

ПРАКТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СХЕМЫ «КРЕСТ» ПРИ ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ДЛЯ ГИБКИХ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ, ПОДЧИНЯЮЩИХСЯ ГИПОТЕЗАМ ТЕОРИИ ТИМОШЕНКО

В приближении фон Кармана сформулирована начально-краевая задача динамики гибких изотропных и композитных упругих балок-стенок в рамках двух вариантов теории Тимошенко. Проведен качественный анализ разрешающей системы уравнений движения. Продемонстрировано, что в геометрически линейной постановке динамика упругих балок описывается системой гиперболического типа, а в случае деформирования гибких балок система разрешающих уравнений движения может изменить свой тип, выродившись из системы гиперболического типа в систему смешанно-составного типа. Разработаны конечно-разностный и вариационно-разностный варианты явной по времени схемы «крест» для численного интегрирования сформулированных начально-краевых задач. На основе этих численных методов проведены расчеты динамического изгибного деформирования гибких металлических и композитных балок при нагрузках взрывного типа, показавшие, что почти всегда существуют уровни нагружения гибких балок, при которых схема «крест» становится неустойчивой, хотя условие устойчивости, полученное в линейном приближении, выполняется со значительным запасом. Тем самым показано, что при динамическом расчете гибких балок можно говорить только о практической устойчивости схемы «крест», а не об ее условной устойчивости.

Введение. Балки, пластины и панели составляют основу силовых элементов многих защитных ограждений и ответственных элементов судостроительной, машиностроительной и авиационной техники. При воздействии динамических нагрузок высокой интенсивности их повреждаемость во многом определяет возможность дальнейшего функционирования указанных объектов. Поэтому проблема динамического расчета таких элементов конструкций является одной из важнейших в механике деформируемого твердого тела. При этом целесообразно рассматривать тонкостенные элементы как гибкие, так как геометрически нелинейная постановка соответствующих начально-краевых задач позволяет выявить эффекты, которые невозможно объяснить в рамках геометрически линейных соотношений, например, локализацию волн деформаций, которая может приводить к их усилению и фокусированию [13, 24, 26, 27 и др.].

Построение аналитических решений динамических задач для гибких тонкостенных элементов конструкций, если и возможно, то только в исключительных случаях, поэтому основными методами интегрирования соответствующих начально-краевых задач являются численные методы, основанные, как правило, на идее шагов по времени. При этом используются как явные, так и неявные по времени численные схемы. Из явных методов наибольшее распространение получили различные варианты схемы «крест» [1, 3, 4 и др.], реже используется метод де Вожеля [4, 28] и явные методы Рунге – Кутты [8]. Из неявных методов наиболее частое применение нашли методы Ньюмарка [15, 29 и др.], реже используются метод Хубольдта – схема с опережением [15] или неявные методы Рунге – Кутты [8, 25].

Принято считать, что при воздействии на конструкции нагрузок взрывного или ударного типа целесообразно использовать явные по времени методы [1, 3 и др.], так как они в случае нелинейных задач не требуют применения дополнительных итерационных процедур, как неявные методы, и достаточно легко поддаются алгоритмизации. Однако известно, что в линейном приближении явные методы обладают лишь условной устойчи-

востью. Для линейных динамических систем с помощью методов фон Неймана и Лакса – Рихтмайера установлены критерии условной устойчивости, которые для указанных выше явных схем приведены, например, в [7]. Соответствующие же критерии устойчивости в задачах для нелинейных динамических систем должны определяться окончательно в каждом отдельном случае [7]. Последнее может определяться, в частности, тем, что в процессе нелинейного деформирования тип системы разрешающих уравнений может измениться [17] (как это будет показано ниже на примере балок и пластин).

В связи с вышеизложенным настоящее исследование посвящено: формулировке в приближении фон Кармана задачи динамического изгиба балок в рамках двух вариантов теории Тимошенко, что позволяет учесть ослабленное сопротивление поперечному сдвигу балок, выполненных из композиционных материалов; исследованию типа системы разрешающих уравнений; проведению конкретных численных расчетов по схеме «крест» в конечно-разностном и вариационно-разностном вариантах и обсуждению их результатов с целью выяснения границ устойчивости этих численных методов.

Постановка задачи. С целью упрощения выкладок и большей наглядности получаемых результатов рассмотрим динамическое поведение изотропных и композитных прямолинейных балок-стенок длиной L , высотой $2h = \text{const}$ и толщиной $B = \text{const}$ (рис. 1).

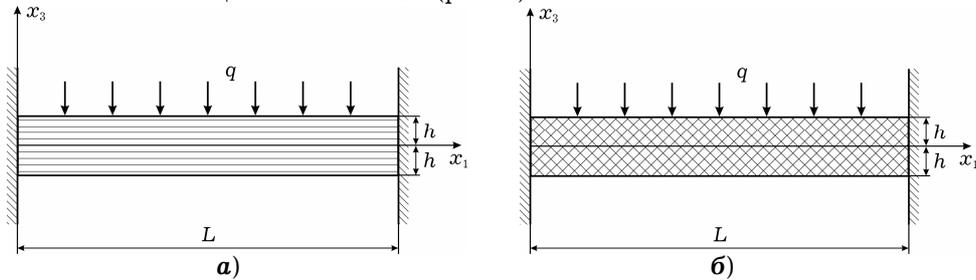


Рис. 1

Для описания ослабленного сопротивления композитных балок-стенок (например, армированных в продольном направлении, как на рис. 1а) поперечному сдвигу воспользуемся теорией Тимошенко [1, 22 и др.], т. е. сдвиговую деформацию ε_{13} в поперечном направлении x_3 зададим распределенной по высоте балки в следующем виде:

$$\varepsilon_{13}(x_1, x_3, t) = \frac{h^2 - \beta x_3^2}{h^2} \varepsilon_{13}^0(x_1, t), \quad |x_3| \leq h, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

где x_1, x_2, x_3 – прямоугольная декартова система координат, связанная с балкой, как показано на рис. 1 (ось x_2 перпендикулярна плоскости рисунка); t – время; β – параметр переключения, позволяющий выбрать первый ($\beta = 0$) [1, 22] или второй ($\beta = 1$) [2] вариант теории Тимошенко. В случае, когда $\beta = 0$, ε_{13}^0 – средняя деформация поперечного сдвига по поперечному сечению балки, а в случае, когда $\beta = 1$, ε_{13}^0 – деформация поперечного сдвига в срединном слое ($x_3 = 0$); t_0 – начальный момент времени.

Согласно теории Тимошенко, обжатием тонкостенного элемента пренебрегаем, т. е. считаем, что прогиб u_3 не зависит от поперечной координаты x_3 ($u_3 = u_3(x_1, t)$). Используя дифференциальные соотношения, связывающие деформации с перемещениями, на основании (1) в приближении фон Кармана [1, 4, 6, 22] получим

$$u_1(x_1, x_3, t) = u_1^0(x_1, t) - x_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{2x_3}{h^2} \left(h^2 - \beta \frac{x_3^2}{3} \right) \varepsilon_{13}^0(x_1, t), \quad (2)$$

$$\varepsilon_{11}(x_1, x_3, t) = \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{2x_3}{h^2} \left(h^2 - \beta \frac{x_3^2}{3} \right) \frac{\partial \varepsilon_{13}^0}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2, \quad (3)$$

$$|x_3| \leq h, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad t \geq t_0,$$

где $u_1^0(x_1, t)$ – перемещение точек срединного слоя ($x_3 = 0$) в продольном направлении x_1 ; ε_{11} , ε_{13} – компоненты тензора деформаций.

Таким образом, в соотношениях (1)–(3) неизвестными являются функции u_1^0 , u_3 , ε_{13}^0 , зависящие только от одной пространственной переменной x_1 и времени t .

Предполагая поведение материала балки линейно-упругим, а деформации малыми, на основании закона Гука с учетом того, что в рамках теории Тимошенко принимается $\sigma_{33} \approx 0$, можем определить напряжения в балке:

$$\sigma_{11}(x_1, x_3, t) = E\varepsilon_{11}, \quad \sigma_{13}(x_1, x_3, t) = 2G\varepsilon_{13}, \quad (4)$$

$$|x_3| \leq h, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad t \geq t_0,$$

где E – модуль Юнга в продольном направлении; G – модуль сдвига в поперечном направлении (в случае изотропного материала $E = 2G(1 + \nu)$, ν – коэффициент Пуассона).

В настоящем исследовании для простоты предполагаем, что балка нагружена только в поперечном направлении x_3 (см. рис. 1). При подстановке выражения (1) во второе из соотношений (4) в рамках второго варианта теории Тимошенко получаем тождественное выполнение на верхней ($x_3 = h$) и нижней ($x_3 = -h$) горизонтальных поверхностях балки-стенки граничных условий по касательным напряжениям:

$$\sigma_{13}^{(\pm)}(x_1, t) = \sigma_{13}(x_1, \pm h, t) = 2G\varepsilon_{13}(x_1, \pm h, t) \equiv 0, \quad \beta = 1.$$

В рамках первого варианта теории Тимошенко ($\beta = 0$), используемого, например, в [1, 4, 6, 22 и др.], эти граничные условия не могут быть тождественно удовлетворены.

Используя уравнения равновесия гибких балок [11], на основе принципа Даламбера с учетом (2) получим следующие уравнения движения балки-стенки:

$$\frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(F_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 2hB\rho \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial F_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(F_{11} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + Bp_3(x_1, t) = 2hB\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - F_{13} = \frac{2}{3} h^3 B\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(2 \left(1 - \frac{\beta}{5} \right) \varepsilon_{13}^0 - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad (6)$$

где ρ – объемная плотность материала балки; F_{11} , F_{13} – мембранная и поперечная силы соответственно; M_{11} – изгибающий момент; p_3 – приведенная поперечная распределенная нагрузка, действующая в направлении x_3 (согласно рис. 1, $p_3 = -q$).

Для удобства дальнейшего изложения введем в рассмотрение новую неизвестную функцию

$$\gamma_{13}^0(x_1, t) \equiv 2 \left(1 - \frac{\beta}{5} \right) \varepsilon_{13}^0 - \frac{\partial u_3}{\partial x_1},$$

отсюда имеем

$$\varepsilon_{13}^0(x_1, t) = \frac{5}{2(5-\beta)} \left(\gamma_{13}^0 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right). \quad (7)$$

Уравнение (6) с учетом (7) примет вид

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - F_{13} = \frac{2}{3} h^3 B \rho \frac{\partial^2 \gamma_{13}^0}{\partial t^2}. \quad (8)$$

Равенства (5), (8) образуют систему уравнений движения рассматриваемой балки-стенки. Отметим, что нелинейным слагаемым в левой части первого из уравнений (5) обычно пренебрегают [6, 11], предполагая его малость (что оправданно, например, при изучении потери устойчивости стержней). В настоящем исследовании это слагаемое будем учитывать, так как это соответствует более точному описанию механического поведения гибких балок.

С учетом (7) соотношения (1)–(3) запишем так:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_3, t) &= u_1^0 + \frac{\beta x_3}{(5-\beta)h^2} \left(h^2 - \frac{5}{3} x_3^2 \right) \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{5x_3}{(5-\beta)h^2} \left(h^2 - \beta \frac{x_3^2}{3} \right) \gamma_{13}^0, \\ \varepsilon_{11}(x_1, x_3, t) &= \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \frac{\beta x_3}{(5-\beta)h^2} \left(h^2 - \frac{5}{3} x_3^2 \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \\ &\quad + \frac{5x_3}{(5-\beta)h^2} \left(h^2 - \beta \frac{x_3^2}{3} \right) \frac{\partial \gamma_{13}^0}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2, \\ \varepsilon_{13}(x_1, x_3, t) &= \frac{5(h^2 - \beta x_3^2)}{2(5-\beta)h^2} \left(\gamma_{13}^0 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad |x_3| \leq h, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad t \geq t_0. \end{aligned} \quad (9)$$

На основании равенств (4) с учетом (9) можем определить все внутренние силовые факторы в балке:

$$\begin{aligned} F_{11}(x_1, t) &= B \int_{-h}^h \sigma_{11} dx_3 = 2hBE \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + hBE \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2, \\ F_{13}(x_1, t) &= B \int_{-h}^h \sigma_{13} dx_3 = \frac{10hBG}{5-\beta} \left(1 - \frac{\beta}{3} \right) \left(\gamma_{13}^0 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \\ M_{11}(x_1, t) &= B \int_{-h}^h \sigma_{11} x_3 dx_3 = \frac{2}{3} h^3 BE \frac{\partial \gamma_{13}^0}{\partial x_1}, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad t \geq t_0. \end{aligned} \quad (10)$$

После подстановки выражений (10) в (5), (8) получим систему уравнений движения в разрешающем виде:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} - \left\{ \left[E - \frac{10G}{5-\beta} \left(1 - \frac{\beta}{3} \right) \right] \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{5G}{5-\beta} \left(1 - \frac{\beta}{3} \right) \gamma_{13}^0 \right\} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \\ + \frac{5G}{5-\beta} \left(1 - \frac{\beta}{3} \right) \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial \gamma_{13}^0}{\partial x_1} = 0, \\ - E \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} + \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \left\{ E \left[\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] + \frac{5G}{5-\beta} \left(1 - \frac{\beta}{3} \right) \right\} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - \\ - \frac{5G}{5-\beta} \left(1 - \frac{\beta}{3} \right) \frac{\partial \gamma_{13}^0}{\partial x_1} = \frac{1}{2h} p_3(x_1, t), \\ h^2 \left(\rho \frac{\partial^2 \gamma_{13}^0}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 \gamma_{13}^0}{\partial x_1^2} \right) + \frac{15G}{5-\beta} \left(1 - \frac{\beta}{3} \right) \left(\gamma_{13}^0 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Характеристическое уравнение системы (11) имеет вид

$$(\rho x_t^2 - E)[(\rho x_t^2 - E)(\rho x_t^2 - A) - B] = 0, \quad (12)$$

где

$$A = E \left[\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] + \frac{5G}{5-\beta} \left(1 - \frac{\beta}{3} \right),$$

$$B = E \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \left\{ \left[E - \frac{10G}{5-\beta} \left(1 - \frac{\beta}{3} \right) \right] \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{5G}{5-\beta} \left(1 - \frac{\beta}{3} \right) \gamma_{13}^0 \right\}, \quad (13)$$

производная $x_t(t) = dx/dt$ задает направление характеристической линии.

Сомножитель, стоящий в (12) вне квадратных скобок, порождает две действительные характеристики, соответствующие волновому оператору в третьем уравнении системы (11). Приравнявая нулю выражение, заключенное в равенстве (12) в квадратные скобки, получим биквадратное уравнение

$$\rho^2 x_t^4 - \rho(E + A)x_t^2 + (AE - B) = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$(x_t^2 - c_{*1}^2)(x_t^2 - c_{*2}^2) = 0, \quad (14)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{*1}^2 \\ c_{*2}^2 \end{array} \right\} = \frac{E + A \pm \sqrt{D}}{2\rho}, \quad D = (E + A)^2 - 4(AE - B),$$

c_{*1} , c_{*2} – наибольшая и наименьшая локальные скорости звука распространения нелинейных возмущений в балке.

Согласно (13), равенство (14) может порождать как действительные, так и комплексные характеристики в разных подобластях области интегрирования системы (11) $0 \leq x_1 \leq L$, $t \geq t_0$, т. е. в зависимости от соотношения

величин $\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1}$, $\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2$, $\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \gamma_{13}^0$ и малости их модулей по сравнению с единицей. Следовательно, в общем случае система уравнений движения (11) является квазилинейной системой смешанно-составного типа [9] как в случае первого ($\beta = 0$), так и второго ($\beta = 1$) вариантов теории Тимошенко.

В частном случае, когда

$$\left| \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \right| \sim \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \sim \left| \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \gamma_{13}^0 \right| \ll 1, \quad (15)$$

уравнение (12) с учетом (13) приближенно можно заменить равенством

$$(\rho x_t^2 - E)^2 \left(\rho x_t^2 - \frac{5G}{5-\beta} \left(1 - \frac{\beta}{3} \right) \right) = 0, \quad (16)$$

которое соответствует линеаризованной системе (11):

$$\rho \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} = 0,$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \frac{5G}{5-\beta} \left(1 - \frac{\beta}{3} \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - \frac{5G}{5-\beta} \left(1 - \frac{\beta}{3} \right) \frac{\partial \gamma_{13}^0}{\partial x_1} = \frac{1}{2h} p_3(x_1, t),$$

$$h^2 \left(\rho \frac{\partial^2 \gamma_{13}^0}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 \gamma_{13}^0}{\partial x_1^2} \right) + \frac{15G}{5-\beta} \left(1 - \frac{\beta}{3} \right) \left(\gamma_{13}^0 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0. \quad (17)$$

Согласно (16), в геометрически линейной постановке (в линейном приближении (15)) система разрешающих уравнений движения балки-стенки (17) является системой уравнений гиперболического типа в рамках обоих вариантов теории Тимошенко.

Как видно из первого и третьего уравнений системы (17), волновые процессы для функций u_1^0 , γ_{13}^0 распространяются вдоль балки с одной и той же скоростью

$$c_1 = \sqrt{E/\rho}, \quad (18)$$

одинаковой в рамках обоих вариантов теории Тимошенко. Согласно же второму из уравнений (17), волновой процесс для прогиба u_3 распространяется вдоль балки с существенно меньшей скоростью

$$c_2 = \sqrt{\frac{5}{5-\beta} \left(1 - \frac{\beta}{3}\right) \frac{G}{\rho}}, \quad (19)$$

которая различна для разных вариантов теории Тимошенко. Так, для балки из углепластика М60J/Ероху $E = 330$ ГПа, $G = 3.9$ ГПа, $\rho = 1500$ кг/м³ (см. ниже табл. 2) на основании (18), (19) получим $c_1 = 14832.4$ м/с, $c_2 = 1612.5$ м/с при $\beta = 0$ и $c_2 = 1472.0$ м/с при $\beta = 1$, т. е. скорость распространения волнового процесса для u_3 на порядок меньше, чем для волновых процессов, описываемых функциями u_1^0 , γ_{13}^0 . Согласно приведенным вычислениям, при этом скорость c_2 , рассчитанная по первому варианту теории Тимошенко ($\beta = 0$), на 9.5% больше той же скорости, определенной по второму варианту ($\beta = 1$).

Полученные в линейном приближении скорости звука (18), (19) соответствуют локальным скоростям звука c_{*1} , c_{*2} , определяемым из уравнения (14) в нелинейном случае.

Здесь уместно отметить, что в геометрически линейной постановке разрешающие уравнения, получаемые в рамках классической теории Бернулли (см. (1)–(3) при $\varepsilon_{13}^0 \equiv 0$), являются первым асимптотическим приближением, а в рамках второго варианта теории Тимошенко – вторым асимптотическим приближением уравнений трехмерной линейной теории упругости применительно к тонкостенным конструкциям [2]. Первый же вариант теории Тимошенко не является асимптотически точным.

Для однозначного интегрирования системы (11) или (17) необходимо задать начальные и граничные условия. Если в начальный момент времени $t = t_0$ балка находится в состоянии покоя, то

$$\begin{aligned} u_3(x_1, t_0) = 0, \quad u_1^0(x_1, t_0) = 0, \quad \gamma_{13}^0(x_1, t_0) = 0, \\ \frac{\partial u_3(x_1, t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_1^0(x_1, t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \gamma_{13}^0(x_1, t_0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq L. \end{aligned} \quad (20)$$

В случае жесткого закрепления обоих концов балки-стенки (см. рис. 1) граничные условия имеют вид

$$u_3(x_1, t) = 0, \quad u_1^0(x_1, t) = 0, \quad \gamma_{13}^0(x_1, t) = 0, \quad x_1 = 0, L, \quad t \geq t_0, \quad (21)$$

где второе и третье соотношения являются следствиями интегральных равенств [2]

$$\int_{-h}^h u_1(x_1, x_3, t) dx_3 = 0, \quad \int_{-h}^h u_1(x_1, x_3, t) x_3 dx_3 = 0, \quad x_1 = 0, L, \quad t \geq t_0,$$

а функция $u_1(x_1, x_3, t)$ имеет выражение (9). (Другие граничные условия приводить не будем, так как они многообразны [2, 6, 11, 22].)

Методы численного интегрирования. При численном интегрировании начально-краевой задачи (11), (20), (21) или (17), (20), (21) будем разыскивать ее решение в дискретные моменты времени

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (22)$$

где $\Delta t = \text{const}$ – шаг по времени. Дифференциальные операторы по времени в уравнениях (11) или (17) аппроксимируем центральными разностями на трехточечном шаблоне, что обеспечивает второй порядок точности по Δt [20].

Если в моменты времени t_{n-1} , t_n решение рассматриваемой задачи уже известно, то при такой дискретизации по времени из уравнений (11) или (17) можно в явном виде определить все неизвестные функции u_1^0 , u_3 , γ_{13}^0 в момент времени t_{n+1} и т. д.

Для дискретизации задачи по пространственной переменной x_1 разобьем балку на M элементов длиной ℓ_m , $1 \leq m \leq M$. Каждый m -й элемент ограничен узловыми точками

$$x_1^{(m)} = x_1^{(m-1)} + \ell_m, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad x_1^{(0)} = 0, \quad x_1^{(M)} = L. \quad (23)$$

Дискретизация уравнений (11) или (17) возможна в двух вариантах: конечноразностном и вариационно-разностном. Согласно конечноразностному варианту, на n -м слое по времени частные производные по x_1 от неизвестных функций в уравнениях (11) или (17) во всех внутренних узлах сетки заменяются центральными конечными разностями на трехточечном шаблоне регулярной сетки ($\ell_m = L/M$, $1 \leq m \leq M$), что позволяет аппроксимировать эти уравнения со вторым порядком точности как по Δt , так и по ℓ_m [20]. В граничных узлах $m = 0$, $m = M$ значения искомых функций известны из граничных условий (21). Реализация такой конечноразностной схемы «крест» вполне очевидна, поэтому не будем останавливаться на ее обсуждении более подробно.

В случае вариационно-разностной аппроксимации уравнений (11) или (17) по пространственной переменной x_1 длина элементов ℓ_m в (23) может быть переменной, при этом для удобства дальнейшего изложения введем следующие сеточные функции и их производные по времени:

$$\begin{aligned} u_m^n &= u_1^0(x_1^{(m)}, t_n), & w_m^n &= u_3(x_1^{(m)}, t_n), & \gamma_m^n &= \gamma_3(x_1^{(m)}, t_n), \\ \ddot{u}_m^n &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_1^0(x_1^{(m)}, t_n), & \ddot{w}_m^n &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_3(x_1^{(m)}, t_n), & \ddot{\gamma}_m^n &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \gamma_3(x_1^{(m)}, t_n), \end{aligned} \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

Для получения дискретных аналогов уравнений (11) или (17) в рамках вариационно-разностного подхода используем вариационный принцип Даламбера – Лагранжа в форме Журдена (Ph. Jourdan) [1], который в конечном итоге приводит к соотношениям метода взвешенных невязок в варианте Галеркина [6, 19]. При этом все неизвестные u_1^0 , u_3 , γ_{13}^0 и весовые функции в пределах каждого элемента аппроксимируем линейно по x_1 , так как это наиболее распространенный способ задания функций формы в конечных элементах [1, 4, 6]. Применение такого подхода с учетом (23), (24) приводит в момент времени t_n к следующей системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{aligned} \ell_{m-1} \ddot{u}_{m-1}^n + 2(\ell_{m-1} + \ell_m) \ddot{u}_m^n + \ell_m \ddot{u}_{m+1}^n &= -F_m^n, \\ \ell_{m-1} \ddot{\gamma}_{m-1}^n + 2(\ell_{m-1} + \ell_m) \ddot{\gamma}_m^n + \ell_m \ddot{\gamma}_{m+1}^n &= -M_m^n, \\ \ell_{m-1} \ddot{w}_{m-1}^n + 2(\ell_{m-1} + \ell_m) \ddot{w}_m^n + \ell_m \ddot{w}_{m+1}^n &= -Q_m^n, \end{aligned} \quad m = 1, 2, \dots, M-1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned}
F_m^n &= -\frac{6}{K_1}(\bar{F}_m^n - \bar{F}_{m-1}^n), \\
Q_m^n &= -\frac{6}{K_1}[\bar{Q}_m^n - \bar{Q}_{m-1}^n + 0.5(\ell_m + \ell_{m-1})Bp_3(t_n)], \\
M_m^n &= -\frac{6}{K_2}\left\{\bar{M}_m^n - \bar{M}_{m-1}^n - \frac{\alpha}{2}hBG(\ell_m W_m^n + \ell_{m-1} W_{m-1}^n) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\alpha}{6}hBG[\ell_m(\gamma_{m+1}^n + 2\gamma_m^n) + \ell_{m-1}(\gamma_{m-1}^n + 2\gamma_m^n)]\right\}, \\
\bar{F}_m^n &= f_m^n - \frac{\alpha}{2}hBGW_m^n(2W_m^n + \gamma_{m+1}^n + \gamma_m^n), \\
\bar{Q}_m^n &= f_m^n W_m^n + \frac{\alpha}{2}hBG(2W_m^n + \gamma_{m+1}^n + \gamma_m^n), \\
f_m^n &= 2hBE\left[U_m^n + \frac{1}{2}(W_m^n)^2\right], \quad \bar{M}_m^n = \frac{2}{3\ell_m}h^3BE(\gamma_{m+1}^n - \gamma_m^n), \\
U_m^n &= \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{\ell_m}, \quad W_m^n = \frac{w_{m+1}^n - w_m^n}{\ell_m}, \\
K_1 &= 2hB\rho, \quad K_2 = \frac{2}{3}h^3B\rho, \quad \alpha = \begin{cases} 2, & \beta = 0, \\ 5/3, & \beta = 1. \end{cases} \quad (26)
\end{aligned}$$

Выражение для Q_m^n в (26) получено в предположении, что $p_3(x_1, t) = p_3(t)$, т. е. поперечная нагрузка в (11) или (17) в пределах m -го элемента не зависит от x_1 . Если же p_3 зависит от x_1 , то последнее слагаемое в выражении для Q_m^n будет иметь другой вид. (В рамках настоящего исследования это не принципиально.)

Согласно (26), правые части в (25) в момент времени t_n известны, а на основании (21), (24) система (25) дополняется граничными значениями

$$\dot{u}_0^n = \dot{u}_M^n = 0, \quad \dot{\gamma}_0^n = \dot{\gamma}_M^n = 0, \quad \dot{w}_0^n = \dot{w}_M^n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

Замкнутая СЛАУ (25), (27) может быть решена методом прогонки, причем достаточное условие устойчивости прогонки для нее выполняется [20]. После решения системы (25), (27) в момент времени t_n становятся известными узловые значения вторых производных по времени от неизвестных функций $\ddot{u}_m^n, \dot{\gamma}_m^n, \ddot{w}_m^n, 0 \leq m \leq M$.

Аппроксимируя эти производные центральными конечными разностями по времени на трехточечном шаблоне с шагом Δt , вновь можем по явной схеме определить неизвестные узловые значения $u_m^{n+1}, w_m^{n+1}, \gamma_m^{n+1}$, если известны значения u_m^n, w_m^n, γ_m^n и $u_m^{n-1}, w_m^{n-1}, \gamma_m^{n-1}, 0 \leq m \leq M, n = 1, 2, \dots$. Таким образом реализуется схема «крест» в вариационно-разностном варианте.

Так как в рамках такого подхода неизвестные функции в пределах каждого элемента аппроксимируются линейно по переменной x_1 , то порядок точности при вычислении производных $\partial u_1^0/\partial x_1, \partial u_3/\partial x_1, \partial \gamma_{13}^0/\partial x_1$ в этом случае на единицу меньше, чем при описанном выше конечноразностном варианте схемы «крест».

Для начала расчетов по обоим вариантам схемы «крест» требуется знание решения на двух первых слоях по времени при $t = t_0$ и $t = t_1$ (см.

(22)). В начальный момент времени t_0 значения разыскиваемых сеточных функций известны из (20):

$$u_m^0 = 0, \quad w_m^0 = 0, \quad \gamma_m^0 = 0, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (28)$$

а в момент времени t_1 решение может быть получено по формуле Тейлора [20]

$$\begin{aligned} u_m^1 &= u_m^0 + \dot{u}_m^0 \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{u}_m^0 \Delta t^2 = 0, & \gamma_m^1 &= \gamma_m^0 + \dot{\gamma}_m^0 \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\gamma}_m^0 \Delta t^2 = 0, \\ w_m^1 &= w_m^0 + \dot{w}_m^0 \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{w}_m^0 \Delta t^2 = \frac{1}{4h\rho} p_3(t_0) \Delta t^2, & m &= 1, 2, \dots, M-1, \end{aligned} \quad (29)$$

где учтены равенства (20), (28), а вторые производные по времени (см. (24)) вычислены на основании уравнений (11) или (17) при $t = t_0$ и начальных условиях (20).

Для контроля типа системы квазилинейных уравнений движения балки (11) в каждом внутреннем узле $x_1^{(m)}$, $1 \leq m \leq M-1$ (при реализации конечноразностного варианта схемы «крест»), или в каждом m -м элементе (при использовании вариационно-разностного варианта схемы «крест») введем индикаторную функцию $\chi_m^n = 0$, если в момент времени t_n в m -м внутреннем узле или в m -м элементе система (11) является гиперболической, т. е. согласно (12), (13), биквадратное уравнение (14) имеет только действительные корни x_t , и $\chi_m^n = 1$, если нарушается гиперболичность системы (11), т. е. уравнение (14) имеет комплексные корни. Кроме того, используем суммарную индикаторную функцию

$$X^n = \sum_m \chi_m^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (30)$$

определяющую в момент времени t_n общее количество узлов или элементов балки, в которых система (11) вырождается в систему смешанно-составного типа.

Обсуждение результатов расчетов. Для численного интегрирования уравнений движения гиперболического типа (17) можно использовать описанные в предыдущем разделе различные варианты схемы «крест». Условная устойчивость этой схемы накладывает следующее ограничение на выбор шагов по времени Δt и по пространственной переменной ℓ_* [1, 3, 4]:

$$\frac{\ell_*}{\Delta t} > c_1 \quad (> c_2), \quad \ell_* = \min_{1 \leq m \leq M} \ell_m, \quad (31)$$

где c_1 , c_2 определены по формулам (18), (19).

В общем же случае, когда условия (15) не выполняются, система (11) может и не быть гиперболической, поэтому применение схемы «крест» для ее численного интегрирования требует специального обоснования. На примерах конкретных численных расчетов покажем, что даже при выполнении неравенств (31) схема «крест» в применении к системе (11) может оказаться неустойчивой, т. е. в действительности следует говорить не об условной устойчивости схемы «крест» при численном интегрировании динамических задач для гибких тонкостенных элементов конструкций, а лишь о практической устойчивости этой схемы [16].

С этой целью в качестве конкретных примеров исследуем динамическое поведение балок-стенок длиной $L = 1$ м высотой $2h = 5$ см. Такие балки имеют относительно малую высоту $2h/L = 1/20$, для которых в случае изотропных материалов можно вполне обоснованно использовать и классическую теорию Бернулли, а не только уточненные теории типа Тимошенко [1, 4].

На обоих концах все балки-стенки жестко закреплены (см. рис. 1 и (21)), в начальный момент времени $t_0 = 0$ они находятся в состоянии покоя (см. (20)) и нагружаются фронтальной нагрузкой взрывного типа [1, 10]

$$p_3(x_1, t) = p_3(t) = p_*(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_0 t}), \quad (32)$$

где

$$p_* = p_{\max}(e^{-\alpha_1 t_*} - e^{-\alpha_0 t_*})^{-1}, \quad t_* = \frac{\ln(\alpha_0/\alpha_1)}{\alpha_0 - \alpha_1}, \quad \alpha_0 \gg \alpha_1, \quad (33)$$

α_0, α_1 – параметры, задающие вид взрывной нагрузки; t_* – момент времени, в который внешняя нагрузка p_3 достигает своего максимального по модулю значения p_{\max} .

Таблица 1. Физико-механические характеристики изотропных материалов [5, 14, 18].

Материал	E , ГПа	ν	ρ , кг/м ³	$\sigma_{0,2}$, МПа	$\varepsilon_{0,2}$, %	c_1 , м/с
Сплав В95	66.0	0.31	2850	573	0.868	4812.3
Сплав ИМВ-2	44.5	0.30	1590	190	0.427	5290.3
Сплав Бета-III	106.0	0.30	5070	1370	1.292	4572.4
Сталь 40X	208.0	0.30	7820	1100	0.529	5157.4
Волокна бора	410.0	0.23	2550	3200	0.780	12680.1

Балки могут быть изготовлены из изотропных металлических материалов: алюминиевого сплава В95, магниевое сплава ИМВ-2, титанового сплава Бета-III и стали марки 40X. Физико-механические характеристики этих материалов приведены в табл. 1, где $\varepsilon_{0,2} = \sigma_{0,2}/E$, $\sigma_{0,2}$ – условный предел текучести. Кроме того, рассматриваются композитные балки из углепластика марки ЛУ-П/ЭНФБ и М60J/Ероху, физико-механические характеристики которых указаны в табл. 2, а также бороматгневые балки, выполненные из сплава ИМВ-2 и продольно (рис. 1а) или пространственно (рис. 1б) армированные борными волокнами (см. табл. 1). В табл. 1, табл. 2 дополнительно приведены значения скорости звука c_1 , рассчитанные по формуле (18).

Таблица 2. Физико-механические характеристики углепластиков [12, 21].

Материал	E , ГПа	G , ГПа	ρ , кг/м ³	$\sigma_{11}^+/\sigma_{11}^-$, МПа	σ_{13}^+ , МПа	$\varepsilon_{11}^+/\varepsilon_{11}^-$, %	ε_{13}^+ , %	c_1 , м/с
ЛУ-П/ЭНФБ	140	4.6	1500	700/600	55	0.5/0.429	0.598	9660.9
М60J/Ероху	330	3.9	1500	1760/780	39	0.533/0.236	0.5	14832.4

Примечание: $\varepsilon_{11}^\pm = \sigma_{11}^\pm/E$, $\varepsilon_{13}^+ = \sigma_{13}^+/2G$, где σ_{11}^\pm – пределы прочности упруго-хрупких углепластиков при растяжении и сжатии вдоль волокон; σ_{13}^+ – предел прочности при сдвиге в поперечном направлении.

Для численного интегрирования начально-краевой задачи (11), (20), (21) с учетом (32), (33) используем четыре варианта схемы «крест»: МКР-1, МКР-2 – конечноразностные реализации схемы «крест», использующие соотношения первого ($\beta = 0$) и второго ($\beta = 1$) вариантов теории Тимошенко соответственно; ВРМ-1, ВРМ-2 – вариационно-разностные реализации схемы «крест», основанные на тех же вариантах теории Тимошенко (см. (25)–(29) при $\beta = 0$ и $\beta = 1$ соответственно). При этом вдоль оси балки введем равномерную сетку с шагом $\ell_m = \ell_* = L/200 = 0.005$ м, $1 \leq m \leq M = 200$, а шаг по времени зададим равным $\Delta t = 2 \cdot 10^{-7}$ с. Согласно (31), $c_* \equiv \ell_*/\Delta t = 25 \cdot 10^3$ м/с, что намного больше значений c_1 , приведенных в табл. 1, табл. 2 для рассматриваемых материалов. Следовательно, необходимое условие устойчивости исследуемых вариантов схемы «крест» в линейном приближении системы (11) (см. (17)) заведомо выполняется для всех материалов.

Расчеты проводились для моментов времени (22) при $0 \leq n \leq N = 2 \cdot 10^8$, $0 \leq t \leq 4$ с. Параметры нарастания и затухания внешней нагрузки (32) выбирались следующие: $\alpha_0 = 10^7 \text{ с}^{-1}$, $\alpha_1 = 10^{-1} \text{ с}^{-1}$. Такая нагрузка резко нарастает, согласно (33), достигая максимума при $t_* = 1.8421$ мкс, а затем достаточно медленно убывает (к концу расчетного периода $t = 4$ с нагрузка $p_3(t)$ уменьшается на 33% по сравнению со значением p_{\max}). На рис. 2 кривая 1 соответствует указанным параметрам α_0 , α_1 и $p_{\max} = 1.5$ МПа. Эта линия визуально не отличается от горизонтальной прямой, так как на рис. 2 рассматривается малая окрестность начального момента времени (порядка 30 мс).

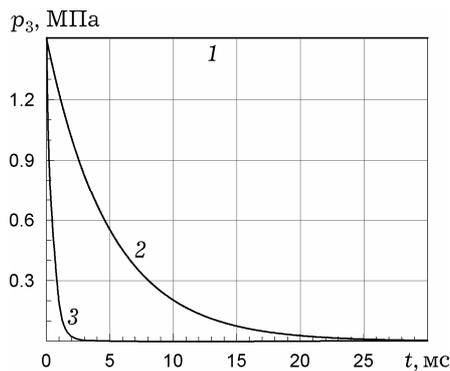


Рис. 2. Зависимость фронтальных нагрузок взрывного типа от времени.

В табл. 3 представлены результаты динамических расчетов изотропных металлических балок, полученные на основе применения четырех вариантов схемы «крест» для каждого материала балки. Значения p_{\max} в этой таблице приближенно соответствуют минимальному значению p_{\max} , при котором обнаруживается неустойчивость соответствующего варианта схемы «крест» на интервале времени $0 \leq t \leq 4$ с. Уменьшение значений p_{\max} , приведенных в табл. 3, на величину 0.1 МПа и более приводит к устойчивому сечению на всем рассматриваемом интервале времени.

Таблица 3. Динамический расчет изотропных металлических балок.

№ расчета	Метод расчета	p_{\max} , МПа	$\max u_3$, см	$\max u_1^0 $, мкм	$\max \varepsilon_{11} $, %	$\max \varepsilon_{13}^0 $, %
Балка из алюминиевого сплава В95						
1	ВРМ-1	1.4	1.064	15.296	0.832	0.050
2	ВРМ-2	0.5	0.388	1.966	0.294	0.027
3	МКР-1	2.5	1.842	47.460	1.518	0.090
4	МКР-2	3.9	2.734	107.460	1.986	0.222
Балка из магниевого сплава ИМВ-2						
5	ВРМ-1	0.2	0.229	0.680	0.173	0.010
6	ВРМ-2	0.8	0.910	10.700	0.710	0.065
7	МКР-1	1.7	1.858	43.682	1.536	0.091
8	МКР-2	0.9	1.024	13.481	0.685	0.074
Балка из стали марки 40Х						
9	ВРМ-1	0.9	0.221	0.639	0.167	0.010
10	ВРМ-2	3.8	0.922	10.942	0.721	0.067
11	МКР-1	7.6	1.785	40.123	1.487	0.092
12	МКР-2	3.9	0.949	11.557	0.631	0.068
Балка из титанового сплава Бета-III						
13	ВРМ-1	0.5	0.241	0.747	0.182	0.012
14	ВРМ-2	1.8	0.861	9.350	0.664	0.061
15	МКР-1	4.0	1.837	42.031	1.535	0.096
16	МКР-2	2.5	1.186	17.639	0.794	0.087

На рис. 3 приведены результаты расчетов алюминиевой балки, полученные на основе МКР-2 при $p_{\max} = 3.9$ МПа (см. расчет № 4 в табл. 3) до момента автоматического останова (авоста) ПЭВМ. На рис. 4 для сравнения приведены аналогичные результаты, полученные при $p_{\max} = 3.8$ МПа (устойчивый счет). На этом рисунке изображен не весь расчетный отрезок времени $0 \leq t \leq 4$ с, а только его начальная часть, соответствующая рассматриваемому на рис. 3 промежутку времени.

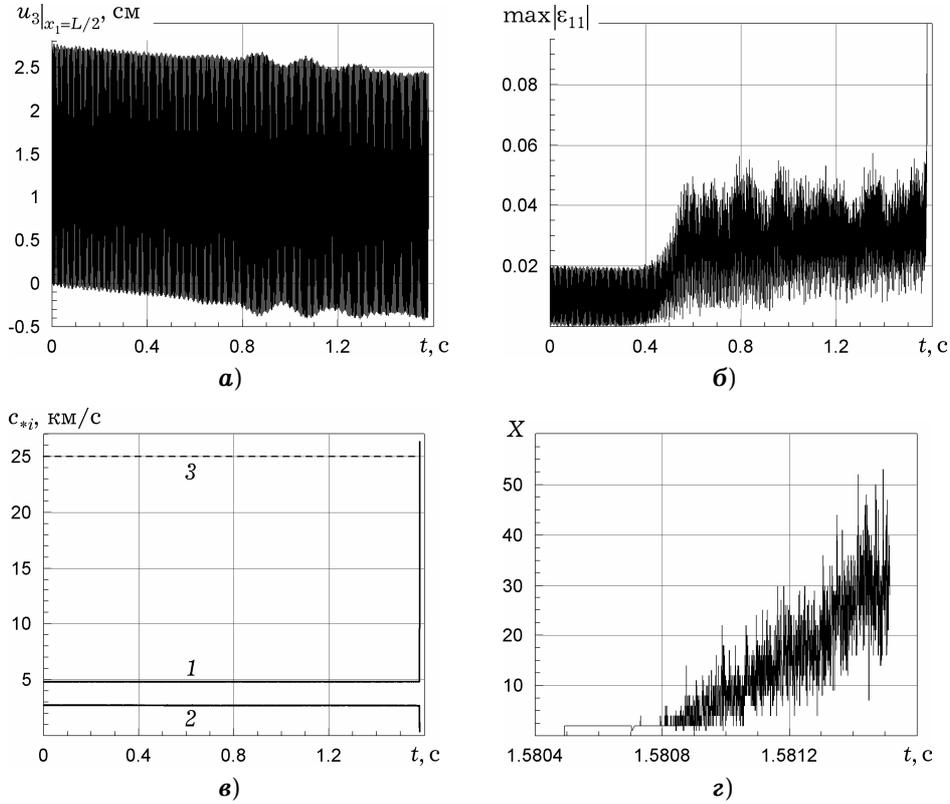


Рис. 3. Зависимости от времени характеристик решения динамической задачи изгиба алюминиевой балки при $p_{\max} = 3.9$ МПа, определенные с помощью МКР-2 (неустойчивый счет): а) – прогиба центрального сечения; б) – максимальных по модулю линейных деформаций; в) – локальных скоростей звука; г) – индикаторной функции (30).

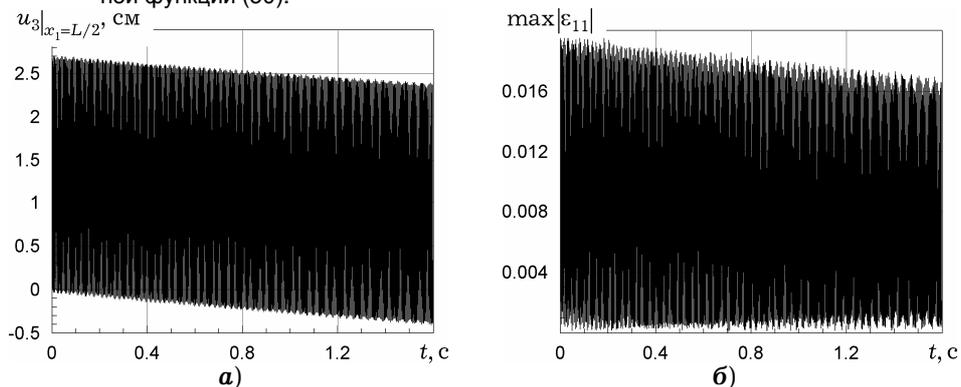


Рис. 4. Зависимости от времени характеристик решения динамической задачи изгиба алюминиевой балки при $p_{\max} = 3.8$ МПа, определенные с помощью МКР-2 (устойчивый счет): а) – прогиба центрального сечения; б) – максимальных по модулю линейных деформаций.

На рис. 4 наблюдается достаточно монотонное убывание осредненных осцилляций прогиба (рис. 4а) и максимума модуля осевой деформации балки $\max_x |\varepsilon_{11}|$ (рис. 4б) в полном соответствии с убыванием внешней нагрузки (32).

Сравнение же кривых на рис. 3б и рис. 4б показывает, что при неустойчивом счете примерно с момента времени $t = 0.4$ с начинается резкое нарастание по модулю деформаций ε_{11} (аналогичное поведение наблюдается и для зависимости $\max_x |\varepsilon_{13}^0| \sim t$, соответствующий рисунок не приведен), которое заканчивается катастрофическим ростом и авостом при $t = 1.58$ с. Сопоставление же кривых на рис. 4а и рис. 3а показывает, что при неустойчивом счете в данном случае (но не всегда) прогиб катастрофически не нарастает, лишь при $t \geq 0.6$ с на рис. 3а наблюдается заметная осцилляция амплитуды колебаний u_3 .

Отметим, что на рис. 3а, рис. 4а и рис. 5а, а также в табл. 3 – табл. 5 приведены данные по прогибу u_3 центрального сечения балки, так как в этом сечении прогиб максимален по модулю. Значения же $\max |u_1^0|$ в табл. 3 – табл. 5 выбирались по расчетным данным, определенным в сечениях $x_1 = L/4$ и $x_1 = L/8$. Кроме того, значения всех величин $\max u_3$, $\max |u_1^0|$, $\max |\varepsilon_{11}|$, $\max |\varepsilon_{13}^0|$, приведенных в табл. 3 – табл. 5, выбирались по данным расчетов в окрестности начального момента времени до того, как начиналось активное нарастание деформаций по модулю. Так, в расчете № 4 (см. табл. 3) эти значения, согласно рис. 3б, выбирались на интервале времени $0 < t < 0.3$ с.

Нарастание при неустойчивом счете модулей деформаций $|\varepsilon_{11}|$, $|\varepsilon_{13}^0|$, например, при $t \geq 0.4$ с, как на рис. 3б, означает нарастание по модулю производных $\partial u_1^0 / \partial x_1$, $\partial u_3 / \partial x_1$ (см. (9)), что, согласно (13), может сказаться на корнях уравнения (14), определяющего локальные скорости звука c_{*1} , c_{*2} в гибкой балке в рамках теории Тимошенко. На рис. 3в кривые 1, 2 характеризуют зависимости $c_{*1}(t)$, $c_{*2}(t)$ соответственно, рассчитанные в рамках МКР-2 для алюминиевой балки при $p_{\max} = 3.9$ МПа (см. расчет № 4 в табл. 3). Горизонтальная штриховая прямая 3 на этом рисунке соответствует предельной скорости звука $c_* = \ell_*/\Delta t$, при которой схема «крест» является устойчивой в рамках линейного приближения (17). Горизонтальные же участки кривых 1, 2 на рис. 3в выглядят как прямые линии, в действительности же локальные скорости c_{*1} , c_{*2} осциллируют в малых окрестностях фиксированных значений c_1 , c_2 , определяемых равенствами (18), (19) при $\beta = 1$. Как видно из рис. 3в, в окрестности момента времени $t \approx 1.58$ с скорость c_{*2} резко стремится к нулю, а c_{*1} резко нарастает (почти скачкообразно). Согласно этому, при $t > 1.5805$ с из (14) получаем $c_{*2}^2 < 0$ и два из четырех корней уравнения (14) становятся мнимыми, а при $t \geq 1.5814$ с значения $c_{*1} > c_* = \ell_*/\Delta t$, т. е. нарушается условие устойчивости схемы «крест». Таким образом, в рассматриваемом расчете при $t > 1.5805$ с система (11) перестает быть гиперболической, и оператор, определяющий прогиб u_3 , из гиперболического вырождается в эллиптический в некоторых узлах балки. Известно, что схема «крест» применительно к численному интегрированию начально-краевой задачи для эллиптических уравнений неустойчива [20], поэтому после вырождения типа системы (11) достаточно быстро наступает авост, хотя и не сразу. Так, на рис. 3г для этого случая приведена зависи-

мость индикаторной функции X (см. (30)) от времени t . Эта зависимость позволяет проследить за изменением количества узлов в балке, в которых нарушается гиперболичность системы (11). Видно, что со временем зависимость $X(t)$ имеет тенденцию к нарастанию, и к моменту авоста область вырождения типа системы (11) охватывает примерно 1/4 длины балки. Согласно рис. 3з, авост наступает не сразу за вырождением типа системы (11), а лишь после более 3500 шагов по времени. На основании же поведения кривых 1, 2 на рис. 3в можно заключить, что при неустойчивом счете вырождение типа системы (11) происходит катастрофически быстро и предсказать это вырождение заранее по зависимостям $c_{*1}(t)$, $c_{*2}(t)$, по-видимому, не представляется возможным.

Как видно из табл. 3, для всех изотропных металлических гибких балок все четыре рассматриваемых варианта схемы «крест» при определенных уровнях внешней нагрузки p_{\max} становятся неустойчивыми. Если устойчивость соответствующего варианта схемы «крест» оценивать по величине значений p_{\max} , приведенных в табл. 3, то окажется, что наименее устойчивым является ВРМ-1 (см. расчеты №№ 5, 9, 13) за исключением алюминиевой балки (ср. расчеты №№ 1, 2), а наиболее устойчивым – МКР-1 (см. расчеты №№ 7, 11, 15) за исключением опять же алюминиевой балки (ср. расчеты №№ 3, 4).

Однако данные, приведенные в табл. 3, не вполне показательны, так как получены для относительно невысоких изотропных гибких балок, для расчета которых вполне приемлема классическая теория Бернулли [11]. Теории же Тимошенко целесообразно использовать в случаях расчета анизотропных балок с ослабленным сопротивлением поперечным сдвигам. В связи с этим в табл. 4 приведены результаты расчетов балок тех же размеров, но выполненных из углепластиков, имеющих сильно выраженную степень анизотропии (см. табл. 2). Расчеты показали, что для углепластиковых балок не удается определить предельные уровни нагружения p_{\max} , при которых рассматриваемые варианты схемы «крест» проявили бы неустойчивость. Значения p_{\max} , приведенные в табл. 4, выбирались из тех соображений, что при них деформации (см. $\max|\varepsilon_{11}|$, $\max|\varepsilon_{13}^0|$ в табл. 4) имеют значения, близкие к предельным (близки к 5%) в том смысле, что дальнейшее увеличение p_{\max} приводит к уровням деформаций, которые уже нельзя считать малыми, как это предполагается в настоящем исследовании.

Таблица 4. Динамический расчет ортотропных углепластиковых балок.

№ расчета	Метод расчета	p_{\max} , МПа	$\max u_3$, см	$\max u_1^0 $, МКМ	$\max \varepsilon_{11} $, %	$\max \varepsilon_{13}^0 $, %
Балка из углепластика марки ЛУ-П/ЭНФБ						
17	ВРМ-1	12.0	4.258	110.245	3.021	2.512
18	ВРМ-2	12.0	4.366	87.751	2.969	3.445
19	МКР-1	12.0	4.259	109.782	3.244	2.504
20	МКР-2	12.0	4.423	87.815	2.658	3.474
Балка из углепластика марки М60J/Ероху						
21	ВРМ-1	–	–	–	–	–
22	ВРМ-2	–	–	–	–	–
23	МКР-1	12.0	2.853	25.012	1.435	2.694
24	МКР-2	12.0	3.042	55.748	1.232	4.065

В расчетах №№ 21, 22 вообще не удалось определить границу устойчивости схемы «крест». Расчеты проводились при $p_{\max} \geq 1$ Па, и при всех значениях схема «крест» в указанных расчетах оказалась неустойчивой.

На рис. 5 приведена зависимость прогиба u_3 центрального сечения балки из углепластика М60J/Ероху от времени, рассчитанная по первому варианту теории Тимошенко вариационно-разностным методом (см. расчет № 21) при $p_{\max} = 0.1$ МПа. Из этого рисунка видно, что неустойчивость ВРМ-1 в данном случае проявляется уже в очень малой окрестности начального момента времени, причем здесь, в отличие от рис. 3а, неустойчивость счета отчетливо сказывается на поведении зависимости $u_3(t)$. Следует отметить, что кривые, визуально почти неотличимые от изображенной на рис. 5, получаются и при динамических нагрузках, которые затухают достаточно быстро, например, при $\alpha_0 = 10^7 \text{ с}^{-1}$, $\alpha_1 = 10^2 \text{ с}^{-1}$ или $\alpha_0 = 10^7 \text{ с}^{-1}$, $\alpha_1 = 10^3 \text{ с}^{-1}$ (см. (32), (33) и кривые 2 или 3 на рис. 2 соответственно, полученные при $p_{\max} = 1.5$ МПа). А значит, можно утверждать, что, по-видимому, вариационно-разностные реализации схемы «крест» для балок из углепластика М60J/Ероху при динамическом их нагружении являются неустойчивыми. Хотя, возможно, что при других размерах балок, изготовленных из этого материала, ВРМ-1 и/или ВРМ-2 окажутся устойчивыми при определенных уровнях нагружения.

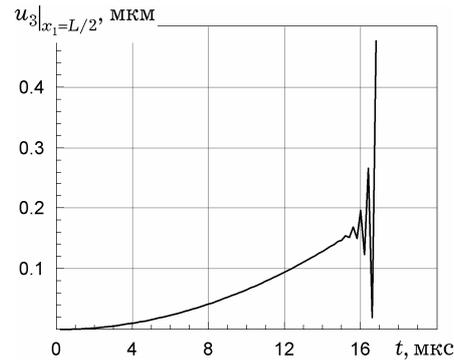


Рис. 5. Зависимость прогиба центрального сечения для балки из углепластика М60J/Ероху от времени, рассчитанная ВРМ-1 при $p_{\max} = 0.1$ МПа.

Таблица 5. Динамический расчет ортотропных боромagneвых балок.

№ расчета	Метод расчета	p_{\max} , МПа	$\max u_3$, см	$\max u_1^0 $, мкм	$\max \varepsilon_{11} $, %	$\max \varepsilon_{13}^0 $, %
Боромagneвая балка при продольном армировании (рис. 1а)						
25	ВРМ-1	1.2	0.277	0.984	0.201	0.036
26	ВРМ-2	12.0	2.574	78.270	2.008	0.545
27	МКР-1	5.6	1.275	20.431	0.964	0.164
28	МКР-2	5.4	1.253	19.472	0.789	0.247
Боромagneвая балка при пространственном армировании (рис. 1б)						
29	ВРМ-1	0.05	0.026	0.009	0.020	0.0006
30	ВРМ-2	0.4	0.210	0.596	0.159	0.0067
31	МКР-1	4.8	2.326	70.422	2.017	0.0604
32	МКР-2	7.4	3.378	149.673	2.469	0.1354

На практике часто используются композиционные материалы со слабо выраженной анизотропией, например металлокомпозиты [14], поэтому целесообразно рассмотреть динамическое поведение балок из таких композиций. В табл. 5 приведены результаты расчетов балок прежних размеров, изготовленных из магниевое сплава ИМВ-2 и однородно и регулярно армированных борными волокнами в продольном направлении (см. рис. 1а) и перекрестно армированных под углами $\pm \pi/4$ (см. рис. 1б) с суммарной плотностью армирования 0.5 в обоих случаях. Эффективные физико-механические характеристики композиции при продольном армировании имеют значения $E = 232.25$ ГПа, $G = 31.11$ ГПа, $\rho = 2070$ кг/м³, а при перекрестном армировании $E = 96.48$ ГПа, $G = 77.83$ ГПа, $\rho = 2070$ кг/м³. (Значения E , G получены по структурным формулам из [23], а ρ – по правилу простой смеси [14].)

Согласно приведенным данным, балка с перекрестным армированием (рис. 1б) обладает повышенным сопротивлением поперечному сдвигу, так как для нее $E/G = 1.24$, а для изотропных металлических балок это же отношение равно примерно 2.6. В случае же продольного армирования $E/G = 7.47$, что свидетельствует об ослабленном сопротивлении поперечным сдвигам соответствующих боромагнелиевых балок по сравнению с изотропными металлическими.

Значения p_{\max} , приведенные в табл. 5, за исключением расчетов №№ 26, 29, выбирались из тех же соображений, что и в табл. 3, а для расчета № 26 – как в табл. 4 (т. е. неустойчивость соответствующего варианта схемы «крест» не была обнаружена). В расчете № 29 уменьшение значения p_{\max} на величину 0.01 МПа приводит к устойчивому счету. (Расчеты проводились при исходных параметрах динамической нагрузки $\alpha_0 = 10^7 \text{ с}^{-1}$, $\alpha_1 = 10^{-1} \text{ с}^{-1}$.)

Если в табл. 3 – табл. 5 значения $\max|\varepsilon_{11}|$, $\max|\varepsilon_{13}^0|$ превосходят предельные значения для деформаций, указанные в табл. 1, табл. 2 (см. там $\varepsilon_{0.2}$, ε_{11}^{\pm} , ε_{13}^{\pm}), то можно утверждать, что соответствующий вариант схемы «крест» гарантирует устойчивый расчет динамического поведения соответствующей гибкой балки в пределах линейно-упругого поведения ее материала (хотя совершенно необязательно, что в случаях учета нелинейно-упругого или неупругого поведения материала балки эта схема по-прежнему будет оставаться устойчивой). Если же $\max|\varepsilon_{11}|$, $\max|\varepsilon_{13}^0|$ меньше предельных значений, то соответствующий вариант схемы «крест» не позволяет рассчитать динамическое поведение гибкой балки даже в пределах линейно-упругого поведения ее материала, как, например, в расчетах №№ 1, 2 (см. табл. 3) или №№ 29, 30 (см. табл. 5) и др.

Значения p_{\max} , приведенные в табл. 4, табл. 5, по-прежнему могут быть использованы для оценки границ устойчивости того или иного варианта схемы «крест» при расчетах динамического поведения композитных гибких балок. Анализируя данные по p_{\max} в табл. 3 – табл. 5, видим, что, как правило, наименее устойчивым является ВРМ-1, а наиболее устойчивым МКР-1. Однако существуют ситуации, в которых вообще не удается рассчитать динамическое поведение гибкой балки некоторыми из вариантов схемы «крест» (см. расчеты №№ 21, 22 в табл. 4). В подавляющем же большинстве случаев существуют уровни внешней динамической нагрузки, при превышении которых схема «крест» перестает быть устойчивой, хотя условие устойчивости, полученное в рамках линейного приближения, выполняется с большим запасом, а прогибы и деформации настолько малы, что при расчете, согласно традиционным представлениям [2, 6, 11, 22], можно было бы использовать геометрически линейную теорию балок (см., например, расчет № 5 в табл. 3 или расчеты №№ 29, 30 в табл. 5).

Приведенные в табл. 3 – табл. 5 данные получены при медленно затухающей динамической нагрузке (см. кривую 1 на рис. 2), которую можно рассматривать как «экзотическую», поэтому и к соответствующим результатам расчетов можно относиться как к малоубедительным. В связи с этим были проведены дополнительные расчеты для быстро затухающих нагрузок взрывного типа, которые тоже выявили неустойчивость схемы «крест» при определенных уровнях динамического нагружения. Так, расчеты стальной гибкой балки прежних размеров, выполненные на основе ВРМ-1 при параметрах нагрузки $\alpha_0 = 10^7 \text{ с}^{-1}$, $\alpha_1 = 10^2 \text{ с}^{-1}$ (см. (32), (33) и кривую 2 на рис. 2), показали, что при $p_{\max} = 1.3 \text{ МПа}$ (ср. с расчетом № 9 в табл. 3) указанный метод перестает быть устойчивым, причем в этом случае

$\max u_3 = 0.268$ см, $\max |\varepsilon_{11}| = 0.204$ %, $\max |\varepsilon_{13}^0| = 0.012$ %, а при $\alpha_0 = 10^7$ с⁻¹, $\alpha_1 = 10^3$ с⁻¹ (см. кривую 3 на рис. 2) неустойчивость начинается от значения $p_{\max} = 2$ МПа, причем соответствующие значения $\max u_3 = 0.167$ см, $\max |\varepsilon_{11}| = 0.119$ %, $\max |\varepsilon_{13}^0| = 0.007$ %.

Следовательно, и при нагрузках взрывного типа (при $\alpha_1 \gg 10$ с⁻¹) схема «крест» проявляет неустойчивость при расчетах не только композитных (см. расчеты №№ 21, 22 в табл. 4), но и изотропных балок, даже в тех случаях, когда и прогибы и деформации весьма малы. Согласно табл. 1, табл. 3 и приведенным выше данным, не удастся надежно рассчитать динамическое поведение стальных гибких балок даже в пределах их линейно-упругого деформирования. Кроме того, дополнительные расчеты показали, что устойчивость схемы «крест» ухудшается при наличии пульсирующих (повторяющихся) динамических нагрузках взрывного типа.

Если в соотношениях (4), (5) принять $B = 1$, а E заменить на $E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21})$, где E_1 – модуль упругости первого рода в продольном направлении балки, ν_{12} , ν_{21} – коэффициенты Пуассона некоторого ортотропного материала, то все приведенные выше соотношения и результаты расчетов остаются справедливыми для прямоугольных удлиненных пластин, выполненных из фиктивных ортотропных материалов с характеристиками E_1 , ν_{12} , ν_{21} , G и испытывающих динамический цилиндрический изгиб при нагрузках взрывного типа.

Заключение. Проведенные многочисленные расчеты динамического поведения гибких упругих изотропных и композитных балок, подчиняющихся гипотезам двух вариантов теории Тимошенко, и подробный их анализ показывают, что в геометрически нелинейном случае в приближении фон Кармана условие устойчивости схемы «крест», полученное в геометрически линейном приближении, не гарантирует устойчивого счета даже при малых прогибах и деформациях. Следовательно, при расчетах динамики гибких тонкостенных элементов конструкций по схеме «крест» можно говорить только о ее практической, а не условной устойчивости [16].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-90400-Укр_a).

1. *Абросимов Н. А., Баженов В. Г.* Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2002. – 400 с.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. – Москва: Наука, 1987. – 360 с.
3. *Аптуков В. Н., Фонарев А. Ф.* Численное моделирование процессов ударного и взрывного деформирования элементов конструкций и грунтов: Учеб. Пособие для ун-в. – Пермь: Изд-во Пермс. гос. ун-та, 2009. – 221 с.
4. *Баженов В. Г., Игоничева Е. В.* Нелинейные процессы ударного выпучивания упругих элементов конструкций в виде ортотропных оболочек вращения. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1991. – 132 с.
5. *Безухов Н. И., Баженов В. Л., Гольденблат И. И., Николаенко Н. А., Синюков А. М.* Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. – Москва: Машиностроение, 1965. – 568 с.
6. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – Москва: Мир, 1987. – 542 с.
То же: *Washizu K.* Variational methods in elasticity and plasticity. – Oxford: Pergamon Press, 1982.
7. *Ву Р. В.-Г., Уитмер Е. А.* Устойчивость методов де Вожела численного интегрирования по времени // Ракетная техника и космонавтика. – 1973. – **11**, № 10. – С. 97–100.
То же: *Wu R. W.-H., Witmer E. A.* Stability of the De Vogelaere method for timewise numerical integration // AIAA Journal. – 1973. – **11**, No. 10. – P. 1432–1436.

8. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге – Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. – Москва: Мир, 1988. – 334 с.
То же: Dekker K., Verwer J. G. Stability of Runge – Kutta methods for stiff nonlinear differential equations. – Amsterdam: North-Holland, 1984. – ix+307 p.
9. Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. – Ташкент: Фан, 1979. – 238 с.
10. Динамический расчет сооружений на специальные воздействия: Справочник проектировщика / Под ред. Б. Г. Коренева, И. М. Рабиновича. – Москва: Стройиздат, 1981. – 215 с.
11. Доннелл Л. Г. Балки, пластины и оболочки. – Москва: Наука, 1982. – 567 с.
То же: Donnel L. H. Beams, plates, and shells. – New York: McGraw Hill, 1976. – xiv+453 p.
12. Зиновьев П. А., Смердов А. А. Оптимальное проектирование композитных материалов: Учеб. пособие по курсу «Проектирование композитных конструкций». Ч. II. – Москва: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 103 с.
13. Киселев В. В., Долгих Д. В. Нелинейно-упругие узоры из вмятин на поверхностях нагруженных пластин и оболочек. – Москва: Физматлит, 2012. – 164 с.
14. Композиционные материалы: Справочник / Под ред. Д. М. Карпиноса. – Киев: Наук. думка, 1985. – 592 с.
15. Кузьмин М. А., Лебедев Д. Л., Попов Б. Г. Расчеты на прочность элементов многослойных композитных конструкций: Учеб. пособие. Сер. Прочность, жесткость, устойчивость элементов конструкций. Теория и практикум: – Москва: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012. – 341 с.
16. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. – Москва: Мир, 1964. – 168 с.
То же: La Salle J. P., Lefschetz S. Stability by Liapunov's direct method with applications. – New York-London: Acad. Press, 1961. – 134 p.
17. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. – Москва: Наука, 1980. – 512 с.
18. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – Москва: Машиностроение, 1968. – 400 с.
19. Поздеев А. А., Трусов П. В., Няшин Ю. И. Большие упругопластические деформации: Теория, алгоритмы, приложения. – Москва: Наука, 1986. – 232 с.
20. Самарский А. А. Теория разностных схем. – Москва: Наука, 1989. – 616 с.
21. Смердов А. А., Буянов И. А., Чуднов И. В. Анализ оптимальных сочетаний требований к разрабатываемым углепластикам для крупногабаритных ракетно-космических конструкций // Изв. вузов. Машиностроение. – 2012. – № 8. – С. 70–77.
22. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. – Москва: Эдиториал УРСС, 2009. – 640 с.
То же: Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells. – New York: McGraw Hill, 1959. – 595 p.
23. Янковский А. П. Определение термоупругих характеристик пространственно армированных волокнистых сред при общей анизотропии материалов компонентов композиции // Механика композитных материалов. – 2010. – **46**, № 5. – С. 663–678.
То же: Yankovskii A. P. Determination of the thermoelastic characteristics of spatially reinforced fibrous media in the case of general anisotropy of their components // Mech. Compos. Mater. – 2010. – **46**, No. 5. – P. 451–460.
24. Antman S. S. Nonlinear problems of elasticity. – Berlin-New York: Springer-Verlag, 1995. – xviii + 750 p.
25. Banjari L., Messner M., Schanz M. Runge – Kutta convolution quadrature for the boundary element method // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 2012. – **245–246**. – P. 90–101.
26. Lafortune S., Lega J. Instability of local deformations of an elastic rod // Physica **D**. – 2003. – **182**, No. 1-2. – P. 103–124.
27. Lega J., Goriely A. Pulses, front and oscillations of an elastic rod // Physica **D**. – 1999. – **132**, No. 3. – P. 373–391.
28. De Vogelaere R. A method for the numerical integration of differential equations of second order without explicit first derivatives // J. Res. Nat. Bur. Stand. – 1955. – **54**, No. 3. – P. 119–125.
29. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The finite element method. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 707 p.

ПРАКТИЧНА СТІЙКІСТЬ СХЕМИ «ХРЕСТ» ПРИ ЧИСЛОВОМУ ІНТЕГРУВАННІ РІВНЯНЬ ДИНАМІКИ ДЛЯ ГНУЧКИХ ТОНКОСТІННИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ, ЯКІ ЗАДОВОЛЬНЯЮТЬ ГІПОТЕЗИ ТЕОРІЇ ТИМОШЕНКА

У наближенні Кармана сформульовано початково-крайову задачу динаміки гнучких ізотропних і композитних пружних балок-стінок у рамках двох варіантів теорії Тимошенка. Виконано якісний аналіз визначальної системи рівнянь руху. Продемонстровано, що в геометрично лінійній постановці динаміка пружних балок описується системою гіперболічного типу, а у випадку деформування гнучких балок система визначальних рівнянь руху може змінити свій тип на змішано-складений. Розроблено скінченнорізницевий і варіаційно-різницевий варіанти явної за часом схеми «хрест» для числового інтегрування сформульованих початково-крайових задач. На основі цих числових методів проведено розрахунки динамічного згинного деформування гнучких металічних і композитних балок за навантажень вибухового типу. Обчислення показали, що майже завжди існують такі рівні навантаження гнучких балок, при яких схема «хрест» стає нестійкою, хоч умова стійкості, отримана в лінійному наближенні, виконується зі значним запасом. Тим самим показано, що при динамічному розрахунку гнучких балок можна говорити лише про практичну стійкість схеми «хрест», а не про її умовну стійкість.

PRACTICAL STABILITY OF THE «CROSS» SCHEME IN NUMERICALLY INTEGRATION THE EQUATIONS OF THE DYNAMICS OF FLEXIBLE THIN-WALLED STRUCTURAL ELEMENTS UNDER THE HYPOTHESES OF THE TIMOSHENKO THEORY

In the Von Kármán approximation the initial-boundary value dynamics problem for flexible isotropic and composite elastic beam-walls is formulated within two variants of the Timoshenko theory. Qualitative analysis of the governing equations of motion is carried out. It is shown that in geometrically linear statement the dynamics of elastic beams is described by a system of hyperbolic type, and in the case of deformation of the flexible beams a governing system of equations of motion can change its type, degenerating from a system of hyperbolic type into a system of mixed-compound type. Finite difference and variation-difference variants of the «cross» scheme, explicit in time, are developed for the numerical integration of the formulated boundary value problems. On the basis of these numerical techniques the calculations are carried out for the dynamic flexural deformation of flexible metallic and composite beams under loads of explosive type. The calculations showed that almost always there exist such levels of loading of flexible beams, in which the «cross» scheme becomes unstable, although the stability condition obtained in the linear approximation is true with considerable reserve. Thus it is shown that in the dynamic calculation of flexible beams, one can only talk about the practical stability of the «cross» scheme, and not about its conditional stability.

Ин-т теорет. и прикл. механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

Получено
12.12.14