

Л. М. Сеньків

**НАПРУЖЕНИЙ СТАН ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОРТОТРОПНОЇ ОБОЛОНКИ
З ТРИЩИННОЮ ПІД КУТОМ**

На основі методу дисторсій у теорії тонких оболонок Кірхгофа – Лява задачу про пружну рівновагу циліндричної ортотропної оболонки з розрізом уздовж гвинтової лінії зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь. Досліджено вплив ортотропії, орієнтації та довжини розрізу на коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів.

У різних галузях сучасного машинобудування широко використовують тонкостінні оболонкові конструкції, зокрема циліндричні. Тому прогнозування їх міцності за наявності різних концентраторів напружень, зокрема наскрізних тріщин на боковій поверхні – актуальна задача механіки руйнування.

Теоретично напружено-деформований стан в околі тріщин вивчали багато дослідників. Найпоширенішим є метод зведення таких задач до системи граничних інтегральних рівнянь [7]. При цьому розглядають оболонки, послаблені поздовжніми чи поперечними розрізами [4]. Напружений стан в околі довільно орієнтованих тріщин досліджували для пологих оболонок у працях [9, 10], зокрема у [6] – напружено-деформований стан пологої циліндричної оболонки.

Результати експериментів для циліндричної оболонки з довільно орієнтованими тріщинами наведено в [2].

Розглянемо задачу про напружений стан непологої циліндричної ортотропної оболонки з довільно орієнтованим розрізом. Віднесемо серединну поверхню оболонки радіуса R і товщини $2h$ до ортогональної системи координат $\alpha_1 O \alpha_2$, де α_1 і α_2 – відстані відповідно вздовж твірної і напрямного кола.

Моделюючи оболонку з розрізами суцільною оболонкою [4], в якій на місці розрізів зосереджені внутрішні джерела напружень, а також беручи за вихідні рівняння теорії Кірхгофа–Лява, отримаємо систему трьох диференціальних рівнянь у переміщеннях для ортотропної оболонки з власними напруженнями:

$$\sum_{k=1}^3 L_{nk} u_k = R F_n(\varepsilon_{mi}^0, \alpha_{mi}^0), \quad n = 1, 2, 3, \quad (1)$$

де L_{nk} – симетричні диференціальні оператори не вище четвертого порядку, в які входять пружні сталі оболонки, параметр тонкостінності $c_0 = h/(\sqrt{3}R)$; $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$ – переміщення серединної поверхні оболонки; $\varepsilon_{mn}^0, \alpha_{mn}^0$ – дисторсії, якими моделюємо розріз.

З використанням операторного методу розв'язок системи знаходимо через ключові функції $\varphi_i, \psi_i, i = 1, 2, 3$, які є згорткою по серединній поверхні оболонки компонент поля дисторсій з 2π -періодичним фундаментальним розв'язком $G(\alpha, \beta)$ системи (1):

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\alpha, \beta) &= \iint \bar{\varepsilon}(\xi, \zeta) G(\xi - \alpha, \zeta - \beta) d\xi d\zeta, \\ \bar{\psi}(\alpha, \beta) &= \iint \bar{\alpha}(\xi, \zeta) G(\xi - \alpha, \zeta - \beta) d\xi d\zeta, \end{aligned} \quad (2)$$

Тут $\bar{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$; $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$; $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}^0, \varepsilon_{12}^0, \varepsilon_{22}^0)$; $\bar{\alpha} = (\alpha_{11}^0, \alpha_{12}^0, \alpha_{22}^0)$ –

вектори компонент поля дисторсій [4]. Фундаментальний розв'язок системи (1) має вигляд [5]

$$G(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left[g_0(\alpha) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\alpha) e^{ik\beta \operatorname{sgn} \alpha} \right], \quad (3)$$

де

$$g_k(\alpha) = \begin{cases} \sum_{n=1}^2 \frac{1}{\Delta'_{kn}} \left(e^{-s_{pn}|\alpha|} - \sum_{m=0}^3 \frac{(s_{pn}|\alpha|)^m}{m!} \right), & k = 0, 1, \\ \sum_{n=1}^4 \frac{e^{-s_{pn}|\alpha|}}{\Delta'_{kn}}, & k > 1. \end{cases}$$

Тут s_{kn} – корені характеристичного полінома Δ_{kn} , які залежать від параметра тонкостінності оболонки $c_0 = h/\sqrt{3R}$ і пружних сталей її матеріалу [1].

Нехай $\bar{N} = (\bar{N}_1, \bar{S}, \bar{N}_2)$, $\bar{M} = (\bar{M}_1, \bar{H}, \bar{M}_2)$ – вектори зусиль і моментів, що діють уздовж координатних ліній α_1, α_2 [4]. Тут \bar{N}_1, \bar{N}_2 – розтягувальні зусилля; \bar{S} – перерізувальна сила; \bar{M}_1, \bar{M}_2 – згинні моменти, \bar{H} – крутильний момент. Визначимо їх через ключові функції φ_i, ψ_i , $i = 1, 2, 3$:

$$\bar{N} = (\widehat{N}_\varphi \bar{\varphi} + \widehat{N}_\psi \bar{\psi}), \quad \bar{M} = (\widehat{M}_\varphi \bar{\varphi} + \widehat{M}_\psi \bar{\psi}), \quad (4)$$

де матриці $\widehat{N}_\varphi, \widehat{N}_\psi, \widehat{M}_\varphi, \widehat{M}_\psi$ є диференціальними операторами восьмого порядку, які залежать від параметра c_0 і пружних сталей матеріалу оболонки [1].

Нехай у циліндричній оболонці є розріз, слід Γ якого на серединній поверхні є відрізком гвинтової лінії, що утворює кут φ з координатною лінією $\alpha_1 = \text{const}$. Параметричне рівняння лінії розрізу Γ запишемо у вигляді

$$\alpha_i = \xi_i(\lambda) = (-1)^i v_{3-i} \lambda + \alpha_i^0, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

де $n_1 = \cos \varphi$; $n_2 = \sin \varphi$; λ – віднесена до R довжина (зі знаком) відрізка дуги Γ , яку вимірюють від її центра (α_1^0, α_2^0) , $|\lambda| \leq \lambda_0$, де λ_0 – віднесена до радіуса R півдовжина дуги Γ .

Оболонка перебуває під дією зовнішнього навантаження і до берегів розрізу прикладені рівні за значеннями, але протилежно напрямлені нормальне і зсувне зусилля $N_v, N_{v\tau}$, згинний і крутильний моменти $M_v, M_{v\tau}$, а також перерізувальна сила Q_v ; v і τ – нормаль і дотична до контуру Γ . Як граничні умови задаємо чотири узагальнені величини $\tilde{N}_v, \tilde{N}_{v\tau}, \tilde{M}_v$ та \tilde{Q}_v :

$$\tilde{N}_v = N_v - \frac{M_{v\tau}}{R}, \quad \tilde{N}_{v\tau} = N_{v\tau} + \frac{M_{v\tau}}{R}, \quad \tilde{M}_v = M_v, \quad \tilde{Q}_v = Q_v + \frac{d}{ds_\tau}, \quad (6)$$

де $\frac{d}{ds_\tau} = -n_2 \partial_1 + n_1 \partial_2$ – похідна по дотичній до контуру Γ , а n_1 та n_2 – напрямні косинуси одиничного вектора зовнішньої нормалі до нього.

З урахуванням (5) ці зусилля і моменти виразимо через N_i, M_i, S та H за допомогою матриць перетворення координат \widehat{V}, \widehat{W} [8], елементами

яких, крім n_1 і n_2 , є похідні по нормалі до гвинтової лінії $\partial_\nu = -n_2\partial_1 + n_1\partial_2$ та дотичної до неї $\partial_\tau = n_1\partial_1 + n_2\partial_2$:

$$\bar{T} = \widehat{V}\bar{N} + R^{-1}\widehat{W}\bar{M}. \quad (7)$$

Тут

$$\bar{T} = (f_1, f_2, f_3, f_4) = (N_\nu, N_{\nu\tau}, R^{-1}M_\nu, Q_\nu). \quad (8)$$

Враховуючи, що за переходу через лінію розрізу зусилля і моменти неперервні, а переміщення і кути повороту мають розриви першого роду, диференціюючи їх як узагальнені функції [4], виразимо компоненти тензора дисторсій через зосереджені на лінії розрізу функціонали, густини яких є комбінаціями стрибків переміщень і кутів повороту:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii}^0 &= \frac{1}{R}(n_i[u_i], \delta)_L, \\ \varepsilon_{12}^0 &= \frac{1}{R}(-n_2[u_1] + n_1[u_2], \delta)_L, \\ \alpha_{ii}^0 &= -\frac{1}{R}\left\{(n_i[\theta_i], \delta)_L + \frac{1}{R}(n_i[w], \partial_i\delta)_L\right\}, \\ \alpha_{12}^0 &= -\frac{1}{R^2}\left\{(n_i[\partial_j w], \delta)_L + (n_j[w], \delta)_L - (n_1[u_2], \delta)_L\right\}, \\ & i = 1, 2, j = 3 - i. \end{aligned} \quad (9)$$

Тут

$$[y] = [y(\lambda)] = y(\xi_1 + n_1 0, \xi_2 + n_2 0) - y(\xi_1 - n_1 0, \xi_2 - n_2 0),$$

$|\lambda| < \lambda_0$, $[y(\pm\lambda_0)] = 0$ – стрибок функції $y(\alpha_1, \alpha_2)$ за переходу через лінію розрізу,

$$(s, S)_L = \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} s(\lambda) S(\alpha_1 - \xi_1(\lambda), \alpha_2 - \xi_2(\lambda)) d\lambda, \quad (10)$$

$\delta = \delta(\alpha_1)\delta(\alpha_2)$; $\{\partial_j w\}$ – звичайна похідна від функції $w(\alpha_1, \alpha_2)$.

З урахуванням (2), (4), (8) для узагальнених зусиль і моментів, що діють на берегах розрізу, запишемо інтегральні подання, де густинами є невідомі узагальнені переміщення на лінії розрізу $[u_\nu]$, $[u_\tau]$, $[\theta_\nu]$, $[w]$, через які виразимо за допомогою матриць, обернених до \widehat{V} , \widehat{W} , узагальнені переміщення $[u_1]$, $[u_2]$, $[w]$, $[\theta_1]$, $[\theta_2]$ [8].

Враховуючи умови однозначності переміщень і кутів повороту у вершинах розрізу та задовольняючи граничні умови на його берегах, після деяких перетворень отримаємо систему чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь для визначення невідомих стрибків переміщень:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^4 \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} h_j(\lambda) K_{ij}(\lambda - y) d\lambda = F_i(y). \quad (11)$$

Тут

$$h_1 = \frac{d}{ds_\tau}[u_\nu], \quad h_2 = \frac{d}{ds_\tau}[u_\tau], \quad h_3 = \frac{d}{ds_\tau}[\theta_\nu], \quad h_4 = \frac{d^2}{d^2s_\tau}[w],$$

$$F_i(y) = f_i(y), \quad i = 1, 2, 3, \quad F_4(y) = \int f_4(y) dy + C,$$

де $f_4(y)$ – перерізувальна сила; C – стала інтегрування.

Ядра системи (11), які є симетричними і залежать від параметра тонкостінності, пружних характеристик матеріалу та кута φ , мають вигляд

$$K_{ij}(z) = \frac{r_{ij}}{z} + \lambda_0 K_{ij}^0(z),$$

де $K_{ij}^0(z)$ – регулярна частина ядер. Величини r_{ij} і $K_{ij}^0(z)$ залежать від відношення h/R , а також від пружних характеристик матеріалу.

За допомогою методу механічних квадратур [3] розв'язок системи (11) інтегральних рівнянь шукали у вигляді

$$h_i(\lambda) = g_i^0(\lambda) \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (12)$$

перевіряючи умову відсутності контакту берегів розрізу.

Коефіцієнти інтенсивності напружень визначали за формулами

$$K_\ell = -R^{\delta_\ell^3} \lambda_0^{\delta_\ell^4} \sqrt{\lambda_0} \sum_{j=1}^4 r_{\ell j} h_j^0, \quad (13)$$

де $\ell = \tilde{N}_v, \tilde{N}_{v\tau}, \tilde{M}_v, \tilde{Q}_v$.

Для різної орієнтації розрізу на рис. 1–4 наведено залежності нормованих коефіцієнтів інтенсивності напружень k_1, k_2, k_3 і k_4 від його довжини $\lambda_0 = \alpha_2^0$:

$$\begin{aligned} k_1 &= K_{\tilde{N}_v} / (P\sqrt{\lambda_0}), \\ k_2 &= K_{\tilde{N}_{v\tau}} / (P\sqrt{\lambda_0}), \\ k_3 &= K_{\tilde{M}_v} / (RP\sqrt{\lambda_0}), \\ k_4 &= K_{\tilde{Q}_v} / (P\lambda_0\sqrt{\lambda_0}), \end{aligned} \quad (14)$$

які обчислювали, коли на берегах розрізу діють постійні розтягувальне та зсувне зусилля:

$$f_1(\alpha_2) = P, \quad f_2(\alpha_2) = P. \quad (15)$$

Числові дослідження виконали для різних ортотропних матеріалів, з яких виготовлена оболонка [1], в якій армувальні волокна розміщені паралельно до твірної ($G_{12} = G_{13}, G_{23} = E_2/(2(1+\nu))$), ν – коефіцієнт Пуассона у напрямку нормалі до серединної поверхні оболонки).

Римськими цифрами на рис. 1–4 позначено матеріал оболонки [1]:

I – композит на епоксидній основі, армований графітними волокнами:

$$E_1 = 14.9 \text{ МПа}, \quad E_2 = 0.6 \text{ МПа}, \quad G_{12} = 0.4 \text{ МПа}, \quad \nu_1 = 0.31.$$

II – армований волокнами з S-скла: $E_1 = 6.25 \text{ МПа}, \quad E_2 = 2.12 \text{ МПа},$

$$G_{12} = 0.9 \text{ МПа}, \quad \nu_1 = 0.251.$$

III – борепоксидний композит: $E_1 = 40 \text{ МПа}, \quad E_2 = 4 \text{ МПа}, \quad G_{12} = 1.5 \text{ МПа},$

$$\nu_1 = 0.25.$$

IV – склопластик АГ-4С: $E_1 = 2.1 \text{ МПа}, \quad E_2 = 1.6 \text{ МПа}, \quad G_{12} = 0.41 \text{ МПа},$

$$\nu_1 = 0.07.$$

Обчислення виконано для значень $\varphi = 10, 30, 45^\circ$ при $h/R = 0.01$.

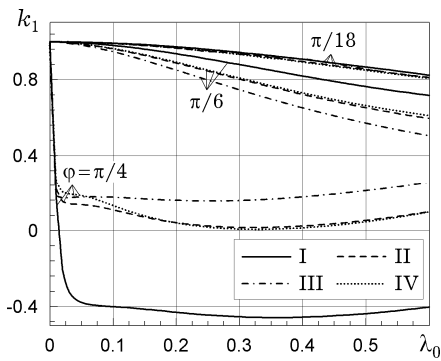


Рис. 1

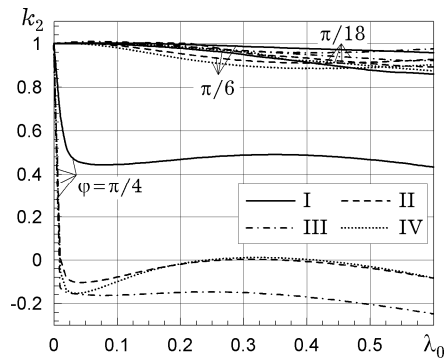


Рис. 2

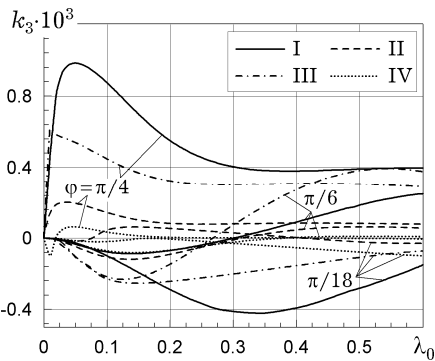


Рис. 3

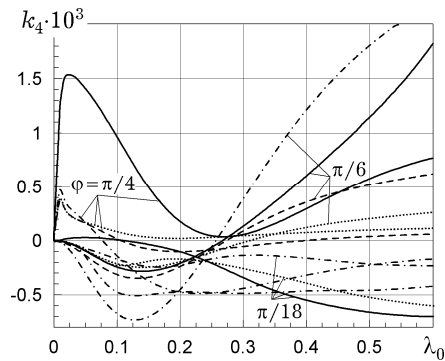


Рис. 4

Числовий аналіз виявив, що незалежно від ортотропії матеріалу оболонки всі коефіцієнти інтенсивності різко міняють свої значення при $\varphi = 45^\circ$ за малих довжин тріщини ($\lambda_0 \leq 0.05$); що менший кут φ ($\varphi = 10^\circ$ та $\varphi = 30^\circ$), то слабшим є вплив ортотропії матеріалу на коефіцієнти інтенсивності k_1 та k_2 , хоча їх значення є більші, ніж у випадку, коли $\varphi = 45^\circ$. Коефіцієнти k_3 та k_4 на три порядки менші, ніж k_1 та k_2 .

1. Ашкенази Е. К., Ганов Э. В. Анизотропия конструктивных материалов: Справочник. – Ленинград: Машиностроение, 1980. – 248 с.
2. Дзюба П. А., Прокопало Е. Ф., Солонін О. О. Міцність циліндричної оболонки, послабленою випадково розташованими прямолінійними розрізами, при розтязі осью силою // Методи розв'язування прикладних задач механіки твердого деформованого тіла. – 2009. – Вип. 10. – С. 97–108.
3. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. – Москва: Наука, 1973. – 304 с.
4. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
5. Осадчук В. А., Прокопович І. Б., Сеньків Л. М. Фундаментальний розв'язок рівнянь пружної рівноваги анізотропної циліндричної оболонки // Доп. АН УРСР. – 1991. – № 6. – С. 43–46.
6. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наук. думка, 1976. – 444 с.
7. Подстригач Я. С., Швець Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 344 с.
8. Прокопович І. Б., Сеньків Л. М., Лаушник І. П. Упругое равновесие непологих цилиндрических оболочек с разрезами // Прикл. проблемы прочности и пластичности. – 1996. – Вып. 54. – С. 175–184.
9. Шевченко В. П., Довбня К. М. Метод граничних інтегральних рівнянь у задачах статички пологих ортотропних оболонок із розрізами й отворами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – 46, № 1. – С. 47–59.
10. Шевченко В. П., Довбня К. М. Система граничних інтегральних рівнянь для ортотропної оболонки з розрізом довільної конфігурації // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – 44, № 1. – С. 103–108.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОРТОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ С ТРЕЩИНОЙ ПОД УГЛОМ

На основе метода дисторсий в теории тонких оболочек Кирхгофа – Лява задача об упругом равновесии цилиндрической ортотропной оболочки с разрезом вдоль винтовой линии сведена к системе сингулярных интегральных уравнений. Исследовано влияние ортотропии, ориентации и длины разреза на коэффициенты интенсивности усилий и моментов.

STRESSED STATE OF THE CYLINDRICAL ORTHOTROPIC SHELL WITH ANGULARLY CRACK

On the base of distortion method in the Kirchhoff – Love thin shell theory the problem on elastic equilibrium of orthotropic shell with the cut oriented along screw curve segment is reduced to a system of singular integral equations. The effect of orthotropy, orientation and cut length on the intensity factors of efforts and moments is studied.

Ин-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
30.09.15