УДК 519.6

С. М. Шахно

ПРО ЗБІЖНІСТЬ ПРИСКОРЕНОГО МЕТОДУ НЬЮТОНА ПРИ УЗАГАЛЬНЕНИХ УМОВАХ ЛІПШИЦЯ

Досліджено локальну збіжність прискореного методу Ньютона для розв'язування нелінійних функціональних рівнянь за узагальнених умов Ліпшиця для похідних Фреше першого та другого порядків. Встановлено квадратичний порядок збіжності прискореного методу та проведено порівняння його з класичним методом Ньютона.

Вступ. Нехай задано нелінійне функціональне рівняння

$$F(x) = 0\,, \tag{1}$$

де $F(x)$ – нелінійний оператор, який діє з банахового простору X в банахів простір Y. Найбільш популярним і широковживаним методом розв'язування рівняння (1) є класичний метод Ньютона [3, 4]. У статті [1] запропоновано новий метод, який є модифікацією методу Ньютона, проведено дослідження його напівлокальної збіжності (за умов типу Канторовича) і вказано клас задач, для яких цей метод збігається швидше ніж метод Ньютона.

Будемо вважати, що справджується подання

$$F(x) \equiv x - \varphi(x) = 0\,, \tag{2}$$

де φ – нелінійний оператор у банаховому просторі X.

Ітераційний процес для розв'язування рівняння (2) має вигляд

$$x_{k+1} = x_k - \left[F'\left(\frac{x_k + \varphi(x_k)}{2}\right)\right]^{-1} F(x_k), \qquad k = 0,1,2,\ldots, \tag{3}$$

де x_0 – початкове значення. Метод (3) є частковим випадком однопараметричного класу методів

$$x_{k+1} = x_k - [F'((1-\mu)x_k + \mu\varphi(x_k))]^{-1} F(x_k), \qquad k = 0,1,2,\ldots, \tag{4}$$

який вивчено у [2]. Як показано у цій праці, найбільш ефективним є метод (4) при значенні параметра $\mu = 0.5$, тобто метод (3). Достатньо повно вивчено метод (3) у праці [7] за класичних умов, накладених на похідні першого та другого порядків. Метод (4) вивчався також в [11], але там результати отримано при інших, жорсткіших умовах.

У праці [10] при дослідженні методу Ньютона запропоновано узагальнені умови Ліпшиця для оператора похідної, в яких замість сталої L використано деяку додатну інтегровну функцію. Автором у [9] запропоновано аналогічні узагальнені умови Ліпшиця для оператора поділеної різниці першого порядку і при цих умовах досліджено збіжність методу хорд. У праці [6] вивчалась збіжність методу Стеффенсена для операторних рівнянь при узагальнених умовах Ліпшиця для перших поділених різниць нелінійного оператора $F(x)$. У праці [5] проведено дослідження неточних методів при узагальнених умовах Ліпшиця для поділених різниць першого порядку, а у [8] вивчено збіжність неточного методу Ньютона при іншій узагальненій умові Ліпшиця для похідної першого порядку.

У цій праці розглядаємо метод (3) при узагальнених умовах Ліпшиця для похідних першого та другого порядків.

Означення та допоміжні леми. Позначимо через $B(x_0, r) = \{x : \|x - x_0\| < r\}$ відкриту, а через $\overline{B(x_0, r)} = \{x : \|x - x_0\| \le r\}$ – замкнуту кулі з радіусом r і з центром у точці x_0.

Умову на оператор F

$$\|F(x) - F(x^\tau)\| \le L\|x - x^\tau\| \qquad \forall\ x, x^\tau \in D$$

називатимемо умовою Ліпшиця в області D зі сталою L. Якщо область D є кулею $B(x_0, r)$ з центром x_0 і радіусом r, $x \in B(x_0, r)$, то відрізок прямої $x^\tau = x_0 + \tau(x - x_0)$, $0 \le \tau \le 1$, з'єднує точки x і x_0 кулі $B(x_0, r)$. Тоді умову

$$\|F(x) - F(x^\tau)\| \le L\|x - x^\tau\| \qquad \forall\ x \in B(x_0, r), \qquad 0 \le \tau \le 1, \tag{5}$$

назвемо радіальною умовою Ліпшиця у кулі $B(x_0, r)$ зі сталою L.

Умову

$$\|F(x) - F(x_0)\| \le L\|x - x_0\| \qquad \forall\ x \in B(x_0, r), \tag{6}$$

називатимемо центральною умовою Ліпшиця у кулі $B(x_0, r)$ зі сталою L.

Проте L в умовах Ліпшиця не обов'язково повинна бути сталою, а може бути додатною інтегровною функцією. У цьому випадку (5) і (6) замінимо відповідно на

$$\|F(x) - F(x^\tau)\| \le \int_{\tau\rho(x)}^{\rho(x)} L(u)\,du \qquad \forall\ x \in B(x_0, r), \quad 0 \le \tau \le 1, \tag{7}$$

та

$$\|F(x) - F(x_0)\| \le \int_0^{\rho(x)} L(u)\,du \qquad \forall\ x \in B(x_0, r). \tag{8}$$

Умови Ліпшиця (7) і (8) називатимемо узагальненими умовами Ліпшиця або такими, що містять L у середньому.

Використовуючи теорему Банаха [3], отримуємо такий результат.

Лема 1. *Припустимо, що* F *має неперервну похідну в кулі* $B(x^*, r)$, $F'(x^*)^{-1}$ *існує і похідна* F' *задовольняє центральну умову Ліпшиця з* L *в середньому*:

$$\left\|F'(x^*)^{-1}\left(F'\left(\frac{x+y}{2}\right) - F'(x^*)\right)\right\| \le \int_0^{\rho\left(\frac{x+y}{2}\right)} L(u)\,du \quad \forall\ x, y \in B(x^*, r), \tag{9}$$

де L *− додатна інтегровна функція,* $\rho(x) = \|x - x^*\|$. *Нехай* r *задовольняє умову*

$$\int_0^r L(u)\,du \le 1. \tag{10}$$

Тоді $F'(x)$ *оборотна в кулі* $B(x^*, r)$ *і*

$$\left\|F'\left(\frac{x+y}{2}\right)^{-1} F'(x^*)\right\| \le \left(1 - \int_0^{\rho\left(\frac{x+y}{2}\right)} L(u)\,du\right)^{-1}.$$

Д о в е д е н н я. Справді, з тотожності

$$F'\left(\frac{x+y}{2}\right)^{-1} F'(x^*) = \left[I - \left(I - F'(x^*)^{-1} F'\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\right]^{-1},$$

враховуючи (9) і (10), за теоремою Банаха отримаємо

$$\left\|F'\left(\frac{x+y}{2}\right)^{-1} F'(x^*)\right\| \le \left(1 - \int_0^{\rho\left(\frac{x+y}{2}\right)} L(u)\,du\right)^{-1}. \qquad \blacklozenge$$

Лема 2 [5]. *Нехай* $h(t) = \frac{1}{t}\int_0^t L(u)\,du,\ 0 \le t \le r$, *де* $L(u)$ − *додатна інтегровна та монотонно неспадна функція на* $[0, r]$. *Тоді* $h(t)$ *є монотонно неспадною функцією відносно* t.

Лема 3. *Нехай* $g(t) = \frac{1}{t^3}\int_0^t N(u)(t-u)^2\,du,\ 0 \le t \le r$, *де* $N(u)$ − *додатна інтегровна та монотонно неспадна функція на* $[0, r]$. *Тоді* $g(t)$ *є монотонно неспадною функцією відносно* t.

Д о в е д е н н я. Справді, з монотонності N для $0 < t_1 < t_2$ маємо

$$g(t_2) - g(t_1) = \frac{1}{t_2^3}\int_0^{t_2} N(u)(t_2-u)^2\,du - \frac{1}{t_1^3}\int_0^{t_1} N(u)(t_1-u)^2\,du =$$

$$= \frac{1}{t_2^3}\int_{t_1}^{t_2} N(u)(t_2-u)^2\,du + \frac{1}{t_2^3}\int_0^{t_1} N(u)(t_1-u)^2\,du -$$

$$- \frac{1}{t_1^3}\int_0^{t_1} N(u)(t_1-u)^2\,du =$$

$$= \frac{1}{t_2^3}\int_{t_1}^{t_2} N(u)(t_2-u)^2\,du + \left(\frac{1}{t_2^3} - \frac{1}{t_1^3}\right)\int_0^{t_1} N(u)(t_1-u)^2\,du \ge$$

$$\ge N(t_1)\left[\frac{1}{t_2^3}\int_{t_1}^{t_2} (t_2-u)^2\,du + \left(\frac{1}{t_2^3} - \frac{1}{t_1^3}\right)\int_0^{t_1} (t_1-u)^2\,du\right] =$$

$$= N(t_1)\left[\frac{1}{t_2^3}\int_0^{t_2} (t_2-u)^2\,du - \frac{1}{t_1^3}\int_0^{t_1} (t_1-u)^2\,du\right] = 0\,.$$

Отже, функція $g(t) = \frac{1}{t^3}\int_0^t N(u)(t-u)^2\,du,\ 0 \le t \le r$, є монотонно неспадною відносно t. ♦

Збіжність прискореного методу Ньютона. Вивчимо локальну збіжність методу (3). Радіус області збіжності і порядок збіжності цього методу встановлює така

Теорема 1. *Нехай* F − *нелінійний оператор, визначений у відкритій опуклій області* D *простору* X *зі значеннями у просторі* X. *Припустимо, що:*

(***i***) $F(x) = 0$ *має розв'язок* $x^* \in D$, *і в цій точці* x^* *існує похідна Фреше* $F'(x^*)$ *і вона є оборотною;*

(***ii***) *існують похідні Фреше* F' *і* F'' *в* $B(x^*, Mr)$, *які задовольняють умову Ліпшиця з* L *в середньому*:

$$\left\|F'(x^*)^{-1}(F'(x) - F'(x^*))\right\| \le \int_0^{\rho(x)} L(u)\,du\,, \tag{11}$$

$$\left\|F'(x^*)^{-1}(F''(x) - F''(y))\right\| \le \int_0^{\|x-y\|} N(u)\,du\,, \tag{12}$$

де $x, y \in B(x^*, r)$, $\rho(x) = \left\|x - x^*\right\|$ *і функція* L *є неспадною;*

(***iii***) $\|\varphi'(x)\| \le \alpha,\quad M = \max\{1, \alpha\}\quad \forall\ x \in B(x^*, r)$;

(***iv***) $r > 0$ *задовольняє нерівність*

$$\frac{\frac{1}{8}\int_0^r N(u)(r-u)^2\,du + r\int_0^{\alpha r/2} L(u)\,du}{r\left(1-\int_0^{(1+\alpha)r/2} L(u)\,du\right)} \le 1. \tag{13}$$

Тоді прискорений метод Ньютона збігаєтьcя для всіх $x_0 \in B(x^*, r)$ *і*

$$\rho(x_{n+1}) = \left\|x_{n+1} - x^*\right\| \le (A\rho(x_n) + C\alpha)\rho(x_n)^2 \le (A\rho(x_0) + C\alpha)\rho(x_n)^2 \le$$

$$\le \frac{q}{\rho(x_0)}\rho(x_n)^2 \le \ldots \le q^{2^{n+1}-1}\rho(x_0), \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{14}$$

де

$$A = \frac{\int_0^{\rho(x_0)} N(u)(\rho(x_0)-u)^2\,du}{8\left(1-\int_0^{(1+\alpha)\rho(x_0)/2} L(u)\,du\right)\rho(x_0)^3},$$

$$C = \frac{\int_0^{\alpha\rho(x_0)/2} L(u)\,du}{\left(1-\int_0^{(1+\alpha)\rho(x_0)/2} L(u)\,du\right)\alpha\rho(x_0)},$$

$$q = A\rho(x_0)^2 + C\alpha\rho(x_0) < 1. \tag{15}$$

Д о в е д е н н я. Виберемо довільно $x_0 \in B(x^*, r)$, де r задовольняє (13). Тоді q, визначене (15), буде меншим від 1. Дійсно, згідно з лемами 2 і 3, при монотонності L і N маємо, що $\frac{1}{t}\int_0^t L(u)\,du$ і $\frac{1}{t^3}\int_0^t N(u)(t-u)^2\,du$ є неспадними відносно t. Тому

$$q = \frac{\int_0^{\rho(x_0)} N(u)(\rho(x_0)-u)^2\,du\,\rho(x_0)^2}{8\rho(x_0)^3\left(1-\int_0^{(1+\alpha)\rho(x_0)/2} L(u)\,du\right)} + \frac{\int_0^{\alpha\rho(x_0)/2} L(u)\,du\,\frac{\alpha\rho(x_0)}{2}}{\frac{\alpha\rho(x_0)}{2}\left(1-\int_0^{(1+\alpha)\rho(x_0)/2} L(u)\,du\right)} \le$$

$$\le \frac{\int_0^r N(u)(r-u)^2\,du\,\rho(x_0)^2}{8r^3\left(1-\int_0^{(1+\alpha)r/2} L(u)\,du\right)} + \frac{\int_0^{\alpha r/2} L(u)\,du\,\frac{\alpha\rho(x_0)}{2}}{\frac{\alpha r}{2}\left(1-\int_0^{(1+\alpha)r/2} L(u)\,du\right)} \le$$

$$\le \frac{1}{r}\left(\frac{\int_0^r N(u)(r-u)^2\,du}{8r\left(1-\int_0^{(1+\alpha)r/2} L(u)\,du\right)} + \frac{\int_0^{\alpha r/2} L(u)\,du}{\left(1-\int_0^{(1+\alpha)r/2} L(u)\,du\right)}\right)\rho(x_0) \le$$

$$\le \frac{\rho(x_0)}{r} < 1. \tag{16}$$

Якщо $x_k \in B(x^*, r)$, то згідно з (5) маємо

$$x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - F'\left(\frac{x_k + \varphi(x_k)}{2}\right)^{-1} F(x_k) = F'\left(\frac{x_k + \varphi(x_k)}{2}\right)^{-1} \times$$

$$\times \left[F'\left(\frac{x_k + \varphi(x_k)}{2}\right)(x_k - x^*) - F(x_k) + F(x^*)\right] =$$

$$= F'\left(\frac{x_k + \varphi(x_k)}{2}\right)^{-1} F'(x^*) \times$$

$$\times \left(F'(x^*)^{-1}\left[F'\left(\frac{x_k + \varphi(x_k)}{2}\right)(x_k - x^*) - F(x_k) + F(x^*)\right]\right) =$$

$$= F'\left(\frac{x_k + \varphi(x_k)}{2}\right)^{-1} F'(x^*) \times$$

$$\times \left(F'(x^*)^{-1}\left[F'\left(\frac{x_k + x^*}{2}\right)(x_k - x^*) - F(x_k) + F(x^*)\right] +\right.$$

$$\left. + F'(x^*)^{-1}\left[F'\left(\frac{x_k + \varphi(x_k)}{2}\right) - F'\left(\frac{x_k + x^*}{2}\right)\right](x_k - x^*)\right).$$

Запишемо тотожність з леми 1 [12, с. 336] при значенні $\omega = \frac{1}{2}$:

$$F(x) - F(y) - F'\left(\frac{x + y}{2}\right)(x - y) = \frac{1}{4}\int_0^1 (1 - t)\left[F''\left(\frac{x + y}{2} + \frac{t}{2}(x - y)\right) -\right.$$

$$\left. - F''\left(\frac{x + y}{2} + \frac{t}{2}(y - x)\right)\right](x - y)(x - y)\,dt.$$

Поклавши у цій рівності $x = x^*$, $y = x$, отримаємо оцінки

$$\left\| F'(x^*)^{-1}\left[F(x^*) - F(x_k) - F'\left(\frac{x_k + x^*}{2}\right)(x^* - x_k)\right]\right\| =$$

$$= \frac{1}{4}\left\| \int_0^1 (1 - t)F'(x^*)^{-1}\left[F''\left(\frac{x_k + x^*}{2} + \frac{t}{2}(x^* - x_k)\right) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - F''\left(\frac{x_k + x^*}{2} + \frac{t}{2}(x_k - x^*)\right)(x^* - x_k)(x^* - x_k)\right]dt\right\| \le$$

$$\le \frac{1}{4}\int_0^1 (1 - t)\int_0^{t\|x_k - x^*\|} N(u)\,du\,\|x_k - x^*\|^2\,dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\|x_k - x^*\|}\left(1 - \frac{u}{\|x_k - x^*\|}\right)^2 N(u)du\,\|x_k - x^*\|^2 =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\rho(x_k)} N(u)(\rho(x_k) - u)^2\,du.$$

Тоді, згідно з лемами 1–3 і умовами (11), (12), з урахуванням останньої нерівності отримаємо

$$\begin{aligned}
\left\|x_{k+1}-x^*\right\| &\le \left\|F'\left(\frac{x_k+\varphi(x_k)}{2}\right)^{-1}F'(x^*)\right\|\times\\
&\times\left(\left\|F'(x^*)^{-1}\left[F'\left(\frac{x_k+x^*}{2}\right)(x_k-x^*)-F(x_k)+F(x^*)\right]\right\|+\right.\\
&\left.+\left\|F'(x^*)^{-1}\left[F'\left(\frac{x_k+\varphi(x_k)}{2}\right)-F'\left(\frac{x_k+x^*}{2}\right)\right](x_k-x^*)\right\|\right)\le\\
&\le\left\|F'\left(\frac{x_k+\varphi(x_k)}{2}\right)^{-1}F'(x^*)\right\|\times\\
&\times\left(\frac{1}{4}\int_0^1(1-t)\left\|F'(x^*)^{-1}\left[F''\left(\frac{x_k+x^*}{2}+\frac{t}{2}(x_k-x^*)\right)-\right.\right.\right.\\
&\left.\left.-F''\left(\frac{x_k+x^*}{2}+\frac{t}{2}(x^*-x_k)\right)\right](x_k-x^*)(x_k-x^*)\right\|dt+\\
&\left.+\left\|F'(x^*)^{-1}\left[F'\left(\frac{x_k+\varphi(x_k)}{2}\right)-F'\left(\frac{x_k+x^*}{2}\right)\right](x_k-x^*)\right\|\right)\le\\
&\le\frac{\int_0^{\rho(x_k)}N(u)(\rho(x_k)-u)^2\,du\,\rho(x_k)^3}{8\left(1-\int_0^{\rho\left(\frac{x_k+\varphi(x_k)}{2}\right)}L(u)\,du\right)\rho(x_k)^3}+\\
&+\frac{\int_0^{\rho(\varphi(x_k))/2}L(u)\,du\,\rho(x_k)\frac{\rho(\varphi(x_k))}{2}}{\left(1-\int_0^{\rho\left(\frac{x_k+\varphi(x_k)}{2}\right)}L(u)\,du\right)\frac{\rho(\varphi(x_k))}{2}}\le\\
&\le\frac{\int_0^{\rho(x_0)}N(u)(\rho(x_0)-u)^2\,du\,\rho(x_k)^3}{8\left(1-\int_0^{(1+\alpha)\rho(x_0)/2}L(u)\,du\right)\rho(x_0)^3}+\\
&+\frac{\int_0^{\alpha\rho(x_0)/2}L(u)\,du\,\rho(x_k)\frac{\alpha\rho(x_k)}{2}}{\left(1-\int_0^{(1+\alpha)\rho(x_0)/2}L(u)\,du\right)\alpha\rho(x_0)/2}\le\\
&\le(A\rho(x_k)+C\alpha)\rho(x_k)^2\le\\
&\le(A\rho(x_0)+C\alpha)\rho(x_k)^2\le\frac{q}{\rho(x_0)}\rho(x_k)^2. \qquad (17)
\end{aligned}$$

Також оцінимо

$$\left\|\varphi(x_{k+1})-x^*\right\| = \left\|\varphi(x_{k+1})-\varphi(x^*)\right\| \le \left\|\varphi'(x_{k+1}+\theta(x_{k+1}-x^*))\right\| \times$$
$$\times \left\|x_{k+1}-x^*\right\| \le \alpha\left\|x_{k+1}-x^*\right\|, \quad 0 \le \theta \le 1. \tag{18}$$

Поклавши в оцінках (17), (18) $k = 0$, дістанемо

$$\left\|x_1 - x^*\right\| \le q\left\|x_0 - x^*\right\| < \left\|x_0 - x^*\right\|,$$

$$\left\|\varphi(x_1) - x^*\right\| \le \alpha\left\|x_1 - x^*\right\| < M\left\|x_1 - x^*\right\| \le M\left\|x_0 - x^*\right\|.$$

Отже, x_1 і $\varphi(x_1)$ належать кулі $B(x^*, \alpha r)$. Це означає, що (17) можна повторити нескінченну кількість разів. За математичною індукцією всі x_k, $\varphi(x_k) \in B(x^*, \alpha r)$, а $\rho(x_k) = \left\|x_k - x^*\right\|$ і $\rho(\varphi(x_k)) = \left\|\varphi(x_k) - x^*\right\|$ монотонно спадають.

Далі, для всіх $k = 0, 1, \ldots$ маємо

$$\left\|x_{k+1} - x^*\right\| \le \frac{q}{\rho(x_0)}\rho(x_k)^2 = \frac{q}{\rho(x_0)}\left\|x_k - x^*\right\|^2 \le \ldots \le q^{2^{k+1}-1}\left\|x_0 - x^*\right\|.$$

Таким чином, оцінку (14) доведено. ♦

Встановлення області єдиності розв'язку проводиться аналогічно, як у [10].

При вивченні методу Ньютона традиційними є припущення, що похідні задовольняють умови Ліпшиця. Вважаючи, що L і N є сталими, отримаємо з теореми 1 такий наслідок.

Наслідок 1. *Припустимо, що* $F(x^*) = 0$ *і* F *має неперервні похідні першого і другого порядків у* $B(x^*, Mr)$. *Нехай* $F'(x^*)^{-1}$ *існує, а* $F'(x^*)^{-1}F'(x)$ *і* $F'(x^*)^{-1}F''(x)$ *задовольняють умови Ліпшиця*:

$$\left\|F'(x^*)^{-1}(F'(x) - F'(x^*))\right\| \le L\left\|x - x^*\right\|,$$

$$\left\|F'(x^*)^{-1}(F''(x) - F''(y))\right\| \le N\left\|x - y\right\|,$$

де $x, y \in B(x^*, Mr)$, $\left\|\varphi'(x)\right\| \le \alpha$, $M = \max\{1, \alpha\}$ $\forall x \in B(x^*, r)$.

Нехай $r > 0$ *задовольняє рівняння*

$$Nr^2/12 + L(1 + 2\alpha)r - 2 = 0.$$

Тоді прискорений метод Ньютона (3) *збігається для всіх* $x_0 \in B(x^*, r)$ *і для*

$$q = \frac{L\alpha + \frac{N}{12}\left\|x_0 - x^*\right\|}{2 - L(1+\alpha)\left\|x_0 - x^*\right\|}\left\|x_0 - x^*\right\|$$

справджується нерівність (14).

Порівнюючи отримане значення q з наведеним у [10] значенням $q_N = \frac{L\left\|x_0 - x^*\right\|}{2(1 - L\left\|x_0 - x^*\right\|)}$ для методу Ньютона, легко бачити, що q при $\alpha < 1$ за достатньо близького початкового наближення є меншим від q_N, а отже, швидкість збіжності прискореного методу Ньютона у цьому випадку є вищою.

Висновки. У праці [9] досліджено локальну збіжність методу Ньютона у випадку виконання узагальнених умов Ліпшиця для похідних першого порядку, в яких замість сталої Ліпшиця використовується деяка додатна інтегровна функція. У цій праці досліджено локальну збіжність прискореного варіанту цього методу при узагальнених умовах Ліпшиця для похідних першого і другого порядків. Показано, що при певних умовах розглянутий метод збігається швидше ніж метод Ньютона.

1. *Бартиш М. Я., Шахно С. М.* О методе Ньютона с ускоренной сходимостью // Вестн. Киев. ун-та. Моделирование и оптимизация сложных систем. – 1987. – Вып. 6. – С. 62–66.
2. *Бартиш М. Я., Шахно С. М.* Об одном классе итерационных методов ньютоновского типа. – Львов, 1987. – 15 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 17.09.87, № 2580-Ук87.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1984. – 752 с.
4. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – Москва: Мир, 1975. – 558 с.
5. *Шахно С. М.* Збіжність неточних різницевих методів при узагальнених умовах Ліпшиця // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 3. – С. 30–40.
   Те саме: *Shakhno S. M.* Convergence of inexact difference methods under the generalized Lipschitz conditions // J. Math. Sci. – 2010. – **171**, No. 4. – P. 453–465.
6. *Шахно С. М.* Метод Стефенсена за узагальнених умов Ліпшиця для поділених різниць першого порядку // Мат. студії. – 2009. – **31**, № 1. –С. 90–95.
7. *Шахно С. М.* Исследование сходимости ускоренного метода Ньютона. – Львов, 1987. – 15 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 17.09.87, № 2579-Ук87.
8. *Chen J., Li W.* Convergence behavior of inexact Newton methods under weak Lipschitz condition // J. Comput. Appl. Math. – 2006. – **191**, No. 1. – P. 143–164.
9. *Shakhno S. M.* On the secant method under generalized Lipschitz conditions for the divided difference operator // Proc. Appl. Math. Mech. – 2007. – **7**, No. 1. – P. 2060083–2060084.
10. *Wang X.* Convergence of Newton's method and uniqueness of the solution of equations in Banach space // IMA. J. Numer. Anal. – 2000. – **20**, No. 1. – P. 123–134.
11. *Werner W.* Newton-like methods for the computation of fixed points // Comput. & Math. with Appl. – 1984. – **10**, No. 1. – P. 77–86.
12. *Werner W.* Über ein Verfahren der Ordnung $1+\sqrt{2}$ zur Nullstellenbestimmung // Numer. Math. – 1979. – **32**, No. 3. – P. 333–342.

О СХОДИМОСТИ УСКОРЕННОГО МЕТОДА НЬЮТОНА ПРИ ОБОБЩЕННЫХ УСЛОВИЯХ ЛИПШИЦА

Исследована локальная сходимость ускоренного метода Ньютона для решения нелинейных функциональных уравнений при обобщенных условиях Липшица для производных первого и второго порядков. Установлен квадратический порядок сходимости ускоренного метода и проведено сравнение его с классическим методом Ньютона.

ON CONVERGENCE OF ACCELERATED NEWTON METHOD UNDER THE GENERALIZED LIPSCHITZ CONDITIONS

The local convergence of the accelerated Newton method for solving the nonlinear functional equations is investigated under the generalized Lipschitz conditions for the first-order and second-order derivatives. Quadratic order of accelerated convergence is ascertained. The accelerated method is compared with the classical Newton method.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
29.08.12