УДК 539.3

О. Р. Грицина

УЗАГАЛЬНЕНА КОНТИНУАЛЬНО-ФЕНОМЕНОЛОГІЧНА МОДЕЛЬ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ: УРАХУВАННЯ ЛОКАЛЬНОГО ЗМІЩЕННЯ МАСИ

З використанням концепції локального зміщення маси як міри нелокальності стану фізично малого елемента тіла сформульовано замкнену систему співвідношень ґрадієнтного типу математичної моделі в'язкої стисливої рідини. У моделі враховано взаємозв'язок термомеханічних процесів із процесом локального зміщенням маси, а також його необоротність та інерційність. Показано, що одержана система співвідношень у стаціонарному наближенні дозволяє обґрунтувати виникнення розклинювального тиску у тонких прошарках рідини.

Вступ. Широке впровадження у техніку нових конструкційних матеріалів, у тому числі композитних і пористих, експлуатація їх в умовах високоінтенсивної зовнішньої дії, а також невпинний розвиток нанотехнологій стимулювали розробку нових узагальнених моделей механіки зв'язаних полів, які б коректно описували вплив мікроструктури матеріалу на його фізико-механічні властивості. Розвиток таких моделей стимулювало також виокремлення у межах класичної теорії поля класу задач, що виходили за межі області застосування цієї теорії. Йдеться про синґулярність поля напружень у дислокаціях, вершинах тріщин, гострих кутах і розрізах, точках дії зосереджених навантажень тощо. Класична теорія терпить невдачу у прогнозуванні поведінки коротких пружних хвиль. Наприклад, вона не описує високочастотну дисперсію поздовжніх механічних хвиль, не передбачає можливості поширення в однорідних ізотропних матеріалах ряду поверхневих хвиль (зокрема, SH-хвиль), незважаючи на їх експериментальне спостереження. Масштабний ефект модулів пружності, поверхневого натягу та межі міцності також не можна описати у межах класичної теорії поля. Усе це у комплексі стимулювало побудову нових узагальнених математичних моделей конденсованих середовищ, які мали за мету подолати перелічені вище неузгодженості між теорією та експериментом, а також відповідати запитам сучасної техніки.

У межах механіки зв'язаних полів значного розвитку набув континуально-феноменологічний підхід до розробки узагальнених, у тому числі нелокального типу, моделей механіки зв'язаних полів. Він ґрунтується на використанні методів механіки суцільного середовища, нерівноважної термодинаміки та варіаційних принципів. У континуально-феноменологічному підході можна виділити два основних напрямки розбудови нелокальної теорії конденсованих середовищ.

Один із них полягає у формулюванні математичних моделей середовищ простої структури. У таких моделях частинки тіла (фізично малі елементи) моделюють точками, наділеними масою. Єдиною кінематичною характеристикою є вектор зміщення $\mathbf{u}$. У математичних моделях середовищ простої структури враховують ефекти далекодії, тобто враховують вплив сусідніх точок на термодинамічний стан фіксованої точки тіла. Такий вплив описують введенням у простір параметрів стану ґрадієнтів тензора деформації першого чи вищих порядків [11, 18, 23, 24, 27, 29, 30] або постулюванням функціонального зв'язку між спряженими параметрами стану [13, 16].

У математичних моделях середовищ складної структури враховують вплив зміни мікроструктури матеріалу на його механічну поведінку. У таких моделях репрезентативний (фізично малий) елемент розглядають як тверде орієнтоване або мале деформівне тіло. При цьому беруть до уваги не лише центральну, але і моментну взаємодію. У кінематичний опис руху репрезентативного елемента, крім вектора переміщення $\mathbf{u}$, вводять мікроповороти та мікродеформації різних порядків, які характеризують внутрішні степені свободи. На основі таких вихідних положень, починаючи з 60-х років минулого століття аж до наших днів, у науковій літературі сформульовано ряд узагальнених (нелокального типу) теорій, у тому числі, мікрополярну теорію (*micropolar continuum*) [12, 14, 15], механіку мультиполярних континуумів (*multipolar continuum*) [19], теорію моментних напружень (*couple stress theory*) [21, 26, 32], теорію пружності Міндліна, що враховує мікроструктуру матеріалу (*theory of elastic solids with microstructure*) [25], мікроморфну теорію (*theory of micromorphic materials*) [14, 17, 22, 28, 31] та ін.

У 1987 році вийшла друком праця проф. Я. Й. Бурака [1], яка дала поштовх розвитку нового континуально-термодинамічного підходу до побудови ґрадієнтного типу моделей механіки зв'язаних полів. У цій праці нелокальність стану фізично малого елемента було запропоновано описувати шляхом урахування потоків маси, спричинених зміною структури цього елемента. Такі потоки маси (недифузійної і неконвективної природи) проф. Я. Й. Бурак пов'язав із процесом, який назвав локальним зміщенням маси. Він урахував, що зміна положення центра маси фізично малого елемента тіла за дії на нього неоднорідної сили може бути спричинена не тільки конвективним перенесенням цього елемента (зі швидкістю $\mathbf{v}_*$), але і зміною структури матеріалу у його межах. Наслідком таких змін структури є потік маси $\mathbf{J}_{ms}$, пов'язаний з вектором $\mathbf{\Pi}_m$ співвідношенням

$$\mathbf{\Pi}_m(\mathbf{r},t) = \int_0^t \mathbf{J}_{ms}(\mathbf{r},t')\,dt' \;\;\Rightarrow\;\; \mathbf{J}_{ms} = \frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t} \tag{1}$$

(розмірності густини масового дипольного моменту – кг · м/ м^3), який отримав назву вектора локального зміщення маси (див. рис. 1, де наведено зміну положення центра маси фізично малого елемента внаслідок локального зміщення маси, спричиненого упорядкуванням структури рідини). У працях [2–5, 9] з використанням континуально-термодинамічного підходу були розроблені основи локально ґрадієнтних теорій пружних твердих тіл і розчинів, електропровідних середовищ і неферомагнітних діелектриків. Було показано, що наслідком урахування локального зміщення маси та його взаємозв'язку з іншими процесами є нелокальні визначальні співвідношення. У підсумку це дозволило описати деякі ефекти, зокрема, приповерхневі і масштабні ефекти, які класична теорія не охоплює.

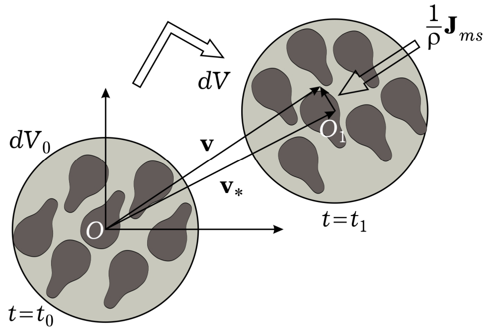

Рис. 1

Запропонований у праці [1] континуально-термодинамічний підхід до побудови нелокальних моделей механіки суцільних середовищ, який ґрунтується на врахуванні процесу локального зміщення маси, а також його необоротності та інерційності [3, 9], відкрили шлях до розбудови ґрадієнтного типу теорії деформування інших практично важливих матеріалів. Нижче з використанням цього підходу побудуємо математичну модель локально ґрадієнтної в'язкої рідини. При цьому врахуємо необоротність та інерцію локального зміщення маси та його взаємозв'язок із механічними і тепловими процесами.

Балансові співвідношення. Розглянемо в'язку стисливу рідину, у якій протікають фізико-механічні процеси, спричинені зовнішньою механічною чи тепловою дією. Основними є механічні та теплові процеси, що можуть супроводжуватися змінами структури матеріалу у межах фізично малого елемента тіла. Наприклад, переупорядкування структури можна споcтерігати у випадку прискореного руху рідини із молекулами несиметричної структури (зокрема, води).

Для опису локального зміщення маси введемо у розгляд вектор $\mathbf{J}_{ms}$ потоку маси, зумовленого зміщенням маси у межах фізично малого елемента тіла (див. рис. 1), та вектор локального зміщення маси $\mathbf{\Pi}_m$. Вважаємо, що ці вектори пов'язані формулою (1). Уведемо також густину наведеної маси $\rho_{m\pi}$ [3, 4], що має розмірність густини маси. Вимагаємо, щоб вектор $\mathbf{\Pi}_m$ локального зміщення маси та густина $\rho_{m\pi}$ справджували інтегральне співвідношення [3]

$$\int\limits_{(V)} \mathbf{\Pi}_m \, dV = \int\limits_{(V)} \rho_{m\pi} \mathbf{r} \, dV . \tag{2}$$

Наслідком формули (2) є [3]

$$\rho_{m\pi} = -\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_m . \tag{3}$$

Якщо формулу (3) продиференціювати за часом і врахувати (1), то одержимо рівняння балансу наведеної маси

$$\frac{\partial \rho_{m\pi}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{ms} = 0 . \tag{4}$$

Для опису процесу теплопровідності введемо у розгляд абсолютну температуру T, питому ентропію s і вектор густини потоку тепла $\mathbf{J}_q$. Ці величини задовольняють рівняння балансу ентропії, яке у локальній формі має вигляд [3, 6]

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q + \frac{1}{T} \mathbf{J}_q \cdot \nabla T + T\sigma_s + \rho \Re . \tag{5}$$

Тут ρ – густина маси, σ_s – виробництво ентропії, $\Re$ – густина потужності розподілених джерел тепла, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$ – оператор повної похідної за часом, $\mathbf{v}$ – вектор швидкості континууму центрів мас.

Записуючи рівняння балансу повної енергії, врахуємо, що процесу локального зміщення маси властива інерційність і пов'яжемо цю інерційність із деякою скалярною величиною d_m. Кінетичну енергію локального зміщення маси означимо аналогічно до кінетичної енергії поляризації, введеної Моженом [10]. Тоді повну енергію $\mathscr{E}$ системи у довільний момент часу означимо як суму внутрішньої енергії ρu, а також кінетичних енергій центра маси $\frac{1}{2}\rho \mathbf{v}^2$ і локального зміщення маси $\frac{1}{2}\rho d_m \left(\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}\right)^2$ [3, 9]:

$$\mathscr{E} = \rho u + \frac{1}{2}\rho \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}\rho d_m \left(\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}\right)^2 . \tag{6}$$

Тут

$$\boldsymbol{\pi}_m = \frac{\mathbf{\Pi}_m}{\rho} . \tag{7}$$

За такого означення повної енергії рівняння її балансу в інтегральній формі запишемо так:

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{(V)} \mathscr{E} \, dV = -\oint\limits_{(\Sigma)} \left[\mathscr{E}\mathbf{v} - \left(\hat{\mathbf{P}}_v - p\hat{\mathbf{I}}\right) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{J}_q + \mu \mathbf{J}_m + \mu_\pi \mathbf{J}_{ms} \right] \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma + \\ + \int\limits_{(V)} \left(\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \rho \Re\right) dV , \tag{8}$$

де

$$\mathbf{J}_m = \rho(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) . \tag{9}$$

Тут $\hat{\mathbf{P}}_v$ – тензор в'язких напружень, p – тиск, $\hat{\mathbf{I}}$ – одиничний тензор, μ – хімічний потенціал, μ_π – міра зміни внутрішньої енергії системи, зумовленої локальним зміщенням маси, $\mathbf{F}$ – масові сили, $\mathbf{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні (Σ), що обмежує область (V). Вектори $\mathbf{v}_*$, $\mathbf{v}$ та $\mathbf{J}_{ms}$ пов'язані виразом

$$\rho\mathbf{v} = \rho\mathbf{v}_* + \mathbf{J}_{ms}. \tag{10}$$

Наслідком співвідношень (1), (9) і (10) є формула

$$\mathbf{J}_m = -\frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t}. \tag{11}$$

Використовуючи теорему Остроґрадського – Ґаусса та формули (1) і (11), з огляду на довільність області (V) отримаємо таку локальну форму рівняння (8):

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\nabla \cdot [\mathbf{v}\mathcal{E}] + \nabla \cdot [(\hat{\mathbf{P}}_v - p\hat{\mathbf{I}}) \cdot \mathbf{v}] - \\ -\nabla \cdot \mathbf{J}_q - \nabla \cdot \left(\mu'_\pi \frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t}\right) + \rho\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \rho\Re .$$

Тут $\mu'_\pi = \mu_\pi - \mu$ – модифікований хімічний потенціал.

Якщо тензор в'язких напружень $\hat{\mathbf{P}}_v$ подати як суму

$$\hat{\mathbf{P}}_v = P_{v\ell}\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{P}}_{vt}, \tag{12}$$

де $P_{v\ell}\hat{\mathbf{I}}$ і $\hat{\mathbf{P}}_{vt}$ – складові тензора в'язких напружень, зумовлені відповідно зміною об'єму та форми, врахувати рівняння балансу ентропії (5) і формулу (3), то після перетворень одержимо таке рівняння балансу внутрішньої енергії:

$$\rho\frac{du}{dt} = \rho T\frac{ds}{dt} - p_*\frac{de}{dt} + \rho\mu'_\pi\frac{d\rho_m}{dt} - \rho\nabla\mu'_\pi \cdot \frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt} + P_{v\ell}\frac{de}{dt} + \\ + \hat{\mathbf{P}}_{vt} : \frac{d\hat{\boldsymbol{e}}^d}{dt} - \mathbf{J}_q \cdot \frac{\nabla T}{T} - \rho d_m \frac{d^2\boldsymbol{\pi}_m}{dt^2} \cdot \frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt} - T\sigma_s - \\ - \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v})\right)\left[u + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{d_m}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}\right)^2 - \rho_m\mu'_\pi + \right. \\ \left. + \nabla\mu'_\pi \cdot \boldsymbol{\pi}_m\right] + \mathbf{v}\cdot\left(-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \nabla p_* + \nabla\cdot\hat{\mathbf{P}}_v + \rho\mathbf{F}_*\right). \tag{13}$$

Тут

$$\hat{\boldsymbol{e}} = \frac{1}{2}\left[\nabla\otimes\mathbf{u} + (\nabla\otimes\mathbf{u})^\top\right], \qquad e = e_{ii} = \nabla\cdot\mathbf{u}, \qquad \hat{\boldsymbol{e}}^d = \hat{\boldsymbol{e}} - \frac{1}{3}e\hat{\mathbf{I}}, \tag{14}$$

$$\rho_m = \frac{\rho_{m\pi}}{\rho}, \tag{15}$$

$$p_* = p - \rho(\rho_m\mu'_\pi - \boldsymbol{\pi}_m\cdot\nabla\mu'_\pi), \tag{16}$$

$$\rho\mathbf{F}_* = \rho\mathbf{F} - \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{\pi}_m\otimes\nabla\mu'_\pi), \tag{17}$$

$\hat{\boldsymbol{e}}$ – тензор деформації, $\mathbf{u}$ – вектор переміщень, «$\otimes$» – символ діадного добутку, індекс «$\top$» означає операцію транспонування.

Зазначимо, що при отримання виразу (13) враховано формули

$$(\nabla\otimes\rho\pi_m)\cdot\nabla\mu'_\pi = \nabla\otimes(\rho\pi_m\cdot\nabla\mu'_\pi) - \rho\pi_m\cdot\nabla\otimes(\nabla\mu'_\pi),$$

$$\mu'_\pi\nabla(\rho\rho_m) = \rho\rho_m\nabla\mu'_\pi - \nabla(\rho\rho_m\mu'_\pi).$$

Рівняння (13) балансу внутрішньої енергії повинно бути інваріантним відносно просторових трансляцій, тобто його вигляд не може змінитися у випадку заміни $\mathbf{v}\to\mathbf{v}+\mathbf{a}$, де $\mathbf{a}$ – довільний сталий вектор [20]. Якщо в

(13) замінити $\mathbf{v}$ на $\mathbf{v}+\mathbf{a}$, від одержаного рівняння відняти рівняння (13) і врахувати довільність вектора $\mathbf{a}$, то у підсумку отримаємо балансове співвідношення для внутрішньої енергії

$$\rho\frac{du}{dt}=\rho T\frac{ds}{dt}-p_*\frac{de}{dt}+\rho\mu'_\pi\frac{d\rho_m}{dt}-\rho\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}-T\sigma_s+$$
$$+P_{v\ell}\frac{de}{dt}+\hat{\mathbf{P}}_{vt}:\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}^d}{dt}-\mathbf{J}_q\cdot\frac{\boldsymbol{\nabla}T}{T}-\rho d_m\frac{d^2\boldsymbol{\pi}_m}{dt^2}\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}, \qquad (18)$$

а також рівняння балансу механічного імпульсу та балансу маси

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\boldsymbol{\nabla}p_*+\boldsymbol{\nabla}\cdot\hat{\mathbf{P}}_v+\rho\mathbf{F}_*, \qquad (19)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v})=0. \qquad (20)$$

Для врахування необоротності локального зміщення маси подамо вектор $\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi$ як суму його оборотної $(\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi)^r$ і необоротної $(\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi)^i$ складових [9]:

$$\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi=(\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi)^r+(\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi)^i. \qquad (21)$$

З огляду на таке подання рівняння (18) набуде вигляду

$$\rho\frac{du}{dt}=\rho T\frac{ds}{dt}-p_*\frac{de}{dt}+\rho\mu'_\pi\frac{d\rho_m}{dt}-\rho(\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi)^r\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}+P_{v\ell}\frac{de}{dt}+$$
$$+\hat{\mathbf{P}}_{vt}:\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}^d}{dt}-\mathbf{J}_q\cdot\frac{\boldsymbol{\nabla}T}{T}-\rho\left[(\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi)^i+d_m\frac{d^2\boldsymbol{\pi}_m}{dt^2}\right]\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}-T\sigma_s. \qquad (22)$$

Із використанням перетворення Лежандра $f=u-Ts+(\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi)^r\cdot\boldsymbol{\Pi}_m$ перейдемо в рівнянні балансу внутрішньої енергії (22) до узагальненої вільної енергії Гельмгольца f. Прийнявши, що вільна енергія f визначається скалярними T, e, ρ_m та векторним $(\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi)^r$ параметрами, на основі (22) отримаємо узагальнене рівняння Гіббса

$$df=-sdT-\frac{1}{\rho}p_*de+\mu'_\pi d\rho_m+\boldsymbol{\pi}_m\cdot d(\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi)^r \qquad (23)$$

і вираз для виробництва ентропії

$$\sigma_s=-\mathbf{J}_q\cdot\frac{\boldsymbol{\nabla}T}{T^2}+P_{v\ell}\frac{1}{T}\frac{de}{dt}+\hat{\mathbf{P}}_{vt}:\frac{1}{T}\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}^d}{dt}-$$
$$-\rho\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}\cdot\frac{1}{T}\left[(\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi)^i+d_m\frac{d^2\boldsymbol{\pi}_m}{dt^2}\right]. \qquad (24)$$

Визначальні співвідношення. Враховуючи, що

$$f=f\left(T,e,\rho_m,(\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi)^r\right),$$

з рівняння Гіббса (23) одержимо

$$\left(\frac{df}{dT}+s\right)dT+\left(\frac{df}{de}+\frac{1}{\rho}p_*\right)de+\left(\frac{df}{d\rho_m}-\mu'_\pi\right)d\rho_m+$$
$$+\left(\frac{df}{d(\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi)^r}-\boldsymbol{\pi}_m\right)\cdot d(\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi)^r=0. \qquad (25)$$

З огляду на незалежність параметрів T, e, ρ_m і $(\boldsymbol{\nabla}\mu'_\pi)^r$ із виразу (25) для моделі в'язкої рідини маємо такі рівняння стану:

$$s=-\left.\frac{\partial f}{\partial T}\right|_{e,\rho_m,(\nabla\mu'_\pi)^r}, \qquad p_*=-\rho\left.\frac{\partial f}{\partial e}\right|_{T,\rho_m,(\nabla\mu'_\pi)^r},$$

$$\mu'_\pi = \left.\frac{\partial f}{\partial \rho_m}\right|_{T,e,(\nabla\mu'_\pi)^r}, \qquad \boldsymbol{\pi}_m = \left.\frac{\partial f}{\partial (\nabla\mu'_\pi)^r}\right|_{T,e,\rho_m}. \tag{26}$$

Згідно зі співвідношеннями (26) у простір параметрів стану, крім температури та кульової складової тензора деформації, які визначають термодинамічний стан в'язкої рідини у класичній термомеханіці, введено два нових параметри стану ρ_m і $(\nabla\mu'_\pi)^r$, які пов'язані з урахуванням локального зміщення маси. Обидва ці параметри містять просторові похідні, отже, отримано нелокальні визначальні співвідношення.

Якщо прийняти, що вільна енергія f в околі початкового стану є аналітичною функцією, і розкласти її в ряд за збуреннями параметрів стану для малих збурень, обмежуючись у цьому розвиненні квадратичними членами, то на основі формул (26) для ізотропної рідини отримаємо такі лінійні рівняння стану в явному вигляді:

$$p = -Ke + K\alpha_T(T - T_0) + K\alpha_\rho\rho_m, \tag{27}$$

$$s = s_0 + \frac{C_V}{T_0}(T - T_0) + \frac{1}{\rho_0}K\alpha_T e + \beta_{T\rho}\rho_m, \tag{28}$$

$$\mu'_\pi = \mu'_{\pi 0} + d_\rho\rho_m - \frac{1}{\rho_0}K\alpha_\rho e - \beta_{T\rho}(T - T_0), \tag{29}$$

$$\boldsymbol{\pi}_m = -\chi_m(\nabla\mu'_\pi)^r. \tag{30}$$

Тут K, α_T, α_ρ, C_V, $\beta_{T\rho}$, d_ρ, χ_m, $\mu'_{\pi 0}$ – характеристики рідини.

Кінетичні співвідношення для моделі в'язкої рідини запишемо, виходячи з виразу (24) для виробництва ентропії. Подамо його у вигляді

$$\sigma_s = \sum_{k=1}^{4} \mathbf{j}_k^{(n)} \overset{n}{\overbrace{\cdot\cdot}} \mathbf{X}_k^{(n)}, \tag{31}$$

де індекс n позначає валентність відповідного тензора і набуває значень 0, $1, 2$; $\mathbf{j}_k^{(n)}$, $\mathbf{X}_k^{(n)}$ – термодинамічні потоки та сили:

$$\hat{j}_1^{(0)} = P_{v\ell}, \quad X_1^{(0)} = \frac{1}{T}\frac{de}{dt}, \quad \hat{\mathbf{j}}_2^{(2)} = \hat{\mathbf{P}}_{vt}, \quad \hat{\mathbf{X}}_2^{(2)} = \frac{1}{T}\frac{d\hat{\mathbf{e}}^d}{dt},$$

$$\mathbf{j}_3^{(1)} = \mathbf{J}_q, \quad \mathbf{X}_3^{(1)} = -\frac{1}{T^2}\nabla T,$$

$$\mathbf{j}_4^{(1)} = \rho\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}, \quad \mathbf{X}_4^{(1)} = -\frac{1}{T}\left[(\nabla\mu'_\pi)^i + d_m\frac{d^2\boldsymbol{\pi}_m}{dt^2}\right]. \tag{32}$$

Прийнявши, що причиною виникнення термодинамічних потоків є термодинамічні сили, у лінійному наближенні отримаємо такі кінетичні рівняння:

$$\hat{j}_1^{(0)} = L_1\hat{X}_1^{(0)}, \quad \hat{\mathbf{j}}_2^{(2)} = L_2\hat{\mathbf{X}}_2^{(2)},$$
$$\hat{\mathbf{j}}_3^{(1)} = L_{33}\hat{\mathbf{X}}_3^{(1)} + L_{34}\hat{\mathbf{X}}_4^{(1)}, \quad \hat{\mathbf{j}}_4^{(1)} = L_{43}\hat{\mathbf{X}}_3^{(1)} + L_{44}\hat{\mathbf{X}}_4^{(1)}, \tag{33}$$

де L_1, L_2, L_{33}, L_{34}, L_{43}, L_{44} – кінетичні коефіцієнти.

Враховуючи принцип Онзагера [6] і позначення (32), кінетичні рівняння (33) запишемо як

$$P_{v\ell} = \eta_1\frac{\partial e}{\partial t}, \quad \hat{\mathbf{P}}_{vt} = \eta_2\frac{\partial\hat{\mathbf{e}}^d}{\partial t}, \tag{34}$$

$$\mathbf{J}_q = -\lambda\nabla T - \lambda_{T\pi}\left[(\nabla\mu'_\pi)^i + d_m\frac{\partial^2\boldsymbol{\pi}_m}{\partial t^2}\right], \tag{35}$$

$$\rho_0\frac{\partial\boldsymbol{\pi}_m}{\partial t} = -\lambda_\pi\left[(\nabla\mu'_\pi)^i + d_m\frac{\partial^2\boldsymbol{\pi}_m}{\partial t^2}\right] - \frac{\lambda_{T\pi}}{T_0}\nabla T. \tag{36}$$

Тут $\eta_1 = L_1/T_0$, $\eta_2 = L_2/T_0$ – коефіцієнти в'язкості рідини, $\lambda = L_{33}/T_0^2$ – коефіцієнт теплопровідності, $\lambda_{T\pi} = L_{34}/T_0$, $\lambda_\pi = L_{44}/T_0$, а також враховано, що для лінеаризованого наближення $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t}$.

З огляду на подання (21) і рівняння стану (30) вирази (35), (36) для потоків запишемо так:

$$\frac{\lambda_\pi}{\chi_m}\boldsymbol{\pi}_m + \rho_0\frac{\partial\boldsymbol{\pi}_m}{\partial t} + \lambda_\pi d_m\frac{\partial^2\boldsymbol{\pi}_m}{\partial t^2} = -\lambda_\pi\nabla\mu'_\pi - \frac{\lambda_{T\pi}}{T_0}\nabla T, \tag{37}$$

$$\mathbf{J}_q + \frac{\lambda_{T\pi}}{\chi_m}\boldsymbol{\pi}_m + \lambda_{T\pi} d_m\frac{\partial^2\boldsymbol{\pi}_m}{\partial t^2} = -\lambda\nabla T - \lambda_{T\pi}\nabla\mu'_\pi. \tag{38}$$

Зазначимо, що наявність у формулах (37), (38) перших за часом похідних від вектора локального зміщення маси зумовлена необоротністю локального зміщення маси. Похідні другого порядку $\dfrac{\partial^2\boldsymbol{\pi}_m}{\partial t^2}$ є наслідком інерційності цього процесу. Бачимо, що в результаті врахування інерційності та необоротності локального зміщення маси реологічного характеру набуває не тільки визначальне співвідношення для вектора $\boldsymbol{\pi}_m$, але і співвідношення для вектора потоку тепла $\mathbf{J}_q$.

Балансові рівняння (4), (5), (19), (20), вираз для виробництва ентропії (24) разом із фізичними (26), (33) і геометричними (14) співвідношеннями, а також формулами (1), (7) і (15) складають замкнену систему нелінійних рівнянь ґрадієнтного типу математичної моделі, що описує термомеханічні процеси у в'язкій рідині з урахуванням необоротності та інерційності локального зміщення маси. У випадку лінійного наближення балансові рівняння (4), (5), (19) і (20) слід лінеаризувати, а визначальні співвідношення (26), (33) замінити формулами (27)–(29), (34), (37) і (38).

Лінеаризована розв'язувальна система рівнянь для ізотропної в'язкої рідини. Запишемо розв'язувальну систему рівнянь моделі для фізично та геометрично лінійної ізотропної стисливої рідини. Для простоти обмежимося ізотермічним наближенням.

Якщо за ключові функції вибрати вектор переміщення $\mathbf{u}$ та збурення потенціалу $\tilde{\mu}'_\pi$, то розв'язувальна система рівнянь буде такою:

$$\bar{K}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) - \frac{K\alpha_\rho}{d_\rho}\nabla\tilde{\mu}'_\pi + \rho_0\mathbf{F} =$$

$$= \rho_0\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} - \frac{1}{2}\eta_2\frac{\partial\Delta\mathbf{u}}{\partial t} - \left(\eta_1 + \frac{1}{6}\eta_2\right)\frac{\partial\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})}{\partial t}, \tag{39}$$

$$\Delta\tilde{\mu}'_\pi - \lambda_\mu^2\tilde{\mu}'_\pi - \lambda_\mu^2\tau_\pi\frac{\partial\tilde{\mu}'_\pi}{\partial t} - \frac{d_m}{d_\rho}\frac{\partial^2\tilde{\mu}'_\pi}{\partial t^2} =$$

$$= \frac{K\alpha_\rho}{\rho_0}\left(\lambda_\mu^2\nabla\cdot\mathbf{u} + \lambda_\mu^2\tau_\pi\frac{\partial(\nabla\cdot\mathbf{u})}{\partial t} + \frac{d_m}{d_\rho}\frac{\partial^2(\nabla\cdot\mathbf{u})}{\partial t^2}\right). \tag{40}$$

Тут

$$\lambda_\mu^2 = \frac{1}{d_\rho\chi_m}, \qquad \tau_\pi = \frac{\chi_m\rho_0}{\lambda_\pi}, \qquad \bar{K} = K - \frac{K^2\alpha_\rho^2}{\rho_0 d_\rho}.$$

λ_μ^{-1} – характерна віддаль, τ_π – час релаксації,

Бачимо, що врахування необоротності та інерційності локального зміщення маси не вплинуло на рівняння руху (39), тоді як рівняння для модифікованого потенціалу $\tilde{\mu}'_\pi$, на відміну від отриманого раніше у праці [4], містить часові похідні від ключових функцій. Якщо знехтувати необоротністю та інерційністю локального зміщення маси, то рівняння (40) спроститься і набуде вигляду

$$\Delta\tilde{\mu}'_\pi - \lambda_\mu^2\tilde{\mu}'_\pi = \lambda_\mu^2 \frac{K\alpha_\rho}{\rho_0}\nabla\cdot\mathbf{u}. \tag{41}$$

Розклинювальний тиск. Експериментально встановлено, що у тонких рідких плівках (прошарках завтовшки у $5-10$ нм [8]) виникає розклинювальний тиск. Поняття розклинювального тиску у рідких плівках було введене Б. В. Дерягіним [7]. Під ним розуміють надлишковий тиск, який виникає у тонкій плівці, порівняно з тиском в об'ємній фазі, з якої утворено плівку. Цей тиск вводили як різницю між тиском на поверхні тонкої плівки і тиском в об'ємній фазі, з якої утворено тонку плівку шляхом повільного зменшення її товщини [8]. Покажемо, що сформульована тут локально ґрадієнтна модель в'язкої рідини, на відміну від класичної теорії, дозволяє обґрунтувати появу розклинювального тиску у тонких плівках. Для цього з використанням системи рівнянь (39), (41) визначимо рівноважний розподіл тиску p і потенціалу $\tilde{\mu}'_\pi$ у тонкому безмежному ізотропному шарі рідини, що займає область $|x| \le \ell$. Вважаємо, що поверхні шару $x = \pm\ell$ защемлені, тобто $u(\pm\ell) = 0$. Дію твердих стінок змоделюємо такими крайовими умовами на модифікований хімічний потенціал: $\tilde{\mu}'_\pi(\pm\ell) = \mu_{\pi a}$, де $\mu'_{\pi a}$ – задане значення.

З використанням розв'язку системи рівнянь (39), (41) і формул (27), (29) для стаціонарного наближення отримаємо такий вираз для тиску у рідкій плівці:

$$p = \frac{\mu'_{\pi a} K\alpha_\rho (1+\mathfrak{M})}{d_\rho\left[\breve{\lambda}\ell\,\mathrm{cth}(\breve{\lambda}\ell) + \mathfrak{M}\right]}, \tag{42}$$

де $\mathfrak{M} = \dfrac{K^2\alpha_\rho^2}{\rho_0 d_\rho \bar{K}}$ – малий параметр [3], $\breve{\lambda}^2 = \lambda_\mu^2(1+\mathfrak{M})$.

Для товстих плівок $\breve{\lambda}\ell \gg 1$, тому $\mathrm{th}(\breve{\lambda}\ell)/\breve{\lambda}\ell \to 1/(2\breve{\lambda}\ell) \to 0$ у міру збільшення товщини плівки. Оскільки $\mathfrak{M} \ll 1$ [3], то на основі (42) для товстих шарів маємо, що $p \to \dfrac{\mu'_{\pi a}K\alpha_\rho}{2d_\rho\breve{\lambda}\ell} \underset{\breve{\lambda}\ell\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Отже, у товстих шарах рідини тиск відсутній. Однак у тонких прошарках (товщина яких сумірна з характерною віддаллю $\ell_* = \lambda_\mu^{-1}$) при зменшенні їх товщини тиск зростає: $p \to$ $\to p_0$, прямуючи до $p_0 = \mu'_{\pi a}K\alpha_\rho/d_\rho$ (див. рис. 2, де $\xi = \breve{\lambda}\ell$ – безрозмірна координата). Отже, розклинювальний тиск може суттєво впливати на стійкість і міцність тонких рідких плівок.

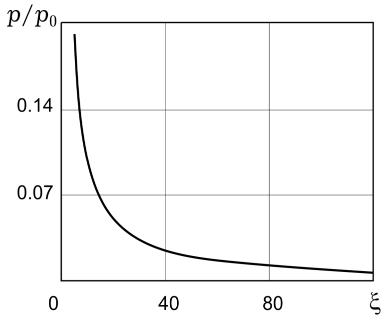

Рис. 2

Висновки. Із застосуванням континуально-термодинамічного підходу до побудови узагальнених математичних моделей конденсованих середовищ сформульовано локально ґрадієнтну модель термомеханічних процесів у в'язкій стисливій рідині. Показано, що наслідком врахування локального зміщення маси та його взаємозв'язку з термомеханічними процесами є нелокальні визначальні співвідношення. З'ясовано також, що врахування необоротності та інерційності локального зміщення маси призводить до нелокальних реологічних визначальних співвідношень для векторів локального зміщення маси та потоку тепла. Замкнена система рівнянь, яка відповідає розробленій моделі, може бути корисна для вивчення закономірностей зв'язаних полів і процесів у в'язкій рідині за її прискореного руху чи швидкозмінної зовнішньої дії. Показано, що у стаціонарному наближенні ця система рівнянь описує розмірні ефекти, зокрема, обґрунтовує появу розклинювального тиску у тонких прошарках в'язкої рідини.

1. *Бурак Я. Й.* Визначальні співвідношення локально-градієнтної термомеханіки // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1987. – № 12. – С. 19–23.
2. *Бурак Я. Й., Кондрат В. Ф., Грицина О. Р.* Математичне моделювання механотермодифузійних процесів у твердих розчинах при врахуванні локального зміщення маси // Доп. НАН України. – 2007. – № 3. – С. 59–64.
3. *Бурак Я., Кондрат В., Грицина О.* Основи локально ґрадієнтної теорії діелектриків. – Ужгород: Поліграфцентр «Ліра», 2011. – 208 с.
4. *Грицина О., Кондрат В.* Термомеханічні процеси у в'язкій рідині з урахуванням локального зміщення маси // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2006. – Вип. 4. – С. 39–46.
5. *Грицина О., Нагірний Т., Червінка К.* Локально ґрадієнтний підхід у термомеханіці // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2006. – Вип. 3. – С. 72–83.
6. *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. – Москва: Мир, 1964. – 456 с.
7. *Дерягин Б. В., Чураев Н. В.* К вопросу об определении понятия расклинивающего давления и его роли в равновесии и течении тонких пленок // Коллоид. журн. – 1976. – **38**, № 3. – С. 438-448.
8. *Дерягин Б. В, Чураев Н. В.* Смачивающие пленки. – Москва: Наука, 1984. – 160 с.
9. *Кондрат В. Ф., Грицина О. Р.* Співвідношення ґрадієнтної термомеханіки за врахування необоротності та інерційності локального зміщення маси // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54,** № 1. – С. 91–100.
   Те саме: *Kondrat V. F., Hrytsyna O. R.* Relations of gradient thermomechanics taking into account the irreversibility and inertia of local mass displacement // J. Math. Sci. – 2012. – **183**, No. 1. – P. 100–111.
10. *Можен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред. – Москва: Мир, 1991. – 560 с.
11. *Ashoori A., Mahmoodi M. J.* The modified version of strain gradient and couple stress theories in general curvilinear coordinates // Eur. J. Mech. **A**-Solids. – 2015. – **49**. – P. 441–454.
12. *Eremeyev V. A., Lebedev L. P., Altenbach H.* Foundations of micropolar mechanics. – Berlin: Springer, 2013. – x+142 p.
13. *Eringen A. C.* Nonlocal continuum field theories. – New York: Springer–Verlag, 2002. – 376 p.
14. *Eringen A. C.* Microcontinuum field theories. I. Foundations and solids. – New York: Springer-Verlag, 1999. – 325 p.
15. *Eringen A. C.* Linear theory of micropolar elasticity // J. Math. Mech. – 1966. – **15**. – P. 909–923.
16. *Eringen A. C., Edelen D. G. B.* On nonlocal elasticity // Int. J. Eng. Sci. – 1972. – **10**, No. 3. – P. 233–248.
17. *Eringen A. C., Suhubi E. S.* Nonlinear theory of simple microelastic solids – I // Int. J. Eng. Sci. – 1964. – **2**, No. 2. – P. 189–203.
18. *Forest S., Cordero N. M., Busso E. P.* First vs. second gradient of strain theory for capillarity effects in an elastic fluid at small length scales// Comput. Mater. Sci. – 2011. – **50**, No. 4. – P. 1299–1304.
19. *Green A. E., Rivlin R. S.* Multipolar continuum mechanics // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1964. – **17**, No. 2. – P. 113–147.
20. *Green A. E., Rivlin R. S.* On Cauchy's equations of motion // Z. angew. Math. Phys. – 1964. – **15**, No. 3. – P. 290–292.
21. *Huang C.-L.* The energy function for crystal materials with couple stresses // Int. J. Eng. Sci. – 1969. – **7**, No. 12. – P. 1221–1229.
22. *Lazar M., Anastassiadis C.* Lie point symmetries and conservation laws in microstretch and micromorphic elasticity // Int. J. Eng. Sci. – 2006. – **44**, No. 20. – P. 1571–1582.

23. *Lazar M., Maugin G. A., Aifantis E. C.* Dislocations in second strain gradient elasticity // Int. J. Solids Struct. – 2006. – **43**, No. 6. – P. 1787–1817.
24. *Mindlin R. D.* Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity // Int. J. Solids Struct. – 1965. – **1**, No. 4. – P. 417–438.
25. *Mindlin R. D.* Micro-structure in linear elasticity // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1964. – **16**, No. 1. – P. 51–78.
26. *Mindlin R. D., Tiersten H. F.* Effects of couple-stresses in linear elasticity // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1962. – **11**, No. 1. – P. 415-448.
27. *Mindlin R. D., Eshel N. N.* On first strain-gradient theories in linear elasticity // Int. J. Solids Struct. – 1968. – **4**, No. 1. – P. 109–124.
28. *Neff P., Ghiba I.-D., Madeo A., Placidi L., Rosi G.* A A unifying perspective: the relaxed linear micromorphic continuum // Continuum Mech. Thermodyn. – 2014. – **26**, No 5. – P. 639–681.
29. *Ojaghnezhad F., Shodja H. M.* A combined first principles and analytical determination of the modulus of cohesion, surface energy, and the additional constants in the second strain gradient elasticity // Int. J. Solids Struct. – 2013.– **50**, No. 24. – P. 3967–3974.
30. *Polizzotto C.* A hierarchy of simplified constitutive models within isotropic strain gradient elasticity // Eur. J. Mech. **A**-Solids. – 2017. – **61**. – P. 92–109.
31. *Romano G., Barretta R., Diaco M.* Micromorphic continua: non-redundant formulations // Continuum Mech. Thermodyn. – 2016. – **28**, No. 6. – P. 1659–1670.
32. *Toupin R. A.* Elastic materials with couple-stresses // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1962. – **11**, No 1. – P. 385–414.

ОБОБЩЕННАЯ КОНТИНУАЛЬНО-ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ: УЧЕТ ЛОКАЛЬНОГО СМЕЩЕНИЯ МАССЫ

С использованием концепции локального смещения массы в качестве меры нелокальности состояния физически малого элемента тела сформулирована замкнутая система уравнений градиентного типа математической модели вязкой сжимаемой жидкости. В модели учитывается взаимосвязь термомеханических процессов с процессом локального смещения массы, а также его необратимость и инерционность. Показано, что полученная система уравнений в стационарном приближении позволяет объяснить возникновение расклинивающего давления в тонких жидких прослойках.

A GENERALIZED CONTINUUM PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR VISCOUS LIQUID: ACCOUNTING LOCAL MASS DISPLACEMENT

Using a conception of a local mass displacement as a measure of nonlocality of the state of physically small element, the closed system of equations of gradient-type model for viscous compressible liquid is formulated. In the model is taken into account the interaction of thermomechanical processes with process of the local mass displacement as well as its irreversibility and inertia. It is shown that the obtained system of equations in stationary approximation enables us to explain the occurrence of disjoining pressure in thin liquid layers.

Центр мат. моделювання
Ін-ту прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
13.10.15