

**НАПРУЖЕНИЙ СТАН ЧАСТКОВО ЗАКРІПЛЕНОЇ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З РІДИНОЮ ЗА ІМПУЛЬСНОГО ЗБУДЖЕННЯ**

*Досліджується напружено-деформований стан замкненої пружної сферичної оболонки, заповненої ідеальною стисливою рідиною. Джерелом збудження системи є енергія, що вводиться імпульсно в газovu порожнину в центрі системи. Наведено гіпотези дослідження методом скінченних різниць і сформульовано коректну математичну постановку задачі. Одержано результати зміни в часі величини напружень для випадку вільної оболонки та для випадку часткового жорсткого закріплення її поверхні. Досліджено вплив жорсткого закріплення на напружено-деформований стан оболонки.*

**Вступ.** Дослідження динамічних процесів, що відбуваються у складних технічних системах, є однією з фундаментальних проблем сучасної науки. Такі дослідження є актуальними з точки зору оптимізації роботи систем, підвищення надійності та безпеки їх функціонування і ефективності. У багатьох випадках вони базуються на використанні потужного апарату математичного моделювання.

Системи, що складаються зі сферичної оболонки, заповненої рідиною [7], зустрічаються у різних областях науки і техніки, зокрема, сферичні резервуари застосовують при зберіганні скрапленого газу під тиском або легкозаймистих речовин. Сферичні ємності входять до складу устаткування технологічних ліній у хімічній промисловості. Подібні конструкційні моделі використовують у біомеханіці [1, 5, 13]. Крім того, оболонки сферичної форми застосовують у вибухових камерах для моделювання та дослідження вибухових процесів при введенні енергії в систему [6, 7]. Такі системи було розглянуто у роботах [2, 10, 11–14, 16], в яких розв'язувалися задачі динаміки заповнених оболонок, але питання, пов'язані з інтенсивністю напружень, що виникають в оболонці, є актуальними і потребують подальших досліджень.

Метою роботи є дослідження напружено-деформованого стану замкненої сферичної оболонки, заповненої ідеальною стисливою рідиною, при жорсткому закріпленні частини її поверхні.

**1. Постановка задачі.** Об'єктом дослідження є гідропружна механічна система, яка складається із замкненої сферичної оболонки  $S$  товщини  $h$ , яка заповнена ідеальною стисливою рідиною (область  $\Omega^f$ ) з газовою порожниною у центрі (область  $\Omega^c$ ), яка є джерелом збудження системи при введенні в неї енергії (рис. 1а). До моменту часу  $t = 0$  система знаходиться у стані спокою. Починаючи від моменту часу  $t = 0$ , в системі збуджується хвильовий рух, який передається від сферичної порожнини в рідину і далі – в пружну оболонку та випромінюється в зовнішнє акустичне середовище (область  $\Omega^a$ ).

Введемо сферичну систему координат, у якій кожна точка  $M$  простору визначається трьома координатами,  $M(\theta, \varphi, r)$ . Нехай  $R_s$  – радіус серединної поверхні сферичної оболонки, на поверхні якої кожна точка задається двома координатами – полярними кутами,  $M(\theta, \varphi, R_s)$ . Рух оболонки (елементарної площинки) описується п'ятьма змінними: переміщеннями в просторі  $u$ ,  $v$ ,  $w$  і кутами повороту відносно нормалі  $\theta^*$ ,  $\varphi^*$  (рис. 1б).

Для знаходження розв'язку задачі методом скінченних різниць сформулюємо такі гіпотези.

*Гіпотеза 1.* Внаслідок малості товщини оболонки за значення функцій на внутрішній і зовнішній поверхнях оболонки приймаємо їх значення на серединній поверхні оболонки.

*Гіпотеза 2.* Тиск у газовій порожнині приймаємо осередненим за радіусом і визначаємо з рівняння балансу енергії.

*Гіпотеза 3.* Пульсації газової порожнини вважаємо весь час сферично центрально-симметричними так, що об'єм бульбашки визначається як об'єм кулі, незважаючи на нецентрально-симметричні деформації пружної оболонки.

*Гіпотеза 4.* Оболонку вважаємо пружною, змодельованою в рамках гіпотез Кірхгофа – Лява [4].

*Гіпотеза 5.* Розповсюдження збурення в рідині розглядаємо в рамках акустичного наближення.

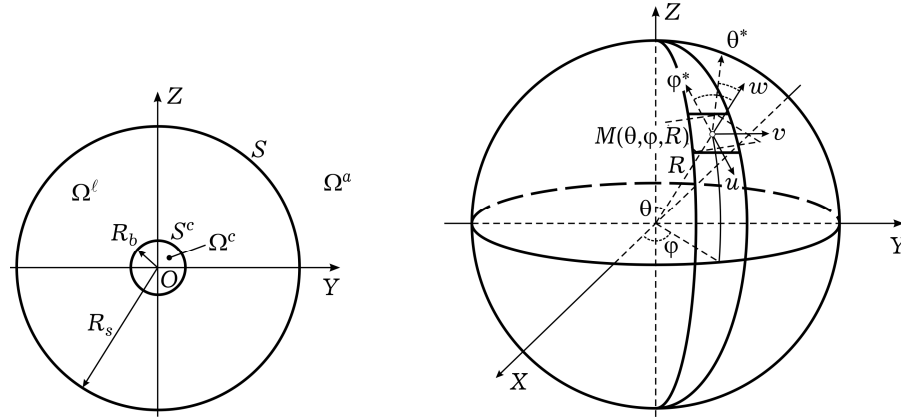


Рис.1. Геометрія системи.

Отриману у роботі [7] систему рівнянь, яка описує динаміку гідро-пружної системи порожнина – рідина – оболонка, зведемо до безрозмірного вигляду. Як первинні змінні вибирали період власних коливань оболонки у вакуумі  $T_s$ , радіус оболонки –  $R_s$ , густину оболонки –  $\rho_s$ . У цьому випадку лінійні величини і густини будуть мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_s &= 1, & u &= R_s \cdot \tilde{u}, & v &= R_s \cdot \tilde{v}, & w &= R_s \cdot \tilde{w}, \\ h &= R_s \cdot \tilde{h}, & R_b &= R_s \cdot \tilde{R}_b, & \tilde{\rho}_s &= 1, & \rho_l &= \rho_s \cdot \tilde{\rho}_l. \end{aligned} \quad (1)$$

Тоді формули переходу для різних фізичних і геометричних змінних до безрозмірних змінних виглядають так:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\rho_s R_s^2}{T_s^2} \tilde{P}, & \varepsilon_{ij} &= \tilde{\varepsilon}_{ij}, & \chi_{ij} &= \frac{1}{R_s} \tilde{\chi}_{ij}, & T_{ij} &= \frac{\rho_s R_s^3}{T_s^2} \tilde{T}_{ij}, \\ M_{ij} &= \frac{\rho_s R_s^4}{T_s^2} \tilde{M}_{ij}, & Q_i &= \frac{\rho_s R_s^3}{T_s^2} \tilde{Q}_i, \\ \sigma_{ij} &= \frac{\rho_s R_s^2}{T_s^2} \tilde{\sigma}_{ij}, & f &= \frac{R_s^2}{T_s} \tilde{f}, & E &= \frac{\rho_s R_s^2}{T_s^2} \cdot \tilde{E}. \end{aligned} \quad (2)$$

Динаміка газової порожнини (при  $0 < r < \tilde{R}_b$ ) визначається рівнянням балансу енергії [3, с. 72], яке при переході до безрозмірної форми набуває вигляду

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{4}{3} \pi \tilde{R}_b^3 \frac{d\tilde{P}_b}{dt} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \tilde{P}_b 4\pi \tilde{R}_b^2 \frac{d\tilde{R}_b}{dt} = \tilde{N}(t), \quad (3)$$

де  $\tilde{R}_b$ ,  $\tilde{P}_b$  – радіус порожнини та тиск у ній,  $\gamma$  – показник адіабати газу,  $\tilde{N}(t)$  – потужність енергії.

Граничні умови, що визначають взаємодію рідини і газової порожнини, у безрозмірному вигляді будуть

$$\tilde{P}_b = \tilde{P}^*, \quad \frac{d\tilde{R}_b}{d\tilde{t}} = \frac{d\tilde{f}^\ell}{d\tilde{r}} \Big|_{r=R_b}. \quad (4)$$

Тиск у рідині визначається рівнянням Коші – Лагранжа у безрозмірному вигляді:

$$\tilde{P} = \tilde{P}_0 - \tilde{\rho}_\ell \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{t}}. \quad (5)$$

Динаміка рідини (при  $\tilde{R}_b < r < \tilde{R}_s$ ) в акустичному наближенні визначається хвильовим рівнянням у сферичній системі координат:

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \tilde{t}^2} = C_1 \left[ \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r}^2 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{1}{\tilde{r}^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\tilde{r}^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2} \right], \quad (6)$$

де  $C_1 = c^2 \frac{T_s^2}{R_s^2}$  – безрозмірний комплекс.

Умови на границі рідини і оболонки запишемо як

$$\tilde{q}_3 = \tilde{P}^\ell \Big|_{r=1} - \tilde{P}^a \Big|_{r=1}, \quad \frac{d\tilde{w}}{d\tilde{t}} = \frac{d\tilde{f}^\ell}{d\tilde{r}} \Big|_{r=1}. \quad (7)$$

Динаміка пружної сферичної оболонки описується рівняннями її руху в сферичній системі координат [15] і визначає залежність переміщень  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{w}$  і кутів повороту  $\tilde{\theta}$ ,  $\tilde{\varphi}$  елементарної площинки оболонки від зусиль і моментів  $\tilde{T}_{ij}$ ,  $\tilde{Q}_i$ ,  $\tilde{M}_{ij}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{T}_{11}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{T}_{12}}{\partial \varphi} + (\tilde{T}_{11} - \tilde{T}_{22}) \operatorname{ctg} \theta + \tilde{Q}_1 + \tilde{q}_1 &= \tilde{h} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{t}^2}, \\ \frac{\partial \tilde{T}_{12}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{T}_{22}}{\partial \varphi} + 2\tilde{T}_{12} \operatorname{ctg} \theta + \tilde{Q}_2 + \tilde{q}_2 &= \tilde{h} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{t}^2}, \\ \frac{\partial \tilde{Q}_1}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{Q}_2}{\partial \varphi} + \tilde{Q}_1 \operatorname{ctg} \theta - \tilde{T}_{11} - \tilde{T}_{22} + \tilde{q}_3 &= -\tilde{h} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{t}^2}, \\ \frac{\partial \tilde{M}_{11}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{M}_{12}}{\partial \varphi} + (\tilde{M}_{11} - \tilde{M}_{22}) \operatorname{ctg} \theta &= \tilde{Q}_1 + \frac{\tilde{h}^3}{12} \frac{\partial^2 \tilde{\theta}^*}{\partial \tilde{t}^2}, \\ \frac{\partial \tilde{M}_{12}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{M}_{22}}{\partial \varphi} + 2\tilde{M}_{12} \operatorname{ctg} \theta &= \tilde{Q}_2 + \frac{\tilde{h}^3}{12} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}^*}{\partial \tilde{t}^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Систему (8) доповнюємо фізичними та геометричними співвідношеннями

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{11} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} + \tilde{w}, & \tilde{\varepsilon}_{22} &= \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \varphi} + \tilde{u} \operatorname{ctg} \theta + \tilde{w} \right), \\ \tilde{\varepsilon}_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \tilde{v} \operatorname{ctg} \theta \right), & \tilde{\varepsilon}_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{R}} - \tilde{u} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} \right), \\ \tilde{\varepsilon}_{23} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{R}} - \tilde{v} \right), & \tilde{\chi}_{11} &= \frac{\partial \theta^*}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\chi}_{12} &= \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \theta^*}{\partial \varphi} - \varphi^* \operatorname{ctg} \theta - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} \right), & \tilde{\chi}_{22} &= \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \varphi^*}{\partial \varphi} + \theta^* \operatorname{ctg} \theta \right), \\
\tilde{T}_{11} &= \frac{\tilde{E}\tilde{h}}{1-v^2} (\tilde{\varepsilon}_{11} + v\tilde{\varepsilon}_{22}), & \tilde{T}_{12} &= \frac{\tilde{E}\tilde{h}}{1+v} \tilde{\varepsilon}_{12}, \\
\tilde{T}_{22} &= \frac{\tilde{E}\tilde{h}}{1-v^2} (\tilde{\varepsilon}_{22} + v\tilde{\varepsilon}_{11}), & \tilde{M}_{11} &= \frac{\tilde{E}\tilde{h}^3}{12(1-v^2)} (\tilde{\chi}_{11} + v\tilde{\chi}_{22}), \\
\tilde{M}_{22} &= \frac{\tilde{E}\tilde{h}^3}{12(1-v^2)} (\tilde{\chi}_{22} + v\tilde{\chi}_{11}), & \tilde{M}_{12} &= \frac{\tilde{E}\tilde{h}^3}{12(1+v)} \tilde{\chi}_{12}, \\
\tilde{Q}_1 &= \frac{\tilde{E}\tilde{h}}{1+v} \tilde{\varepsilon}_{13}, & \tilde{Q}_2 &= \frac{\tilde{E}\tilde{h}}{1+v} \tilde{\varepsilon}_{23}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Умови на границі оболонка – газ записуємо як

$$\left. \frac{d\tilde{w}}{dt} = \frac{\partial \tilde{f}^a}{\partial \tilde{r}} \right|_{r=1}, \quad \tilde{P}^a \Big|_{r=1} = \tilde{q}_3 + \tilde{P}_0. \tag{10}$$

Умови на нескінченності для акустичного середовища мають вигляд

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial \tilde{f}^a}{\partial \tilde{r}} \pm ik\tilde{f}^a \right) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{f}^a = 0. \tag{11}$$

**2. Побудова розв'язку.** Для побудови розв'язку задачі застосовували метод скінченних різниць. У сферичній системі координат будували просторову сітку з фіксованим кроком  $\Delta r$  за радіальною координатою і за координатними кутами  $\Delta \theta$ ,  $\Delta \varphi$ . Крок за часом  $\Delta t$  визначали за критерієм стійкості Куранта – Фрідрікса – Леві.

Для побудови розв'язку динаміки газової порожнини (3) використовували двошаровий за часом метод Ейлера – Коші із застосуванням алгоритму, запропонованого в роботі [9], на кожному кроці за часом визначали радіус порожнини, її тиск і потенціал рідини на межі контакту з порожниною.

Розв'язки хвильового рівняння (6) і системи (8) отримували за допомогою тришарової схеми «хрест» за часом і геометричними шаблонами дискретизації [7, 17]. Перехід до дискретних аналогів у системі (8) дає змогу виразити переміщення оболонки  $u_{ij}^{n+1}$ ,  $v_{ij}^{n+1}$ ,  $w_{ij}^{n+1}$  та її кути повороту  $\theta_{ij}^{*n+1}$ ,  $\varphi_{ij}^{*n+1}$  у кожній точці області дискретизації через змінні на попередньому часовому шарі.

Для урахування геометричної нелінійності пульсацій порожнини при побудові розв'язку задачі для рухливої границі використовується підхід, запропонований в роботі [9], який дає можливість враховувати переміщення поверхні порожнини відносно вузлів просторової сітки розбиття з фіксованим геометричним кроком.

**3. Аналіз отриманих результатів.** Розглянемо замкнену сферичну сталеву оболонку радіуса  $R_s = 0.3$  м, товщини  $h = 1$  мм у зовнішньому газовому середовищі, динаміка якого визначається хвильовим рівнянням (6) та умовами (10), (11). Оболонка заповнена водою при атмосферному тиску. У початковий момент часу гідропружна система знаходиться в стані рівноваги, який порушується шляхом імпульсного вводу енергії  $E_0$  у газову порожнину радіуса  $R_{b0} = 1$  мм, яка розміщена у центрі системи, за час  $t_0 = 0.16$  мс (рис. 2). У подальшому всі результати наведено в безрозмірному вигляді.

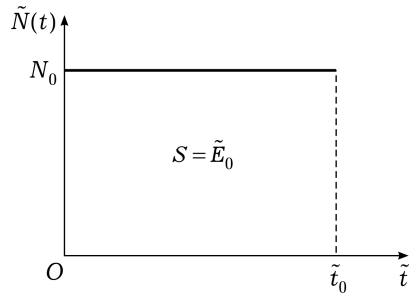


Рис. 2

При передачі енергії від рідини до оболонки, її серединна поверхня починає рухатись і в оболонці виникає напружений стан. Для випадку вільної оболонки переміщення є центрально-симетричними, тобто у фіксований час напруження у всіх точках оболонки однакові. Досліджено інтенсивність напружень для введеної енергії з діапазону  $\tilde{E} \in \{7 \cdot 10^{-9} \div 36.03 \cdot 10^{-9}\}$ , що відповідає енергіям 100÷500 Дж (рис. 3). При більших значеннях енергії порушується умова Губера – Мізеса текучості матеріалу оболонки, внаслідок чого виникають залишкові деформації, що суперечить сформульованим гіпотезам.

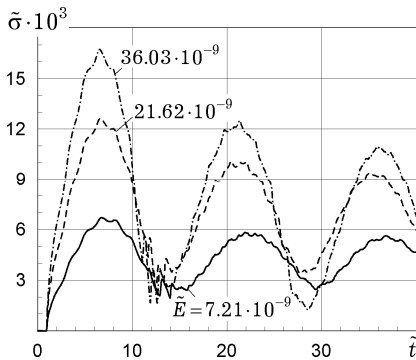


Рис. 3. Часові залежності напружень у вільній оболонці.

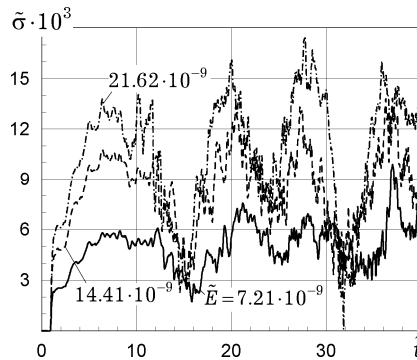


Рис. 4. Часові залежності напружень на границі області закріплення оболонки при  $\theta = \pi/20$ .

При центрально-симетричних пульсаціях оболонки на напруження впливають радіальні переміщення оболонки, які виникають під впливом гідродинамічних явищ у рідині – зміна тиску внаслідок пульсацій газової порожнини та проходження хвиль від порожнини до поверхні оболонки. Крім того, на величину напружень і динаміку оболонки впливають кавітаційні явища на межі поділу середовищ, які виникають при відриві рідини від оболонки. Алгоритм обчислення товщини шару відриву описано у роботі [8].

Закріплення поверхні оболонки значно впливає на її напружений стан. На рис. 4 – рис. 6 наведено динаміку зміни напружень, які виникають в оболонці внаслідок її жорсткого закріплення в точках  $M(\theta, \varphi)$  поверхні при  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  та  $0 \leq \theta \leq \pi/20$ .

Максимальні напруження спостерігали на границі області закріплення (рис. 4), порушення умови Губера – Мізеса порівняно з випадком центральної симетрії відбувається при значеннях введеної енергії, які перевищують 300 Дж. У точках, віддалених від області закріплення (рис. 5, рис. 6), амплітуда першої пульсації співмірна з амплітудою на границі закріплення, в подальшому характер та амплітуда напружень значно відрізняються.

Високочастотні складові пульсацій напруження виникають внаслідок хвильових явищ у рідині на межі поділу середовищ, пружних хвиль в оболонці та внаслідок кавітаційних явищ на межі поділу рідина – оболонка.

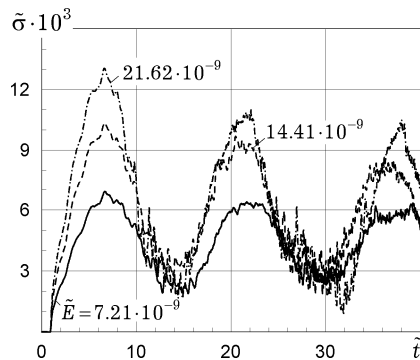


Рис. 5. Часові залежності напружень у частково закріпленій оболонці при  $\theta = \pi/2$ .

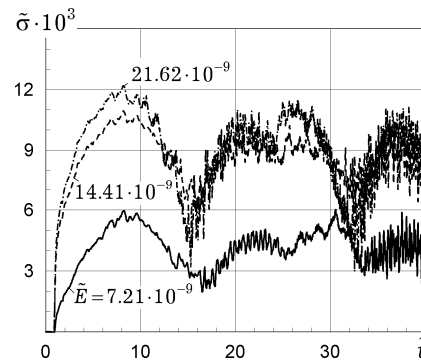


Рис. 6. Часові залежності напружень в оболонці при  $\theta = \pi$ .

Найбільша амплітуда високочастотних складових фіксується у південному полюсі оболонки (рис. 6), в якому відбуваються фокусування пружних хвиль, які розповсюджуються в оболонці, а також фокусування хвиль тиску в рідині при їх розповсюдженні уздовж рухливої поверхні оболонки від закріпленого північного полюса.

**Висновки.** У роботі досліджено напружено-деформований стан вільної та жорстко закріпленої в околі північного полюса оболонки. Одержано допустимі значення величини енергії, яка вводиться в гідропружну систему, коли рух оболонки відповідає гіпотезі пружних деформацій. Контроль за виконанням гіпотези пружності при відомому значенні границі текучості для сталеві оболонки виконується на основі критерію Губера – Мізеса.

Одержано залежності часової зміни напружень у безрозмірному вигляді для вільної і закріпленої оболонок при різних значеннях енергії, яку введено в гідропружну систему. З'ясовано чинники, що впливають на характер пульсацій напружень і виникнення високочастотних складових, що пов'язано з хвильовими явищами в оболонці (подовжні та поперечні хвилі) та рідині (проходження хвиль тиску від порожнини до поверхні оболонки, розповсюдження хвиль тиску вздовж поверхні оболонки та їх фокусування), кавітаційними явищами на границі рідина – оболонка (утворення відриву рідини від оболонки та його подальший колапс з утворенням сплеску тиску на границі).

1. Краковская Е. В. О приложении теории оболочек к некоторым задачам офтальмологии // Рос. журн. биомеханики. – 2006. – **10**, № 1. – С. 52–58.
2. Куропатенко В. Ф., Андреев Ю. Н. О моделировании динамических процессов в сферических и цилиндрических оболочках // Вычисл. механика сплошных сред. – 2010. – **3**, № 4. – С. 53–67.
3. Наугольных К. А., Рой Н. А. Электрические разряды в воде. – Москва: Наука, 1977. – 155 с.
4. Новожилов В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И. Линейная теория тонких оболочек. – Ленинград: Политехника, 1991. – 656 с.
5. Типяев А. С. О деформации сферической оболочки, заполненной несжимаемой жидкостью, при воздействии кругового растяжения по экватору // Рос. журн. биомеханики. – 2008. – **12**, № 2 (40). – С. 60–64.
6. Шептилевский А. В., Косенков В. М. Пульсации сферической оболочки с жидкостью при вводе энергии в центре // Прикл. гидромеханика. – 2014. – **16** (88), № 1. – С. 70–77.

7. Шептилевский А. В., Косенков В. М., Селезов И. Т. Трёхмерная модель гидроупругой системы, ограниченной сферической оболочкой // *Мат. методы та фіз.-мех. поля.* – 2012. – **55**, № 1. – С. 159–167.  
The same: Sheptilevskiy A. V., Kosenkov V. M., Selezov I. T. Three-dimensional model of a hydroelastic system bounded by a spherical shell // *J. Math. Sci.* – 2013. – **190**, No. 6. – P. 823–834.
8. Шептилевский А. В., Селезов И. Т., Косенков В. М. Динамическое контактное взаимодействие упругой сферической оболочки и заполняющей её жидкости с учётом кавитации // *Прикл. гідромеханіка.* – 2013. – **15** (87), № 2. – С. 73–84.
9. Шептилевский А. В., Селезов И. Т., Косенков В. М. Численное моделирование нелинейной динамики газовой сферической полости при ее начальных пульсациях в жидкости // *Прикл. гідромеханіка.* – 2015. – **17**, № 2. – С. 73–78.
10. Advani S. H., Lee Y. C. Free vibrations of fluid-filled spherical shells // *J. Sound Vib.* – 1970. – **12**, No. 4. – P. 454–462.
11. Ali E. Engin. Vibrations of fluid-filled spherical shells // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1969. – **46**, No. 1B. – P. 186–190.
12. Bai Mingsian R., Kuorung Wu. Free vibration of a thin spherical shell containing a compressible fluid // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1994. – **95**, No. 6. – P. 3300–3310.
13. Charalambopoulos A., Dassios G., Fotiadis D. I., Massalas C. V. Dynamic characteristics of the human skull-brain system // *Math. Comput. Model.* – 1998. – **27**, No. 2. – P. 81–101.
14. Fazalzadeh S. A., Ghavanloo E. Coupled axisymmetric vibration of nonlocal fluid-filled closed spherical membrane shell // *Acta Mech.* – 2012. – **223**, No. 9. – P. 2011–2020.
15. Prasad C. On vibrations of spherical shells // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1964. – **36**, No. 3. – P. 489–494.
16. Shah S. A., Tajuddin M. On axially symmetric vibrations of fluid filled poroelastic spherical shells // *Open J. Acoust.* – 2011. – **1**, No. 2. – P. 15–26.
17. Xi L., Cen Z., Chen J. A second-order finite difference scheme for a type of Black-Scholes equation // *Int. J. Nonlinear Sci. (WAU).* – 2008. – **6**, No. 3. – P. 238–245.

#### НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЧАСТИЧНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЖИДКОСТЬЮ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

*Исследуется напряженно-деформированное состояние замкнутой упругой сферической оболочки, заполненной идеальной сжимаемой жидкостью. Источником возбуждения системы является энергия, которая импульсно вводится в газовую полость в центре системы. Приведены гипотезы исследования задачи методом конечных разностей и сформулирована корректная математическая постановка задачи. Получены результаты изменения во времени величины напряжений как для случая свободной оболочки, так и для случая частичного жесткого закрепления её поверхности. Исследовано влияние жесткого закрепления на напряженно-деформированное состояние оболочки.*

#### STRESS STATE OF PARTIALLY CLAMPED FLUID-FILLED SPHERICAL SHELL UNDER IMPULSE EXCITATION

*The stress-strain state of a closed elastic spherical shell filled with ideal compressible fluid is studied. The source of excitation system is the energy that is input as pulsed injection into the gas cavity in the center of the system. The hypothesis for investigation of the problem by finite difference method are presented and the correct mathematical statement of the problem is formulated. The results of change in time of stress values are obtained both to the case of free shell and to the case of rigid fixing the part of its surface. The effect of a rigid fixing on the stress-strain state of the shell is examined.*

<sup>1</sup> Миколаїв. нац. аграрний ун-т, Миколаїв,

<sup>2</sup> Ін-т гідромеханіки НАН України, Київ

Одержано

11.10.15