

## СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

*Для анализа собственных колебаний параболических оболочек применяется метод Рэлея – Ритца, для использования которого выведены выражения кинетической и потенциальной энергии параболической оболочки постоянной толщины. Исследованы свойства собственных частот и форм колебаний оболочек разной высоты.*

**Введение.** Параболические оболочки широко применяются в ракетно-космической технике. В частности, обтекатель ракет-носителей представляет собой тонкую конструкцию, которая хорошо описывается параболической оболочкой [5]. В процессе полета обтекатели ракет-носителей совершают интенсивные колебания. Размеры обтекателей существенно меняются в зависимости от количества выводимого на орбиту полезного груза, а, следовательно, и динамические характеристики обтекателей различных серий существенно отличаются между собой. Поэтому чрезвычайно важно исследовать динамические характеристики параболических оболочек.

В научной литературе существует большое количество теоретических исследований оболочек вращения. В обзорной статье В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчука [3] рассматриваются свободные, вынужденные и параметрические колебания оболочек. В работах [4, 8] представлены общие подходы и методы исследований оболочек вращения. В монографии [2] представлена потенциальная энергия оболочек. Алгоритмы расчетов пологих оболочек вращения и сферических куполов приводит Н. В. Валишвили [1].

Несмотря на большое число теоретических исследований, посвященных оболочкам вращения, численные исследования параболоидов практически отсутствуют в литературе. В статье [6] рассмотрена динамика вращающейся вокруг оси симметрии параболической оболочки. В работе представлен анализ устойчивости при разных угловых скоростях вращения. В статье [7] показаны отличия проявления краевых эффектов в соприкасающихся параболических оболочках от эллиптических. Метод Рэлея – Ритца применяется для исследования линейных колебаний цилиндрической оболочки в работе [9].

В этой статье исследуются свободные колебания параболических оболочек вращения постоянной толщины. Предполагается, что колебания оболочки являются линейными, напряжения и деформации удовлетворяют закону Гука. Спектр собственных частот и форм колебаний определяется с использованием метода Рэлея – Ритца. Результаты численного анализа сравниваются с данными, полученными методом конечных элементов.

**Постановка задачи.** Рассмотрим собственные колебания тонких параболических оболочек вращения с малыми амплитудами. Деформационное состояние срединной поверхности оболочки опишем проекциями перемещений на направления касательных к координатным линиям:  $u(\theta, \varphi, t)$ ,  $v(\theta, \varphi, t)$ ,  $w(\theta, \varphi, t)$ . Углы  $\theta$ ,  $\varphi$  описывают положение точек на срединной поверхности. Эскиз такой оболочки представлен на рис. 1.

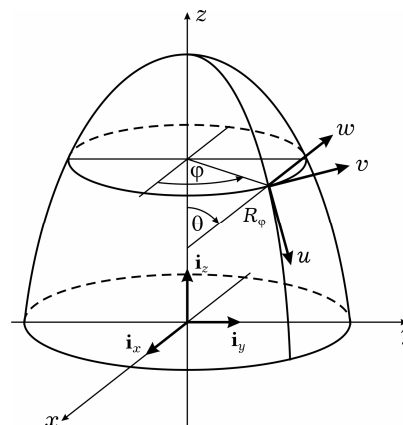


Рис. 1

**Математическая модель линейных колебаний.** Для потенциальной энергии упругой деформации оболочки воспользуемся представлением [2]

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{12}\varepsilon_{12}) \left(1 + \frac{z}{R_\theta}\right) \times \\ \times \left(1 + \frac{z}{R_\varphi}\right) R_\theta R_\varphi \sin \theta d\theta d\varphi dz, \quad (1)$$

где  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{22}$  – компоненты тензоров напряжений и деформаций;  $R_\theta$ ,  $R_\varphi$  – радиусы кривизны координатных линий  $\theta$ ,  $\varphi$ , соответственно. Компоненты тензоров напряжений и деформаций удовлетворяют закону Гука:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), \\ \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}), \\ \sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{12}, \quad (2)$$

где  $E$  и  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Радиусы кривизны координатных линий  $R_\theta$ ,  $R_\varphi$  определяются так [5]:

$$R_\theta = \frac{R_0}{(1 + \chi \sin^2 \theta)^{3/2}}, \quad R_\varphi = \frac{R_0}{(1 + \chi \sin^2 \theta)^{1/2}}, \quad (3)$$

где  $R_0$  – радиус кривизны в особой точке оболочки  $\theta = 0$ ; значение  $\chi$  определяет форму оболочки вращения. Отметим, что для параболической оболочки  $\chi = -1$ , а для сферической –  $\chi = 0$ .

Верхняя точка оболочки  $\theta = 0$  является особой. Поэтому для расчета собственных частот и форм колебаний около этой точки вырежем отверстие диаметром меньше, чем толщина оболочки. Это маленькое отверстие слабо влияет на динамику конструкции [1]. Потенциальную энергию оболочки (1) с учетом соотношений (2) и (3) представим так:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{E}{1-\nu^2} \left( \varepsilon_{11}^2 + 2\nu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2 + \frac{1-\nu}{2} \varepsilon_{12}^2 \right) \times \\ \times \left(1 + \frac{z}{R_\theta}\right) \left(1 + \frac{z}{R_\varphi}\right) R_\theta R_\varphi \sin \theta d\theta d\varphi dz, \quad (4)$$

где  $h$  – толщина оболочки;  $\theta_1$  – координата точки меридиана, близкой к особой точке оболочки  $\theta = 0$ ;  $\theta_2$  – конечная координата меридиана, определяемая из уравнения  $\theta_2 = \arctg(r/R_0)$ ,  $r$  – максимальный радиус обтекателя.

Компоненты тензора деформаций связаны с перемещениями зависимостями

$$\varepsilon_{11} = \frac{\cos^3(\theta)}{R_0} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right) + z \left[ \frac{\cos^6(\theta)}{R_0^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\cos^5(\theta) \sin(\theta)}{R_0^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} + 3u \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{22} &= \frac{\operatorname{ctg}(\theta)}{R_0} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \cos(\theta) + w \sin(\theta) \right) + z \left[ \frac{\operatorname{ctg}(\theta) \cos(\theta)}{R_0^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\operatorname{ctg}^2(\theta)}{R_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\operatorname{ctg}(\theta) \cos^4(\theta)}{R_0^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - u \right) \right], \\
\varepsilon_{12} &= \frac{\cos^2(\theta)}{R_0} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \cos(\theta) - v \sin(\theta) + w \operatorname{ctg}(\theta) \cos(\theta) \right) + \frac{\operatorname{ctg}(\theta)}{R_0} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \\
&\quad + z \left[ \frac{\operatorname{ctg}(\theta) \cos^2(\theta)}{R_0^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\operatorname{ctg}(\theta) \cos^3(\theta)}{R_0^2} \times \right. \\
&\quad \left. \times \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial \theta} + v \right) \right]. \tag{5}
\end{aligned}$$

Кинетическую энергию оболочки представим в следующем виде:

$$\mathbf{T} = \frac{\rho h}{2} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) R_0 R_\varphi \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, dz, \tag{6}$$

где  $\rho$  – плотность материала обтекателя.

Для расчета собственных частот и форм колебаний оболочки воспользуемся методом Рэлея – Ритца. Линейные колебания представим в виде произведения функций координат и времени:

$$\begin{aligned}
u(\theta, \varphi, t) &= \tilde{u}(\theta, \varphi) \cos(\omega t), \\
v(\theta, \varphi, t) &= \tilde{v}(\theta, \varphi) \cos(\omega t), \\
w(\theta, \varphi, t) &= \tilde{w}(\theta, \varphi) \cos(\omega t). \tag{7}
\end{aligned}$$

Тогда кинетическую (6) и потенциальную (4) энергии оболочки с учетом (5) и (7) преобразуем к виду

$$\mathbf{T}(\theta, \varphi, t) = \omega^2 \sin^2 \omega t \cdot \tilde{\mathbf{T}}(\theta, \varphi), \tag{8}$$

$$\Pi(\theta, \varphi, t) = \cos^2 \omega t \cdot \tilde{\Pi}(\theta, \varphi). \tag{9}$$

Функции перемещений  $\tilde{u}(\theta, \varphi)$ ,  $\tilde{v}(\theta, \varphi)$ ,  $\tilde{w}(\theta, \varphi)$ , входящие в (7), представим в виде укороченных рядов Фурье:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(\theta, \varphi) &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \psi_i^{(u)}(\theta) (A_{ij}^{(1)} \sin j\varphi + A_{ij}^{(2)} \cos j\varphi), \\
\tilde{v}(\theta, \varphi) &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \psi_i^{(v)}(\theta) (B_{ij}^{(1)} \sin j\varphi + B_{ij}^{(2)} \cos j\varphi), \\
\tilde{w}(\theta, \varphi) &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \psi_i^{(w)}(\theta) (C_{ij}^{(1)} \sin j\varphi + C_{ij}^{(2)} \cos j\varphi), \tag{10}
\end{aligned}$$

где  $A_{ij}^{(1)}$ ,  $A_{ij}^{(2)}$ , ...,  $C_{ij}^{(2)}$  – неизвестные параметры;  $\psi_i^{(u)}(\theta)$ ,  $\psi_i^{(v)}(\theta)$ ,  $\psi_i^{(w)}(\theta)$  – функции, удовлетворяющие краевым условиям оболочки. Вследствие осесимметричности конструкции собственные частоты колебаний являются парными. Для того чтобы из пары частот в (10) выделить одну, перемещения срединной поверхности представим так:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(\theta, \varphi) &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} A_{ij} \psi_i^{(u)}(\theta) \cos j\varphi, \\
\tilde{v}(\theta, \varphi) &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij} \psi_i^{(v)}(\theta) \sin j\varphi, \\
\tilde{w}(\theta, \varphi) &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_3} C_{ij} \psi_i^{(w)}(\theta) \cos j\varphi.
\end{aligned} \tag{11}$$

Рассмотрим условия закрепления оболочки. На стороне  $\theta = \theta_2$  оболочка закреплена, а наверху, в месте маленького выреза  $\theta = \theta_1$ , оболочка свободна. Так как для расчета применяем метод Рэлея – Ритца, то учитываются только кинематические граничные условия. Поэтому на свободной стороне оболочки не учитываются какие-либо граничные условия. Условия закрепления оболочки представим так:

$$\tilde{u}|_{\theta=\theta_2} = \tilde{v}|_{\theta=\theta_2} = \tilde{w}|_{\theta=\theta_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_2} = 0. \tag{12}$$

Для приближенного определения собственных частот колебаний в качестве функций  $\psi_i^{(u)}(\theta)$ ,  $\psi_i^{(v)}(\theta)$  в (11) используем собственные формы продольных колебаний консольного стержня, а в качестве функций  $\psi_i^{(w)}(\theta)$  выберем собственные формы изгибных колебаний консольного стержня. С учетом (12) эти функции представим следующим образом:

$$\psi_i^{(u)}(\theta) = \psi_i^{(v)}(\theta) = \cos \frac{(2i-1)\pi\theta}{2\theta_2}, \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\psi_i^{(w)}(\theta) &= \frac{1}{2} \left( \cosh \left[ k_i \left( 1 - \frac{\theta}{\theta_2} \right) \right] - \cos \left[ k_i \left( 1 - \frac{\theta}{\theta_2} \right) \right] \right) - \\
&\quad - \frac{\sinh(k_i s) - \sin(k_i s)}{2(\cosh(k_i s) - \cos(k_i s))} \left( \sinh \left[ k_i \left( 1 - \frac{\theta}{\theta_2} \right) \right] - \right. \\
&\quad \left. - \sin \left[ k_i \left( 1 - \frac{\theta}{\theta_2} \right) \right] \right).
\end{aligned} \tag{14}$$

Для расчета собственных частот и форм линейных колебаний оболочки воспользуемся принципом Остроградского – Гамильтона и рассмотрим функционал

$$\int_0^{2\pi/\omega} (\mathbf{\Pi} - \mathbf{T}) dt = \frac{\pi}{\omega} [\tilde{\mathbf{\Pi}}(A_{ij}^{(1)}, \dots, C_{ij}^{(2)}) - \omega^2 \tilde{\mathbf{T}}(A_{ij}^{(1)}, \dots, C_{ij}^{(2)})]. \tag{16}$$

Из условия минимума функционала (16) на множестве переменных  $A_{ij}^{(1)}, \dots, C_{ij}^{(2)}$  с использованием (8), (9) и (13), (14) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial A_{ij}} (\mathbf{\Pi}_{\max} - \mathbf{T}_{\max}) &= 0, \quad i = 1 \dots, N_1, \quad j = 1 \dots, N_2, \\
\frac{\partial}{\partial B_{ij}} (\mathbf{\Pi}_{\max} - \mathbf{T}_{\max}) &= 0, \quad i = 1 \dots, N_3, \quad j = 1 \dots, N_4, \\
\frac{\partial}{\partial C_{ij}} (\mathbf{\Pi}_{\max} - \mathbf{T}_{\max}) &= 0, \quad i = 1 \dots, N_5, \quad j = 1 \dots, N_6.
\end{aligned} \tag{17}$$

Из системы линейных алгебраических уравнений (17) получаем задачу на собственные значения:

$$|\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0. \tag{18}$$

Частоты и формы линейных колебаний находим как решения задачи (18).

**Численный анализ свободных колебаний обтекателей.** Расчеты проводились для трех оболочек с радиусом основания  $R = 2$  м и высотами  $H_1 = 2$  м,  $H_2 = 3$  м,  $H_3 = 4$  м. Толщины оболочек принимались одинаковыми:  $h = 5$  мм. Расчеты выполнены для материала со следующими механическими характеристиками:  $E = 71$  ГПа,  $\rho = 2640$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 0.3$ . Вычисления с различными значениями высоты параболоида проводились именно для исследования влияния высоты на собственные частоты и формы колебаний оболочки. Результаты расчетов, полученных методом Рэлея – Ритца, сравнивались с данными, полученными с помощью метода конечных элементов.

В качестве тестовых проведены расчеты частот собственных колебаний сферической оболочки с радиусом  $R = 2$  м, жестко закрепленной по диаметру. В табл. 1 представлены результаты этих вычислений. Совпадение результатов расчетов по двум методикам достаточно хорошее.

Таблица 1

Номер частоты	Метод конечных элементов, Гц	Метод Рэлея – Ритца, Гц	Относительная погрешность
1	231.29	231.79	0.00216
2	364.83	364.98	0.00041
3	370.86	370.96	0.00027
4	388.63	388.22	0.00106
5	393.95	395.86	0.00482
6	396.35	397.13	0.00196

В табл. 2 представлены результаты расчетов частот собственных колебаний для параболической оболочки с высотой  $H = 2$  м. Для расчета собственных форм колебаний использовали соотношения (11). Отметим, что результаты, полученные методом Рэлея – Ритца, сравнивались с данными, полученными методом конечных элементов. Результаты такого сравнения представлены в табл. 2. Итак, результаты, полученные методом конечных элементов, близки к данным, полученным методом Рэлея – Ритца.

Таблица 2

Номер частоты	Метод Рэлея – Ритца, Гц	Метод конечных элементов, Гц	Относительная погрешность
1	157.60	157.50	0.00063
2			
3	160.54	159.34	0.00747
4			
5	164.04	162.67	0.00835
6			
7	168.22	167.43	0.00470
8			
9	173.30	173.58	0.00162
10			

На рис. 2а представлена форма колебаний всего параболоида  $\tilde{w}(\theta, \varphi)$ , соответствующая первой частоте, а на рис. 2б показана форма колебаний вдоль меридиана  $\theta$ . Эта форма имеет 13 узлов в окружном направлении и 8 узлов – в направлении меридиана. Формы колебаний  $\tilde{w}(\theta, \varphi)$ , соответствующие второй, третьей и четвертой частотам, также имеют 8 узлов в направлении меридиана, при этом число узлов в окружном направлении уменьшается от 12 до 10, соответственно.

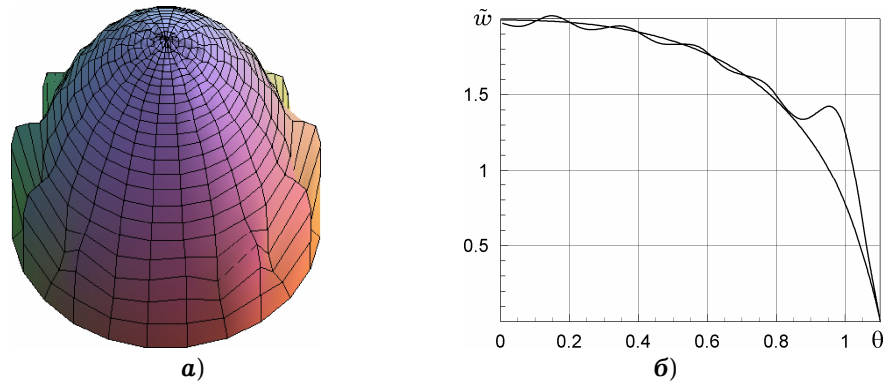


Рис. 2

На рис. 3а представлена форма колебаний всего параболоида  $\tilde{w}(\theta, \varphi)$ , соответствующая пятой частоте колебаний, а на рис. 3б показана форма колебаний вдоль меридиана  $\theta$ . Эта форма имеет 9 узлов в окружном направлении и 7 узлов в направлении меридиана. Отметим, что для первых пяти частот количество узлов в окружном направлении уменьшается с увеличением частоты.

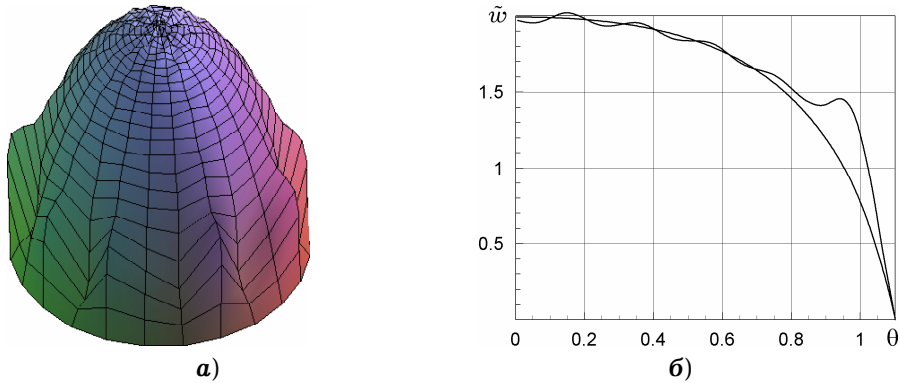


Рис. 3

На рис. 4 представлены линии уровня 1-й (рис. 4а) и 5-й (рис. 4б) форм колебаний  $\tilde{w}(\theta, \varphi)$ . Из рисунка видно, что около заделанной части параболоида наблюдается волнообразование в окружном направлении с большим числом узлов, а вверху параболоида узлов колебаний в окружном направлении нет. Интенсивность колебаний вершины параболоида значительно меньше, чем интенсивность колебаний ее нижней части. Это является существенным отличием по сравнению с формами колебаний для сферы радиуса  $R = 2$  м.

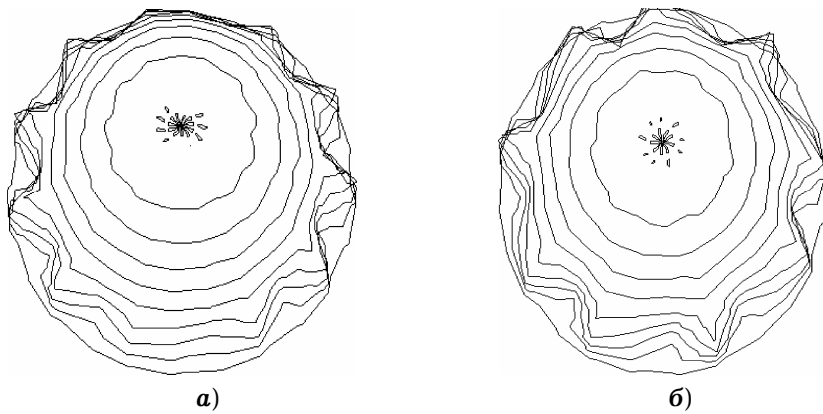


Рис. 4

Результаты численного анализа первых пяти собственных частот колебаний для параболоидов различной высоты представлены в табл. 3. В этой таблице приведены результаты расчетов, полученные методом Рэлея – Ритца (МРР) и методом конечных элементов (МКЭ). Подчеркнем, что при последовательном увеличении высоты параболоида собственные частоты колебаний падают. Для параболоида высотой  $H = 3$  м наблюдается достаточно хорошее совпадение результатов, полученных двумя методами. Относительная погрешность вычислений не превышает 1%.

Таблица 3

Номер частоты	Метод	$H = 2$ м	$H = 3$ м	$H = 4$ м
		Частота, Гц		
1	МКЭ	157.5	105.0	75.7
	МРР	157.6	105.1	86.3
2	МКЭ	159.3	105.7	76.0
	МРР	160.5	106.0	86.5
3	МКЭ	162.7	106.1	77.4
	МРР	164.0	107.3	86.8
4	МКЭ	167.4	108.6	78.5
	МРР	168.2	108.4	87.0
5	МКЭ	173.6	108.9	80.9
	МРР	173.3	109.9	87.4

При увеличении высоты параболоида до  $H/R = 2$  (для  $H = 4$  м) наблюдается существенное различие между частотами, полученными разными методами. Итак, для этой оболочки результаты, полученные методом Рэлея – Ритца и методом конечных элементов, существенно разнятся.

Как показали численные расчеты, при дальнейшем увеличении высоты параболоида точность собственных частот, полученных методом Рэлея – Ритца, сильно снижается.

Дело в том, что базисные функции (11), аппроксимирующие формы колебаний, хорошо описывают колебания только низких параболоидов, в которых  $0 < \theta < 0.4\pi$ . Поскольку при  $\theta < 0.5\pi$  радиус кривизны меридиана стремится к бесконечности, то его значения при  $\theta \geq 0.4\pi$  быстро растут, при этом точность численного интегрирования падает. Для более высоких параболоидов необходимо использовать базисные функции, отличные от (11). Применение в качестве базисных функций полиномов или тригонометрических функций не дало положительных результатов. Авторам не удалось найти базисные функции, хорошо аппроксимирующие собственные формы колебаний высоких параболоидов. Для расчетов колебаний высоких параболоидов можно рекомендовать метод конечных элементов.

**Выводы.** Предложен метод расчета собственных частот и форм колебаний обтекателей ракетносителей, основанный на использовании метода Рэлея – Ритца. Как показало сравнение результатов, полученных этим методом и методом конечных элементов, для низких обтекателей данные двух методов близки. Для высоких параболоидов предложенный метод дает неверные результаты. К сожалению, авторам не удалось найти базисные функции, аппроксимирующие собственные формы колебаний высоких параболоидов. Поэтому для расчета высоких параболоидов можно рекомендовать использование метода конечных элементов.

Около заданной части параболоида наблюдается волнообразование в окружном направлении с большим числом узлов, а вверху параболоида узлов колебаний в окружном направлении нет. Характерной особенностью всех форм является тот факт, что интенсивность колебаний вершины параболоида значительно меньше, чем интенсивность колебаний ее нижней части. Отметим, что при последовательном увеличении высот параболоидов их собственные частоты колебаний падают.

Работа выполнена при поддержке Целевой комплексной программы НАН Украины по космическим исследованиям на 2012–2016 гг.

1. *Валиввили Н. В.* Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. – Москва: Машиностроение, 1976. – 278 с.
2. *Григолоук Э. И., Кабанов В. В.* Устойчивость оболочек. – Москва: Наука, 1978. – 360 с.
3. *Кубенко В. Д., Ковальчук П. С.* Нелинейные задачи колебаний тонких оболочек (обзор) // Прикл. механика. – 1998. – **34**, № 8. – С. 3–31.  
То же: *Kubenko V. D., Koval'chuk P. S.* Nonlinear problems of the vibration of thin shells (review) // Int. Appl. Mech. – 1998. – **34**, No. 8. – P. 703–728.
4. *Прочность. Устойчивость. Колебания.* Справочник: В 3 т. / Под общей ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. – Москва: Машиностроение, 1968. – Т. 1. – 831 с.
5. *Chernobryvko M. V., Avramov K. V., Batutina T., Tonkonogenko A. M.* Free vibrations of rockets deflectors // Proc. 4th Int. Conf. Nonlinear Dynamics, ND-KhPI-2013, June 19–22, 2013, Sevastopol, Ukraine. – P. 231–234.
6. *Gulyayev V. I., Solovjev I. L., Belova M. A.* Interconnection of critical states of parabolic shells in simple and compound rotations with values of their natural precession vibration frequencies // Int. J. Solids Struct. – 2004. – **41**, No. 13. – P. 3565–3583.
7. *Karamian-Surville Ph.* Numerical experiments on propagation of singularities across an edge in thin parabolic shells // C. R. Acad. Sci. IIB Mec. – 2001. – **329**, No. 1. – P. 75–79.
8. *Leissa A. W.* Vibrations of shells. – Washington: U.S. Government Printing Office (NASA SP-288), 1973. – 428 p.
9. *Pellicano F., Avramov K. V.* Linear and nonlinear dynamics of a circular cylindrical shell connected to a rigid disk // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. – 2007. – **12**, No. 4. – P. 496–518.

#### **ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ ПАРАБОЛІЧНИХ ОБОЛОНОК**

*Для аналізу власних коливань параболічних оболонок застосовується метод Релея – Рітца, для використання якого виведено вирази кінетичної і потенційної енергій параболічної оболонки сталої товщини. Досліджено властивості власних частот і форм коливань оболонок різної висоти.*

#### **NATURAL VIBRATIONS OF PARABOLIC SHELLS**

*The Rayleigh – Ritz method is used for the natural vibration analysis of parabolic shells. The expressions for kinetic and potential energy of parabolic shells of fixed thickness are determined. Properties of eigenfrequencies and eigenmodes of natural vibrations of shells with different heights are investigated.*

Ин-т проблем машиностроения  
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Получено  
18.10.13