в виде

$$\Omega(t) = \int_0^t (t - \tau) [\Phi_1(\tau) + \Phi_2(\tau)] d\tau + t \left[b_2 - \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} \right] + b_3,$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_1(t) = & \int_0^t \mathcal{A}(\tau) \left[\frac{a_6}{\sqrt{R_1}} f_{0\nu}(t - \tau, \lambda R_1) + 2a_5 V(t - \tau, \lambda R_1) \right] d\tau + \\
& + \int_0^{t-T} \mathcal{A}(\tau) \frac{-a_6}{\sqrt{R_2}} f_{0\nu}(t - T - \tau, \lambda R_2) d\tau + \\
& + \int_0^t \mathcal{B}(\tau) \left[\frac{-a_6}{\sqrt{R_2}} g_{0\nu}(t - \tau, \lambda R_2) + 2a_5 W(t - \tau, \lambda R_2) \right] d\tau + \\
& + \int_0^{t-T} \mathcal{B}(\tau) \frac{a_6}{\sqrt{R_1}} g_{0\nu}(t - T - \tau, \lambda R_1) d\tau,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(t) &= a_6\beta \left[\frac{-1}{\sqrt{R_1}} \int_0^t V(\tau, \lambda R_1) g_{0v}(t - \tau, \lambda R_1) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{R_2}} \int_0^t W(\tau, \lambda R_2) f_{0v}(t - \tau, \lambda R_2) d\tau \right] - 2a_5\beta Z(t), \\ Z(t) &= \frac{2}{t} - \int_0^t \left[\frac{W(\tau, x)}{R_2^{0.5}} \left(f_{1v}(t - \tau, x) - \frac{f_{2v}(t - \tau, x)}{t} \right) \right]_{x=\lambda R_2} - \\ &\quad - \left. \frac{V(\tau, x)}{R_1^{0.5}} \left(g_{1v}(t - \tau, x) - \frac{g_{2v}(t - \tau, x)}{t} \right) \right]_{x=\lambda R_1} d\tau.\end{aligned}$$

Отметим, что при построении оригинала функции $Z^L(s)$ ее трансформанту дифференцировали по параметру s , что позволило после ряда преобразований избавиться от интеграла по пространственной координате.

Располагая значениями $\mathcal{A}(t)$, $\mathcal{B}(t)$, $\mathcal{C}(t)$ и $\mathcal{D}(t)$, легко вычислить физические характеристики исследуемого переходного процесса. Формула (14) для определения радиального напряжения σ_r примет вид

$$\sigma_r(t, r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^t C(\tau) N(t - \tau, r) d\tau,$$

где

$$\begin{aligned}N(t, r) &= \int_0^{t-\lambda(R_1-r)} \mathcal{A}(\tau) F(t - \lambda(R_1 - r) - \tau, \lambda r) d\tau + \\ &\quad + \int_0^{t-\lambda(r-R_2)} \mathcal{B}(\tau) G(t - \lambda(r - R_2) - \tau, \lambda r) d\tau - \\ &\quad - \beta \int_0^t [W(\tau, \lambda r) F(t - \tau, \lambda r) + V(\tau, \lambda r) G(t - \tau, \lambda r)] d\tau - \frac{\mu}{r^{1.5}}.\end{aligned}$$

Перемещение $u_r(t, r)$, разность потенциалов $U_p(t)$, давление $p(t, r)$ в акустической среде и другие значения вычисляются аналогично.

Числовые результаты. Расчеты проводились при следующих физических параметрах *пьезоэлектрического сферического преобразователя* безразмерной толщины $R_1 - R_2 = 0.2$ ($R_1 = 1$): $c_{11}^E = 10.3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $c_{13}^E = 5.9 \cdot 10^{10}$ Н/м², $c_{33}^E = 10.2 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\rho_p = 7600$ кг/м³, $e_{13} = -7.78$ Кл/м², $e_{33} = 15.2$ Кл/м², $d_{33} = 3.56 \cdot 10^{-10}$ Кл/Н, $\varepsilon_{33}^S = 893 \cdot \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – диэлектрическая проницаемость вакуума (эти параметры соответствуют характеристикам материала PZT-5), *акустической среды*: $c_w = 1500$ м/с и $\rho_w = 1000$ кг/м³ (вода). Точность вычислений контролировалась варьированием шага по времени Δt . При этом отличие максимальных значений расчетных физических характеристик нестационарного процесса при $\Delta t = 1/400$ и $\Delta t = 1/600$ не превышало 1%. Учитывая то, что резистор R^* пропорционально влияет на значения расчетных величин, при вычислениях этот элемент не учитывался: $\lambda_R = 0$.

На рис. 2 представлено гидродинамическое давление p на внешней поверхности сферы ($r = R_1$) в случае, когда колебательный контур отсутствует ($\lambda_L = \lambda_C = 0$), а к электродным покрытиям излучателя подводится ступенчатый электрический импульс $\varepsilon(t) = H(t)$ (кривая 1) или конечный си-

нусоидальный импульс $\varepsilon(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot H(T_0 - t)$ при $T_0 = 3.443$ (кривая 2) и $T_0 = 3.873$ (кривая 3). Значение $\omega_0 = 3.65$ соответствует собственной частоте излучателя в вакууме. Отметим, что при $T_0 = 3.443$ окончание синусоидального электрического импульса происходит в момент, когда разность потенциалов между электродами равна нулю. При длительности импульса $T_0 = 3.873$ функция $\varepsilon(t)$ при $t = T_0$ достигает максимального значения и дальше скачком падает до нуля.

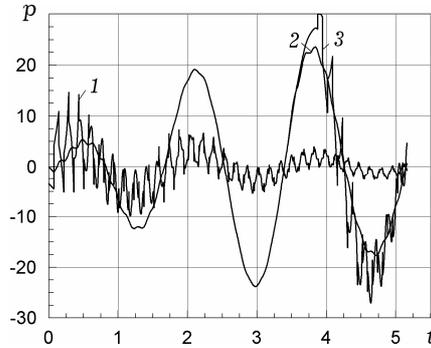


Рис. 2. Гидродинамическое давление на поверхности $r = R_1$ при $\lambda_L = \lambda_C = 0$.

Рис. 3 иллюстрирует результаты вычислений $u_r|_{r=R_1}$ и $p|_{r=R_1}$, полученные для разности потенциалов $\varepsilon(t) = H(t)$ на входе проводной цепи, содержащей индуктивность L^* ($\lambda_C = 0$). Отметим, что излучатель представляет собой сферический конденсатор, безразмерная статическая емкость которого (в недеформированном состоянии) равна $C_{st} = 4\pi/[(R_1 - R_2)/R_1 R_2]$ [6]. На основании равенства $\omega_0^2 L^* C_{st} = 1$, определяющего резонансную частоту проводной цепи, включающей пьезопреобразователь, выбирали значение безразмерной индуктивности L^* (при $\lambda_L = 0.0015$ амплитуда электрического тока достигает максимума). При удовлетворении этого равенства резонансная частота последовательной цепи, содержащей емкость C_{st} и индуктивность L^* , совпадает с частотой ω_0 . Разность потенциалов U_p между электродами сферы как функция времени для этого случая изображена на рис. 4. Кривые 1, 2 и 3 на рис. 3 и рис. 4 соответствуют значениям $\lambda_L = 0.0005, 0.0015, 0.003$.

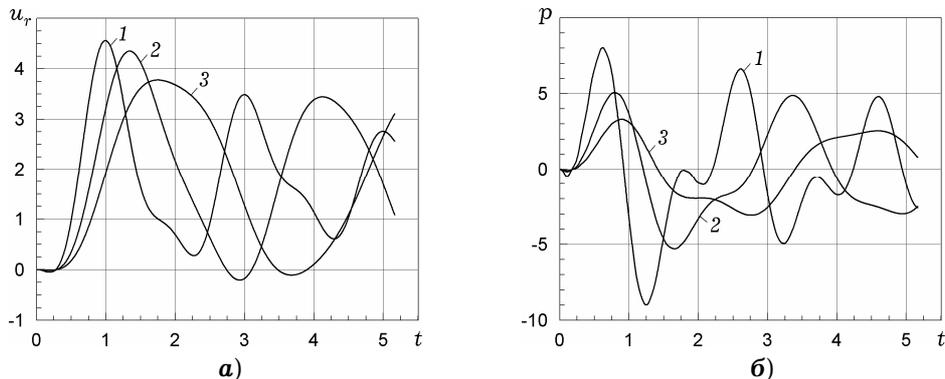


Рис. 3. Радиальное перемещение u_r и гидродинамическое давление p на поверхности $r = R_1$ при $\lambda_C = \lambda_R = 0$.

Расчеты гидродинамического давления $p|_{r=R_1}$, возбуждаемого синусоидальным импульсом $\varepsilon(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot H(3.873 - t)$, представлены на рис. 5. При этом предполагали, что проводная цепь имеет емкость и индуктивность с такими параметрами: $\lambda_C = 1/C_{st} = 0.02$ ($C^* = C_{st}$), $\lambda_L = 0.003$ (кривая 1); $\lambda_C = 2/C_{st} = 0.04$, $\lambda_L = 0.0045$ (кривая 2) и $\lambda_C = 1/2C_{st} = 0.01$, $\lambda_L = 0.0022$ (кривая 3). Параметр λ_L для этих кривых был вычислен из условия равенства резонансной частоты частоте колебательного контура ω_0 . Для сравнения приведена кривая 4, полученная при $\lambda_C = 0.02$ и $\lambda_L = 0.0015$.

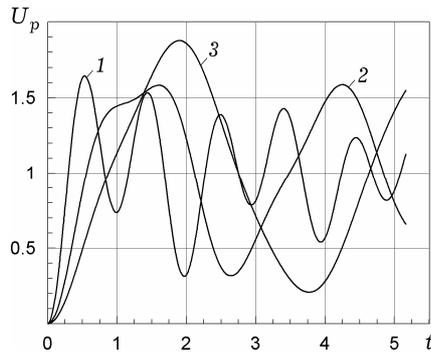


Рис. 4. Разность потенциалов между электродами сферы при $\lambda_C = \lambda_R = 0$.

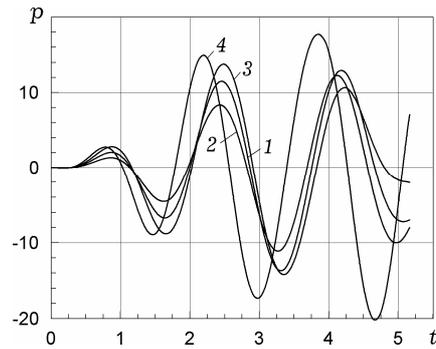


Рис. 5. Гидродинамическое давление на поверхности $r = R_1$ при $\lambda_R = 0$.

Вычисления показали, что при приложении к токопроводящим покрытиям излучателя ступенчатого электрического импульса, эпюра давления носит колебательный характер и имеет скачки, вызванные фронтами отраженных от границ $r = R_1$ и $r = R_2$ упругих волн (рис. 2, кривая 1). Резкие изменения давления также имеют место после окончания синусоидального импульса длительности $T_0 = 3.873$ (рис. 2, кривая 3). Проводная цепь с индуктивностью (рис. 3 и рис. 4) существенно изменяет форму электрического импульса между электродами преобразователя (рис. 4) по сравнению с подводимым $\varepsilon(t) = H(t)$. Это приводит к фактическому устранению высокочастотных колебаний u_r (рис. 3а) и резких изменений p (рис. 3б). Зависимость от времени перемещений и давлений носит колебательный характер со сравнительно низкой частотой, которая уменьшается с ростом параметра λ_L . Изменяя параметры колебательного контура с емкостью C^* и индуктивностью L^* таким образом, чтобы его резонансная частота с учетом статической емкости электроупругой сферы была равна ω_0 , можно варьировать максимальные значения давления в излученной волне (рис. 5). После окончания действия синусоидального импульса $\varepsilon(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot H(3.873 - t)$ скачки значений давления отсутствуют (рис. 5).

1. Бабаев А. А. Возбуждение сферического пьезоизлучателя нестационарными электрическими сигналами с учетом процессов в кабельном тракте // Прикл. механика. – 1999. – 35, № 2. – С. 41–46.

To же: Babayev A. A. Excitation of a spherical piezoemitter which generates nonsteady electric signals with allowance for processes in the cable channel // Int. Appl. Mech. – 1999. – 35, No. 2. – P. 145–151.

2. *Бабаев А. А., Савин В. Г.* Излучение нестационарных акустических волн толсто-стенной электроупругой сферой // Прикл. механика. – 1995. – **31**, № 11. – С. 25–32.
То же: *Babaev A. A., Savin V. G.* Emission of nonstationary acoustic waves by a thick-walled electrostatic sphere // Int. Appl. Mech. – 1995. – **31**, No. 11. – P. 887–894.
3. *Бабаев А. А., Савин В. Г., Тотева О. В.* Излучение акустических импульсов сферическим пьезопреобразователем с последовательным колебательным контуром // Электроника и связь. – 2001. – № 10. – С. 116–121.
4. *Бабаев А. А., Янчевский И. В.* Определение ударной нагрузки, действующей на электроупругую биморфную балку с разрезными токопроводящими покрытиями // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 9. – С. 60–70.
То же: *Babaev A. A., Yanchevskii I. V.* Determining the shock load on an electroelastic bimorph beam with split conductive coatings // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, No. 9. – P. 1019–1026.
5. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с. – Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 5.
6. *Калашников С. Г.* Электричество: Учеб. пособие. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 624 с.
7. *Карнаухов В. Г., Ткаченко Я. В.* Влияние деформации сдвига на демпфирование колебаний прямоугольной пластины пьезоэлектрическими актуаторами // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 12. – С. 124–132.
То же: *Karnaukhov V. G., Tkachenko Ya. V.* Influence of shear strains on damping the vibrations of a rectangular plate with piezoelectric actuators // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, No. 12. – P. 1365–1373.
8. *Коновалов С. И., Кузьменко А. Г.* Нестационарный режим излучения тонкостенной пьезокерамической сферы с электрической корректирующей цепью // Акуст. журн. – 2010. – **56**, № 5. – С. 679–683.
9. *Кубенко В. Д., Янчевский И. В.* Нестационарные неосесимметричные колебания цилиндрической оболочки металл-пьезокерамика // Методы розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – 2011. – Вип. 12. – С. 188–196.
10. *Шляхин Д. А.* Нестационарные осесимметричные колебания электроупругих систем. – Самара: Самарск. гос. архитектурно-строительный ун-т, 2012. – 191 с.
11. *Шульга М. О., Григорьев С. А.* Нестационарные упругоэлектрические колебания сферического пьезокерамического преобразователя с закрепленной внутренней границей // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 91–97.
12. *Шульга Н. А., Григорьева Л. О.* Радиальные упругоэлектрические нестационарные колебания пьезокерамического цилиндра при механическом нагружении // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 4. – С. 66–71.
То же: *Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O.* Nonstationary radial electroelastic vibrations of a piezoceramic cylinder under mechanical loading // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, No. 4. – P. 401–405.
13. *Янчевський І. В.* Збудження згинних коливань прямокутної пластинки метал – п'єзокераміка нестационарним електричним сигналом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 3. – С. 81–86.
То же: *Yanchevskiy I. V.* Excitation of the bending vibrations of a rectangular metalpiezoceramic plate by a nonstationary electric signal // J. Math. Sci. – 2012. – **185**, No. 6. – P. 852–857.
14. *Bodaghi M., Shakeri M.* An analytical approach for free vibration and transient response of functionally graded piezoelectric cylindrical panels subjected to impulsive loads // Compos. Struct. – 2012. – **94**, No. 5. – P. 1721–1735.
15. *Piquette J. C.* Approximate transducer transient suppression with increased output amplitude // J. Acoust. Soc. Am. – 2010. – **128**, No. 5. – P. 2543–2548.
16. *Wang H. M., Ding H. J., Chen Y. M.* Transient responses of a multilayered spherically isotropic piezoelectric hollow sphere // Arch. Appl. Mech. – 2005. – **74**, No. 9. – P. 581–599.

ВПЛИВ КОЛИВАЛЬНОГО КОНТУРУ НА ВИПРОМІНЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ АКУСТИЧНИХ ХВИЛЬ ЕЛЕКТРОПРУЖНОЮ СФЕРОЮ

Розглядається нестационарна задача випромінювання акустичних хвиль товсто-стінним сферичним п'єзоперетворювачем, який підключений до генератора електричних імпульсів через коливальний контур із зосередженими параметрами. Перехідний процес моделюється рівняннями зв'язаної теорії електропружності, акустичного наближення і квазістатичної теорії для електричного кола. Запропоновано метод, згідно з яким задачу зведено до розв'язання системи інтегральних рівнянь Вольтерра із запізнювальними аргументами. На основі виконаних розрахунків оцінено вплив провідної лінії на процеси в гідроелектропружній системі.

INFLUENCE OF AN OSCILLATING CIRCUIT ON THE RADIATION OF NON-STATIONARY ACOUSTIC WAVES BY AN ELECTROELASTIC SPHERE

The nonstationary problem of acoustic waves radiation by a thick-walled spherical piezoceramic transducer which is connected to generator of electric impulses through oscillating circuit with lumped parameters is considered. The transient process is modeled within equations of coupled electroelasticity theory, acoustic approximation and quasistatic theory for electric circuit. The problem is reduced to a system of Volterra integral equations with lagging arguments. On the basis of completed calculations the influence of the wire line on the processes in a hydroelectroelastic system is estimated.

¹ Нац. техн. ун-т України «КПІ», Київ,
² Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенко
НАН України, Київ

Получено
05.12.12