УДК 539.3 + 517.5

М. А. Сухорольський

РОЗВ'ЯЗКИ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ОДНОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ КОМПЛЕКСНОЇ ПЛОЩИНИ

За допомогою конформних відображень однозв'язних областей на круг побудовано базиси у просторах функцій, аналітичних у цих областях. Отримані базисні функції біортогональні з многочленами Фабера. З використанням розвинення аналітичних функцій у ряди за системами базисних функцій побудовано розв'язки крайових задач для рівняння Гельмгольца, граничні значення яких збігаються з граничними значеннями цих функцій.

Вступ. Фізичні процеси, що розглядають у ряді прикладних наук, описують рівнянням Гельмгольца, гармонічним та бігармонічним рівняннями. Методи теорії аналітичних функцій, які ефективно використовують [3, 5, 7, 8] для розв'язання крайових задач для гармонічного та бігармонічного рівнянь, не можуть бути безпосередньо перенесені на крайові задачі для рівняння Гельмгольца. Розв'язки широкого класу задач для цього рівняння побудовано [1, 2, 4, 5, 11] методами інтегральних перетворень та Фур'є з використанням систем циліндричних і тригонометричних функцій, а також методами теорії потенціалів. У роботі [9] сформульовано загальний підхід до побудови розв'язків крайових задач для рівняння Гельмгольца, який ґрунтується на використанні розв'язків відповідних крайових задач для гармонічного рівняння. Заміняючи початкові змінні з використанням конформних відображень областей, в яких шукається розв'язок, на одиничний круг, одержано множини розв'язків рівняння Гельмгольца.

У цій роботі, використовуючи конформні відображення площини з криволінійним вирізом та області, близької до кругової, на круг побудовано системи функцій, які є базисами у просторах функцій, аналітичних у таких областях. Ґрунтуючись на розвиненнях аналітичних функцій у ряди за базисами, побудовано розв'язки крайових задач для рівняння Гельмгольца.

1. Загальний підхід до побудови розв'язків. Нехай $w = \varphi_0(z)$ – конформне відображення обмеженої однозв'язної області D_0 комплексної площини z на круг $K: |w| \le 1$ комплексної площини w; $L_0 = \partial D_0$ – замкнена гладка жорданова крива відображується на коло $C = \partial K$; $z = \varphi_0^{-1}(w)$ – обернене відображення; D – область, що доповнює область $\bar{D}_0$ до площини.

Запишемо рівняння Гельмгольца з використанням змінних $w = u + iv$, $\bar{w} = u - iv$:

$$4\frac{\partial^2 U}{\partial w \partial \bar{w}} + \alpha\left(w\frac{\partial U}{\partial w} + \bar{w}\frac{\partial U}{\partial \bar{w}}\right) + æ U = 0\,, \tag{1}$$

де

$$2\frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\,, \qquad 2\frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\,,$$

α, $æ$ – дійсні або комплексні сталі; $U = U(w, \bar{w})$ – комплекснозначна функція.

Множину розв'язків рівняння (1) у крузі K запишемо у вигляді [4, 9]

$$U = \sum_{m=0}^{\infty} c_m w^m J_m^*(w\bar{w})\,. \tag{2}$$

Тут

$$J_m^*(w\bar{w}) = J_m^*(|w|^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha_n^m\, |w|^{2n}}{2^{2n+m}(n+m)!\,n!}\,, \quad \alpha_n^m = \prod_{k=0}^{n-1}\left[(m+2k)\alpha + æ\right],$$

$n = 1, 2, \ldots$, $\alpha_0^m = 1$; c_m − довільні сталі. Функції $J_m^*(w\bar{w})$, якщо $\alpha = 0$ і $æ > 0$, безпосередньо виражаються через функції Бесселя m-го порядку: $J_m(\sqrt{æ}\,|w|) = (\sqrt{æ}\,|w|)^m J_m^*(|w|^2)$.

Перейдемо до нових змінних $z = \varphi_0^{-1}(w)$, $\bar{z} = \overline{\varphi_0^{-1}(w)}$. Оскільки $\varphi_0'(z) \neq 0$, $z \in D_0$, то одержимо таке рівняння:

$$4\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + a\left[\varphi_0(z)\overline{\varphi_0'(z)}\frac{\partial U}{\partial z} + \overline{\varphi_0(z)}\,\varphi_0'(z)\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}\right] + æ\varphi_0'(z)\overline{\varphi_0'(z)}\,U = 0. \tag{3}$$

Множину розв'язків рівняння (3) одержимо з (2) заміною змінних $w = \varphi_0(z)$, $\bar{w} = \overline{\varphi_0(z)}$:

$$U(z, \bar{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \varphi_0^m(z) J_m^*\left(\varphi_0(z)\overline{\varphi_0(z)}\right). \tag{4}$$

Розглянемо формулювання і побудову розв'язків крайових задач для рівняння (3), ґрунтуючись на поданні множини розв'язків цього рівняння у вигляді (4).

1.1. Розв'язок для круга. Запишемо розв'язок рівняння (1) в крузі $K : |w| < 1$ за умови

$$U(w, \bar{w})|_K = f(t), \qquad t \in C = \partial K, \tag{5}$$

де $f(t)$ − функція, що розвивається у рівномірно збіжний ряд:

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m t^m. \tag{6}$$

Зауваження 1. Якщо ряд за системою функцій, аналітичних у закритій області $\bar{G}$, рівномірно збігається на границі $L = \partial G$, то він рівномірно збігається в $\bar{G}$, його сума неперервна на L і є аналітичною в G функцією [5. с. 192]. Однією з достатніх умов рівномірної збіжності ряду функції $g(t)$ на L за системою функцій, аналітичних в області $\bar{G}$, є її приналежність до класу неперервних функцій Гельдера [5. с. 275].

Отже, з рівномірної збіжності ряду (6) випливає рівномірна збіжність цього ряду в $\bar{K}$, аналітичність функції $f(z)$ у крузі K і неперервність цієї функції на колі C.

Підставляючи вираз (2) в умову (5) з урахуванням зображення (6) і рівності $w\bar{w} = 1$, $w \in C$, одержимо

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{im\psi} J_m^*(1) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m e^{im\psi}.$$

Звідси знайдемо коефіцієнти $c_m = \dfrac{d_m}{J_m^*(1)}$ і запишемо розв'язок задачі:

$$U(w, \bar{w}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_m}{J_m^*(1)} w^m J_m^*(w\bar{w}).$$

Отже, розв'язок задачі задається у вигляді ряду за системою функцій $\{w^m J_m^*(w\bar{w})\}$. При цьому внаслідок обмеженості функції $J_m^*(|w|^2)$ і рівномірної збіжності ряду (6) в $\bar{K}$ одержаний ряд для $U(w, \bar{w})$ також збігається рівномірно в $\bar{K}$.

1.2. Розв'язок для зовнішності круга. Знайдемо обмежений у нескінченно віддаленій точці розв'язок рівняння (3) в області D (зовнішності одиничного круга з центром у початку координат) за умови

$$U(z,\bar{z})\big|_L = f(t), \qquad t \in L\,, \tag{7}$$

де $L = \partial D$ − коло, а $f(t)$ − функція, що розвивається у рівномірно збіжний ряд

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m \frac{1}{t^m}\,. \tag{8}$$

З рівномірної збіжності ряду (8) випливає рівномірна збіжність цього ряду в області $\bar{D}$, аналітичність функції $f(z)$ в D і її неперервність на L.

Маємо конформне відображення площини з круговим вирізом на одиничний круг

$$w = \varphi_0(z) = \frac{1}{z}\,.$$

Підставляючи вираз цього відображення у формулу (4), одержимо

$$U(z,\bar{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{z^m} J_m^*\left(\frac{1}{z\bar{z}}\right). \tag{9}$$

Перетворимо крайову умову (7) з урахуванням розвинень (8), (9) і залежності $t = e^{-i\psi}$, $0 \le \psi < 2\pi$, у точках границі:

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{im\psi} J_m^*(1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{im\psi}\,.$$

Звідси знайдемо, що $c_m = a_m / J_m^*(1)$, і запишемо розв'язок задачі

$$U(z,\bar{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{J_m^*(1)} \frac{1}{z^m} J_m^*\left(\frac{1}{z\bar{z}}\right).$$

Отже, розв'язок задачі (3), (7) в області D зображується рядом за системою функцій $\left\{z^{-m} J_m^*\left(|z|^{-2}\right)\right\}$. Рівномірна збіжність ряду в D випливає з обмеженості функцій $J_m^*\left(|z|^{-2}\right)$ і рівномірної збіжності ряду (8) у цій області.

2. Розв'язки для площини з криволінійним вирізом.

2.1. Базис у просторі аналітичних функцій. Нехай область D − площина з криволінійним вирізом, $L = \partial D$ − замкнена гладка жорданова крива. Конформне відображення області $\bar{D}$ на зовнішність одиничного круга $\bar{K} : |w| \ge 1$ задаємо функцією

$$w = \varphi(z) \equiv a_0 z \frac{z^k - a}{z^k - b}\,, \tag{10}$$

k − ціле число; $a_0 \ne 0$, a, b − параметри, які конкретизуємо для розглянутих нижче часткових випадків.

1°. Функцією

$$z = \varphi^{-1}(w) = w + \frac{\varepsilon}{w^N} \tag{11}$$

задається відображення зовнішності круга одиничного радіуса на площину з криволінійним отвором: *еліптичним* (з півосями $1 \pm \varepsilon$), якщо $N = 1$; *рівностороннім трикутним* із заокругленими кутами, якщо $N = 2$; *квадратним* із заокругленими кутами, якщо $N = 3$.

Знайдемо головну частину (відносно малого параметра ε) оберненого до (11) відображення $w = \varphi(z)$. Для $\varepsilon = 0$ відображення (11) стає тотожним перетворенням $w = z$. Підставимо $w = z + \omega$ у формулу (11) і знехтуємо величинами другого порядку відносно ε (величини ω і ε одного порядку), $0 = \omega(z+\omega)^N + \varepsilon$ або $\omega z^N + \varepsilon \approx 0$. Звідси знайдемо $\omega \approx -\varepsilon/z^N$ і, відповідно,

$$w \approx z\left(\frac{z^{N+1}-\varepsilon}{z^{N+1}}\right). \tag{12}$$

Отже, якщо у формулі (10) прийняти $a_0 = 1$, $a = \varepsilon$, $b = 0$ і $k = N+1$, то одержимо перетворення (12).

2°. Якщо у формулі (10) покласти $a_0 = 1 - kh^2/4$, $a = 1 + 2kh^2/(4 - kh^2)$ і $b = 1$, тоді вираз (10) стає головною частиною відносно малого параметра h [5, с. 154] відображення зовнішності одиничного круга (з центром у початку координат) з k відкинутими відрізками $1 \le |z| \le 1+h$, $\arg z = 2\ell\pi/k$, $\ell = 0,1,\dots,k-1$, на зовнішність одиничного круга $|w| > 1$ (за умови малості величини h). При цьому прообразом кола $K : |w| = 1$ є крива $L = \partial D$ (дещо змінене коло з вирізами із заокругленими кутами).

3°. Якщо у формулі (10) прийняти $a_0 = 1 - \sigma/(2\pi)$, $a = 1 + 2\sigma/(2\pi - \sigma)$, $b = 1$ і $k = 1$, тоді вираз (10) стає головною частиною відносно величини σ [5, с. 133] відображення зовнішності одиничного круга з центром у початку координат із вирізаною у точці $z = 1$ малою ділянкою (площа якої дорівнює σ) на зовнішність одиничного круга $|w| > 1$.

Зауваження 2. Для оберненого до (10) перетворення (що відповідає розглянутим випадкам ***1°–3°***) також можна використати головну його частину. Підставивши $z = w + \xi$ у формулу (10), маємо

$$w\big((w+\xi)^k - b\big) = a_0\big((w+\xi)^{k+1} - a(w+\xi)\big).$$

Знехтуємо у цьому виразі величинами другого порядку відносно ξ:

$$w^{k+1} + kw^k\xi - bw \approx a_0\big(w^{k+1} + (k+1)w^k\xi - aw - a\xi\big).$$

Звідси знайдемо

$$\xi \approx -w\frac{(a_0-1)w^k - (a_0a - b)}{(k(a_0-1)+a_0)w^k - aa_0}$$

і, відповідно,

$$z \approx w\frac{\big((k-1)(a_0-1)+a_0\big)w^k - b}{\big(k(a_0-1)+a_0\big)w^k - aa_0}. \tag{13}$$

Наприклад, для випадку ***1°***, коли $a_0 = 1$, $a = \varepsilon$, $b = 0$ і $k = N+1$, головною частиною оберненого до (11) перетворення згідно з (13) є

$$z \approx \frac{w^{k+1}}{w^k - \varepsilon} \approx w + \frac{\varepsilon}{w^k}.$$

Зауваження 3. Якщо прийняти $w = e^{-i\psi}$, то формула (13) визначає головну частини виразу параметричного рівняння кривої L (межі області D).

Побудуємо з використанням перетворення (10) базис у просторі функцій, аналітичних в області D. Система функцій $\{1/w^{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ – базис у просторі функцій, аналітичних у зовнішності одиничного круга [6, 10]. Відповідною асоційованою (спряженою) є система функцій $\{w^m\}_{m=0}^{\infty}$ з умовами біортогональності

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{w^m}{w^{n+1}}\,dw = \delta_{nm}. \tag{14}$$

Тут $\Gamma : |w| = r$, $r > 1$, – коло; δ_{nm} – символ Кронекера.

Підставляючи вираз $w = \varphi(z)$ (10) в умову біортогональності (14), одержимо такі два співвідношення:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^*}\frac{1}{\varphi^{n+1}(z)}\frac{d}{dz}\left(\frac{\varphi^{m+1}(z)}{m+1}\right)dz = \delta_{nm},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^*}\frac{\varphi'(z)}{\varphi^{n+1}(z)}\varphi^m(z)\,dz = \delta_{nm}, \tag{15}$$

де $\Gamma^* \subset D$ – прообраз кола Γ при відображенні (10).

Розглянемо систему функцій

$$\left\{g_n(z) = \varphi^{-(n+1)}(z) = \left(\frac{z^k - b}{a_0 z(z^k - a)}\right)^{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}, \qquad z \in D, \tag{16}$$

і знайдемо відповідну їй систему асоційованих функцій $\{\omega_m(z)\}_{m=0}^{\infty}$, аналітичних в околі нуля і таку, що

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^*} g_n(z)\omega_m(z)\,dz = \delta_{nm}. \tag{17}$$

Спочатку знайдемо розвинення функції $g_n(z)$ у ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки:

$$g_n(z) = \left(a_0 z\left(1 - \frac{a-b}{z^k - b}\right)\right)^{-(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{a_0^{n+1}z^{n+1}}\left(1 + \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{C_{n+\ell+1}^{n}(a-b)^{\ell+1}}{z^{k(\ell+1)}(1-b/z^k)^{\ell+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{a_0^{n+1}z^{n+1}}\left(1 + \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{q=\ell}^{\infty}\frac{C_{n+\ell+1}^{n}C_q^{\ell}b^{q-\ell}(a-b)^{\ell+1}}{z^{k(q+1)}}\right) =$$

$$= \frac{1}{a_0^{n+1}z^{n+1}}\left(1 + \sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{z^{kq}}\sum_{\ell=0}^{q-1}C_{n+\ell+1}^{n}C_{q-1}^{\ell}b^{q-\ell-1}(a-b)^{\ell+1}\right).$$

Запишемо цей ряд ще у такому вигляді:

$$g_n(z) = \frac{1}{z^{n+1}}\sum_{q=0}^{\infty}G_{n,q}\frac{1}{z^{kq}}, \tag{18}$$

де

$$G_{n,0} = \frac{1}{a_0^{n+1}}, \quad G_{n,q} = \frac{1}{a_0^{n+1}}\sum_{\ell=0}^{q-1}C_{n+\ell+1}^{n}C_{q-1}^{\ell}b^{q-\ell-1}(a-b)^{\ell+1}, \quad q = 1,\ldots .$$

Також знайдемо ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки для функції $\varphi^m(z)$:

$$\varphi^m(z) = \left(a_0 z\left(1 + \frac{1}{z^k}\frac{b-a}{1-b/z^k}\right)\right)^m =$$

$$= a_0^m z^m\left(1 + \sum_{\ell=0}^{m-1}C_m^{\ell+1}(b-a)^{\ell+1}\frac{1}{z^{k(\ell+1)}(1-b/z^k)^{\ell+1}}\right) =$$

$$= a_0^m\left(z^m + \sum_{\ell=0}^{m-1}\sum_{q=\ell}^{\infty}C_m^{\ell+1}C_q^{\ell}b^{q-\ell}(b-a)^{\ell+1}z^{m-k(q+1)}\right) =$$

$$= a_0^m \left(z^m + \sum_{\ell=0}^{m-1} \sum_{q=\ell}^{[(m/k)-1]} C_m^{\ell+1} C_q^{\ell} b^{q-\ell} (b-a)^{\ell+1} z^{m-k(q+1)} \right) + A\left(\frac{1}{z}\right) =$$

$$= a_0^m \left(z^m + \sum_{q=0}^{[(m/k)-1]} z^{m-k(q+1)} \sum_{\ell=0}^{q} C_m^{\ell+1} C_q^{\ell} b^{q-\ell} (b-a)^{\ell+1} \right) + A\left(\frac{1}{z}\right).$$

Тут $A(1/z)$ – правильна частина ряду Лорана; $[(m/k)-1]$ – ціла частина числа $m/k-1$, якщо це число додатне або нуль, і якщо воно від'ємне, то відповідний доданок у виразі головної частини ряду дорівнює нулеві.

Головна частина ряду

$$\Phi_m(z) = a_0^m \left(z^m + \sum_{q=0}^{[(m/k)-1]} z^{m-k(q+1)} \sum_{\ell=0}^{q} C_m^{\ell+1} C_q^{\ell} b^{q-\ell} (b-a)^{\ell+1} \right)$$

є многочленом Фабера m-го степеня першого роду для області D_0 [6].

Тепер знайдемо асоційовані з (16) функції, використавши ряд Лорана функції $\dfrac{1}{a_0(m+1)} \dfrac{d}{dz} \varphi^{m+1}(z)$ – другого множника у першій з формул (15). Головна частина ряду цієї функції – многочлен Фабера m-го степеня другого роду:

$$\omega_m(z) = \frac{1}{m+1} \frac{d}{dz} \Phi_{m+1}(z) =$$

$$= a_0^{m+1} \left(z^m + (b-a) \sum_{q=0}^{[(m/k)-1]} z^{m-k(q+1)} \frac{m+1-k(q+1)}{m+1} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{\ell=0}^{q} C_{m+1}^{\ell+1} C_q^{\ell} b^{q-\ell} (b-a)^{\ell} \right).$$

Оскільки розвинення (18) функції $g_n(z)$ не містить членів з додатними степенями змінної, у розвиненні другого множника першого зі співвідношень (15) визначальними є тільки доданки з додатними степенями змінної, і це співвідношення можна записати у вигляді (17). Тому асоційованою із системою (16) є система функцій

$$\left\{ \omega_m(z) = a_0^{m+1} \left(z^m + \sum_{q=0}^{[(m/k)-1]} g_{m,q} z^{m-k(q+1)} \right) \right\}_{m=0}^{\infty}, \qquad (19)$$

де

$$g_{m,q} = \frac{(b-a)(m+1-k(q+1))}{m+1} \sum_{\ell=0}^{q} C_{m+1}^{\ell+1} C_q^{\ell} b^{q-\ell} (b-a)^{\ell}.$$

Отже, системи функцій $\{g_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\omega_m(z)\}_{m=0}^{\infty}$ – біортогональні і для них виконуються співвідношення (17).

Теорема 1. *Якщо функція $g(z)$ аналітична в області D і обмежена у нескінченно віддаленій точці, то вона зображується у вигляді суми ряду*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(z), \qquad z \in D, \qquad (20)$$

де $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma^*} g(z) \omega_n(z)\, dz$.

Д о в е д е н н я. Відомо [6, с. 119], що функція, аналітична в області D_0 (яка доповнює область D до розширеної площини) розвивається у рівномірно збіжний ряд у цій області за системою многочленів Фабера $\{\omega_m(z)\}$, тобто система $\{\omega_m(z)\}$ − базис у просторі функцій, аналітичних в D_0, і $\{g_n(z)\}$ − система функцій, асоційована з базисними функціями. З цього твердження випливає [6, с. 615], що система функцій $\{g_n(z)\}$ − базис у просторі функцій, аналітичних в області D, а система многочленів $\{\omega_m(z)\}$ − система асоційованих функцій. Тому будь-яка функція, аналітична в D, розвивається у рівномірно збіжний ряд за системою функцій $\{g_n(z)\}$.

Якщо тепер помножити ряд (20) на асоційовані функції $\omega_m(z)$ і проінтегрувати по контуру Γ^* з урахуванням співвідношень (17), то одержимо вирази для коефіцієнтів цього ряду. ♦

Приклад 1. Розвинення степенів змінної для випадку $k=1$ мають вигляд

$$\frac{1}{z^{2p+1}} = \sum_{n=p}^{\infty} c_{2n} g_{2n}(z), \qquad \frac{1}{z^{2p+2}} = \sum_{n=p}^{\infty} c_{2n+1} g_{2n+1}(z),$$

де

$$c_{2n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^*} \frac{1}{z^{2p+1}} \omega_{2n}(z)\, dz = a_0^{2n+1} \begin{cases} g_{2n,2n-2p-1}, & n > p, \\ 1, & n = p, \end{cases}$$

$$c_{2n+1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^*} \frac{1}{z^{2p+2}} \omega_{2n+1}(z)\, dz = a_0^{2n+2} \begin{cases} g_{2n+1,2n-2p-1}, & n > p-1, \\ 1, & n = p. \end{cases}$$

Зауваження 4. Якщо скористатись другим зі співвідношень (15), то одержимо аналогічні до (17) співвідношення для біортогональних систем функцій

$$\left\{ g_n^*(z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi^{n+1}(z)} \right\}, \qquad \{\omega_m^*(z) = \Phi_m(z)\}. \tag{21}$$

При цьому [6, с. 616] система функцій $\{g_n^*(z)\}$ − базис у просторі функцій, аналітичних в області D, а система функцій $\{\omega_m^*(z)\}$ − базис у просторі функцій, аналітичних в області D_0.

2.2. Побудова розв'язку крайової задачі. Знайдемо обмежений у нескінченно віддаленій точці розв'язок рівняння (1) в області D за умови

$$U(z,\bar{z})\big|_L = f(t), \qquad t \in L, \tag{22}$$

де $f(t)$ − функція, що розвивається у рівномірно збіжний ряд за системою функцій (16):

$$f(t) = a + \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(t). \tag{23}$$

З умови рівномірної збіжності ряду (23) на L випливає рівномірна збіжність цього ряду в області $\bar{D}$, аналітичність функції $f(z)$ в області D і неперервність цієї функції на границі L.

Рівняння (1) в області D з урахуванням залежності $\varphi_0(z) = 1/\varphi(z)$ зводиться до рівняння (3). Множину розв'язків цього рівняння за аналогією з (4) знайдемо підстановкою виразу перетворення (10) у формулу (9):

$$U(z,\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\varphi^n(z)} J_n^* \left(\frac{1}{\varphi(z)\overline{\varphi(z)}} \right). \tag{24}$$

Підставимо вирази (23), (24) в умову (22). Якщо врахувати залежності $g_n(z) = 1/\varphi^{n+1}(z)$, $\varphi(z)\overline{\varphi(z)} = 1$, $\varphi(t) = w|_K = e^{-i\psi}$, $0 \le \psi < 2\pi$, то одержимо рівняння

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\varphi^n(t)} J_n^*(1) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\psi} J_n^*(1) = a + \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i(n+1)\psi} .$$

Звідси знайдемо, що $c_0 = a/J_0^*(1)$, $c_n = a_{n-1}/J_n^*(1)$, $n = 1,\dots$, і запишемо розв'язок задачі:

$$U(z,\bar{z}) = \frac{a}{J_0^*(1)} J_0^*\left(g_0(z)\overline{g_0(z)}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{J_n^*(1)} g_{n-1}(z) J_n^*\left(g_0(z)\overline{g_0(z)}\right). \qquad (25)$$

Підстановкою $z = t \in L$ і $z = \infty$ у формулу (25) з урахуванням розвинення (23) переконуємося у виконанні граничної умови (22) і обмеженості розв'язку в нескінченно віддаленій точці. Рівномірна збіжність ряду (25) в області $\bar{D}$ випливає з рівномірної збіжності ряду (23) і обмеженості функцій $J_n^*\left(|g_0(z)|^2\right)$, оскільки виконується нерівність $0 \le |g_n(z)| \le 1$.

Отже, розвинення (23) функції $f(z)$ за системою функцій (16) в області D безпосередньо визначає розв'язок задачі у вигляді ряду за системою функцій $\{g_{n-1}(z) J_n^*\left(g_0(z)\overline{g_0(z)}\right)\}$.

Приклад 2. Якщо $f(t) = e^{i\psi}$ і, відповідно, $f(t) = g_0(t)$, то $f(z) = g_0(z)$ і розв'язок рівняння Гельмгольца, що задовольняє умову $U(z,\bar{z})|_L = e^{i\psi}$, має вигляд

$$U(z,\bar{z}) = \frac{1}{J_1^*(1)} g_0(z) J_1^*\left(g_0(z)\overline{g_0(z)}\right).$$

Тут функція $g_0(z)$ задається формулою (16).

3. Розв'язки в обмеженій області.

3.1. Базис у просторі функцій, аналітичних в обмеженій області. Нехай D_0 – обмежена область з границею $L = \partial D_0$, яка є замкненою гладкою жордановою кривою. Конформне відображення області $\bar{D}_0$ на одиничний круг $\bar{K} : |w| \ge 1$ задаємо у вигляді

$$w = \varphi(z) \equiv a_0 z \frac{a - z^k}{b - z^k}, \qquad (26)$$

де k – ціле число; $a_0 \ne 0$, a, b – параметри, які конкретизуємо для розглянутих нижче часткових випадків.

1°. Якщо у формулі (26) покласти $a_0 = 1 - kh^2/4$, $a = 1 + 2kh^2/(4 - kh^2)$ і $b = 1$, тоді вираз (26) стає головною частиною відносно параметра h [5, с. 133] відображення одиничного круга з центром у початку координат з k відкинутими відрізками $1 - h \le |z| \le 1$, $\arg z = 2(\ell - 1)\pi/k$, $\ell = 1, 2\dots, k$, на круг $|w| > 1$ (за умови малості величини h). При цьому прообразом кола $K : |w| = 1$ є крива $L = \partial D$ (дещо змінене коло з вирізами із заокругленими кутами).

2°. Якщо у формулі (26) покласти $a_0 = 1 - \sigma/2\pi$, $a = 1 + 2\sigma/(2\pi - \sigma)$, $b = 1$ і $k = 1$, тоді вираз (26) стає головною частиною відносно величини σ [5, с. 141] відображення одиничного круга з центром у початку координат з вирізаною у точці $z = 1$ малою ділянкою (площа якої дорівнює σ) на одиничний круг $|w| < 1$.

Зауваження 5. Головна частина оберненого до (26) відображення задається формулою (13).

Знайдемо базис простору функцій, аналітичних в D_0. Система функцій $\{w^n\}_{n=0}^{\infty}$ – базис у просторі функцій, аналітичних в крузі одиничного радіуса. Відповідною асоційованою є система функцій $\{1/w^{m+1}\}_{m=0}^{\infty}$ з умовами біортогональності

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{w^n}{w^{m+1}}\,dw = \delta_{nm}, \tag{27}$$

де $\Gamma : |w| = r$, $r < 1$, – коло, обхід навколо якого здійснюється проти годинникової стрілки.

Підставляючи вираз перетворення (26) в умову біортогональності (27), одержимо такі два співвідношення:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^*}\varphi^n(z)\frac{\varphi'(z)}{\varphi^{m+1}(z)}\,dz = \delta_{nm},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^*}\frac{d}{dz}\frac{\varphi^{n+1}(z)}{n+1}\frac{1}{\varphi^{m+1}(z)}\,dz = \delta_{nm}, \tag{28}$$

де $\Gamma^* \subset D_0$ – прообраз кола Γ при відображенні (26).

Введемо систему функцій

$$\left\{g_n(z) = \varphi^n(z) = \left(\frac{a_0 z(a - z^k)}{b - z^k}\right)^n\right\}_{n=0}^{\infty}, \qquad z \in D_0, \tag{29}$$

і побудуємо відповідну їй систему асоційованих функцій.

Спочатку знайдемо розвинення функції $g_n(z)$ у ряд Тейлора в околі нульової точки:

$$g_n(z) = \left(a_0 z\left(1 + \frac{a-b}{b - z^k}\right)\right)^n = a_0^n z^n\left(1 + \sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{C_n^{\ell+1}(a-b)^{\ell+1}}{(b - z^k)^{\ell+1}}\right) =$$

$$= a_0^n z^n\left(1 + \sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{C_n^{\ell+1}C_{q+\ell}^{q}(a-b)^{\ell+1}}{b^{\ell+q+1}}z^{kq}\right) =$$

$$= a_0^n z^n\left(1 + \sum_{q=0}^{\infty}z^{kq}\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{C_n^{\ell+1}C_{q+\ell}^{\ell}(a-b)^{\ell+1}}{b^{\ell+q+1}}\right), \quad n \ge 0.$$

Подамо цей ряд також у такому вигляді:

$$g_n(z) = a_0^n z^n\sum_{q=0}^{\infty}R_{n,q}z^{kq}, \tag{30}$$

де

$$R_{n,0} = 1 + \sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{C_n^{\ell+1}(a-b)^{\ell+1}}{b^{\ell+1}} = \left(\frac{a_0 a}{b}\right)^n,$$

$$R_{n,q} = \sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{C_n^{\ell+1}C_{q+\ell}^{\ell}(a-b)^{\ell+1}}{b^{\ell+q+1}}, \qquad q = 1,\ldots.$$

Тепер побудуємо асоційовану з (30) систему функцій. Розглянемо ряд Лорана функції $\varphi^{-m}(z)$ в околі нуля і знайдемо головну його частину:

$$\varphi^{-m}(z) = \left(a_0 z\left(\frac{a-z^k}{b-z^k}\right)\right)^{-m} =$$

$$= \frac{1}{a_0^m z^m}\left(\frac{b-z^k}{a-z^k}\right)^m = \frac{1}{a_0^m z^m}\left(1+\frac{b-a}{a-z^k}\right)^m =$$

$$= \frac{1}{a_0^m z^m}\sum_{\ell=0}^{m-1} C_m^\ell (b-a)^\ell \frac{1}{(a-z^k)^\ell} =$$

$$= \frac{1}{a_0^m z^m}\left(1+\sum_{\ell=0}^{m-1} C_m^{\ell+1}(b-a)^{\ell+1}\frac{1}{(a-z^k)^{\ell+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{a_0^m z^m}\left(1+\sum_{\ell=0}^{m-1} C_m^{\ell+1}(b-a)^{\ell+1}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{C_{\ell+q}^q}{a^{\ell+q+1}} z^{kq}\right) =$$

$$= \frac{1}{a_0^m z^m}\left(1+\sum_{q=0}^{\infty} z^{kq}\sum_{\ell=0}^{m-1}\frac{C_m^{\ell+1}C_{\ell+q}^q(b-a)^{\ell+1}}{a^{\ell+q+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{a_0^m z^m}\left(1+\sum_{q=0}^{[(m-1)/k]} z^{kq}\sum_{\ell=0}^{m-1}\frac{C_m^{\ell+1}C_{\ell+q}^q(b-a)^{\ell+1}}{a^{\ell+q+1}}\right) + A(z).$$

Тут $A(z)$ − правильна частина ряду Лорана; $[m/k-1]$ − прийняте у формулі (18) позначення.

Одержаний многочлен за від’ємними степенями змінної має вигляд

$$F_m(z) = \frac{1}{a_0^m}\left(\frac{1}{z^m}+\sum_{q=0}^{[(m-1)/k]}\frac{1}{z^{m-kq}}\sum_{\ell=0}^{m-1}\frac{C_m^{\ell+1}C_{\ell+q}^q(b-a)^{\ell+1}}{a^{\ell+q+1}}\right)$$

або

$$F_m(z) = \frac{1}{a_0^m}\sum_{q=0}^{[(m-1)/k]} B_{m,q}\frac{1}{z^{m-kq}}. \tag{31}$$

Тут

$$B_{m,0} = 1+\sum_{\ell=0}^{m-1}\frac{C_m^{\ell+1}(b-a)^{\ell+1}}{a^{\ell+1}} = \left(\frac{b}{a}-1\right)^m,$$

$$B_{m,q} = \sum_{\ell=0}^{m-1}\frac{C_m^{\ell+1}C_{\ell+q}^q(b-a)^{\ell+1}}{a^{\ell+q+1}}, \qquad q \ge 1.$$

Знайдемо головну частину розвинення функції $-\frac{1}{m}\frac{d\varphi^{-m}(z)}{dz} = \varphi^{-(m+1)}(z)\varphi'(z)$:

$$\omega_m(z) = -\frac{1}{m}\frac{d}{dz}F_m(z) = \frac{1}{a_0^m}\left(\frac{1}{z^{m+1}}+\sum_{q=0}^{[(m-1)/k]}\frac{1}{z^{m-kq+1}}\frac{m-kq}{m}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{\ell=0}^{m-1}\frac{C_m^{\ell+1}C_{\ell+q}^q(b-a)^{\ell+1}}{a^{\ell+q+1}}\right), \quad m \ge 1.$$

Отже, для функцій системи $\{\omega_m(z)\}_{m=0}^{\infty}$ одержимо формули

$$\omega_0(z) = \frac{1}{z}, \qquad \omega_m(z) = \frac{1}{a_0^m} \sum_{q=0}^{[(m-1)/k]} S_{m,q} \frac{1}{z^{m-kq+1}}, \qquad m \geq 1, \tag{32}$$

де

$$S_{m,0} = 1 + \sum_{\ell=0}^{m-1} \frac{C_m^{\ell+1}(b-a)^{\ell+1}}{a^{\ell+1}} = \left(\frac{b}{a}\right)^m,$$

$$S_{m,q} = \frac{m-kq}{m} \sum_{\ell=0}^{m-1} \frac{C_m^{\ell+1} C_{\ell+q}^q (b-a)^{\ell+1}}{a^{\ell+q+1}}, \qquad q \geq 1.$$

Оскільки розвинення (30) функцій $g_n(z)$ не містять членів з від'ємними степенями змінної, перше зі співвідношень (28) виконується для систем функцій $\{g_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ і $\{\omega_m(z)\}_{m=0}^{\infty}$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^*} g_n(z) \omega_m(z)\, dz = \delta_{nm}, \tag{33}$$

тобто ці системи є біортогональними [9, 11].

Теорема 2. *Якщо функція $g(z)$ є аналітичною в області D_0, то вона зображується у вигляді суми ряду*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(z), \qquad z \in D, \tag{34}$$

де $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma^*} g(z) \omega_n(z)\, dz$.

Д о в е д е н н я теореми аналогічне до доведення теореми 1.

Помноживши ряд (34) на асоційовані функції (32) і проінтегрувавши по контуру Γ^*, одержимо вирази для коефіцієнтів цього ряду. ♦

Приклад 3. Розвинення степеневих функцій мають вигляд

$$z^{2p} = \sum_{n=p}^{\infty} a_{2n} g_{2n}(z), \qquad z^{2p+1} = \sum_{n=p}^{\infty} a_{2n+1} g_{2n+1}(z),$$

де

$$a_{2n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^*} z^{2p} \omega_{2n}(z)\, dz = \frac{S_{2n,2n-2p}}{a_0^{2n}},$$

$$a_{2n+1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^*} z^{2p+1} \omega_{2n+1}(z)\, dz = \frac{S_{2n+1,2n-2p-1}}{a_0^{2n+1}}.$$

Зауваження 6. Якщо скористатись другим зі співвідношень (28), то одержимо ще такі біортогональні в області D_0 системи функцій:

$$\left\{ g_n^*(z) = \frac{d}{dz} \frac{\varphi^{n+1}(z)}{n+1} \right\}, \qquad \{\omega_m^* = F_{m+1}(z)\}. \tag{35}$$

При цьому перша система є базисом у просторі функцій, аналітичних в області D_0, а друга − базис у просторі функцій, аналітичних в області D.

3.2. Побудова розв'язку крайової задачі. Знайдемо розв'язок рівняння (1) в області D_0 за умови

$$U(z, \bar{z})\big|_L = f(t), \qquad t \in L, \tag{36}$$

де $f(t)$ − функція, що розвивається у рівномірно збіжний ряд за системою функцій (29):

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(t). \tag{37}$$

З умови рівномірної збіжності ряду (37) випливає рівномірна збіжність цього ряду в області $\overline{D}$, аналітичність функції $f(z)$ в області D і неперервність цієї функції на границі L.

Виконавши заміну змінних у рівнянні (1) з використанням виразу відображення (26), одержимо відповідне рівняння (3) і множину його розв'язків (4) в області D_0, яку запишемо у вигляді

$$U(z,\overline{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi^n(z) J_n^*\left(\varphi(z)\overline{\varphi(z)}\right). \tag{38}$$

Коефіцієнти ряду (38) знайдемо з умови (36). Якщо підставити формули (37) і (38) в граничну умову і врахувати залежності $g_n(z) = \varphi^n(z)$, $\varphi(z)\overline{\varphi(z)} = 1$, $\varphi(t) = e^{i\psi}$, $0 \le \psi < 2\pi$, то одержимо рівняння

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\psi} J_n^*(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\psi}.$$

Звідси знайдемо, що $c_n = a_n / J_n^*(1)$ і запишемо розв'язок задачі

$$U(z,\overline{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{J_n^*(1)} g_n(z) J_n^*\left(\varphi(z)\overline{\varphi(z)}\right). \tag{39}$$

Безпосередньою підстановкою значень $z = t \in L$ у ряд (39) одержимо граничну умову (36). Рівномірна збіжність ряду (39) в області D_0 випливає з обмеженості функцій $J_n^*\left(\varphi(z)\overline{\varphi(z)}\right)$, оскільки $0 \le |\varphi(z)| \le 1$, $z \in D_0$, і рівномірної збіжності ряду (37).

Приклад 4. Якщо $f(t) = e^{i\psi}$ і, відповідно, $f(z) = g_1(z)$, то розв'язок рівняння (3), який задовольняє умову $U(z,\overline{z})|_L = e^{i\psi}$, має вигляд

$$U(z,\overline{z}) = \frac{1}{J_1^*(1)} g_1(z) J_1^*\left(\varphi(z)\overline{\varphi(z)}\right).$$

Якщо $f(t) \equiv 1$, то $f(z) = g_0(z) = 1$, і розв'язок цього рівняння є таким:

$$U(z,\overline{z}) = \frac{1}{J_0^*(1)} J_0^*\left(\varphi(z)\overline{\varphi(z)}\right).$$

Функція $J_0^*\left(\varphi(z)\overline{\varphi(z)}\right) = J_0^*\left(|\varphi(z)|^2\right)$ − функція Бесселя нульового порядку.

Висновки. У роботі побудовано розв'язки крайових задач Діріхле для рівняння Гельмгольца для двох випадків областей. Розглянутий підхід можна поширити на крайові задачі для цього рівняння в областях ширшого класу і, відповідно, інших конформних перетворень цих областей на круг чи зовнішність круга. Крім того, при побудові базисів у відповідних просторах аналітичних функцій природно виникають споріднені їм базиси (21) і (35), які можуть бути використані для побудови розв'язків крайових задач другого та третього роду для рівняння Гельмгольца.

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1981. – 512 с.
2. *Гузь А. Н., Луговой П. З., Шульга Н. А.* Конические оболочки, ослабленные отверстиями. – Киев: Наук. думка, 1976. – 162 с.
3. *Иванов В. И., Попов В. Ю.* Конформные отображения и их приложения. – Москва: Едиториал УРСС, 2002. – 324 с.
4. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – Москва: Наука, 1978. – 832 с.
   Те саме: *Korn G. A., Korn T. M.* Mathematical handbook for scientists and engineers. – Mineola (NY): Dover Publications, INC., 2000. – 1129 p.
5. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1987. – 688 с.
6. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций: В 2 т. – Том 2. Дальнейшее построение теории. – Москва: Наука, 1968. – 624 с.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.
8. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наук. думка, 1968. – 888 с.
9. *Сухорольський М. А.* Аналітичні розв'язки рівняння Гельмгольца // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур / Під заг. ред. І. О. Луковського, Г. С. Кіта, Р. М. Кушніра. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2014. – С. 160–163.
10. *Сухорольський М. А.* Розвинення функцій за системою поліномів, біортогональних на замкненому контурі з системою регулярних у нескінченно віддаленій точці функцій // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 2. – С. 238–254.
    Те саме: *Sukhorolsky M. A.* Expansion of functions in a system of polynomials biorthogonal on a closed contour with a system of functions regular at infinitely remote point // Ukr. Math. J. – 2010. – **62**, No. 2. – P. 268–288.
11. *Сухорольський М. А., Достойна В. В.* Один клас біортогональних систем функцій, які виникають при розв'язанні рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55,** № 2. – С. 52–62.
    Те саме: *Sukhorolsky M. A., Dostoyna V. V.* One class of biorthogonal systems of functions that arise in the solution of the Helmholtz equation in the cylindrical coordinate system // J. Math. Sci. – 2013. – **192**, No. 5. – P. 541–554.

РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

С использованием конформных отображений односвязных областей на круг построены базисы в пространствах функций, аналитических в этих областях. Полученные базисные функции биортогональны с многочленами Фабера. На основе разложений аналитических функций в ряды по системам базисных функций построены решения краевых задач для уравнения Гельмгольца, граничные значения которых совпадают с граничными значениями этих функций.

SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR HELMHOLTZ EQUATION IN SIMPLY CONNECTED DOMAINS OF COMPLEX PLANE

With the use of conformal mappings of simply connected domains onto the circle, the bases in the spaces of functions analytical in these domains are constructed. The obtained basic functions are biorthogonal with the Faber polynomials. Based on the expansions of analytical functions into series in systems of basic functions, the solutions of boundary value problems for the Helmholtz equation, boundary values of which coincide with the boundary values of these functions, are determined.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
26.02.14