УДК 517.9

Ж. А. Токибетов, Г. Е. Абдуахитова, А. С. Сарсекеева

МНОГОМЕРНЫЕ АНАЛОГИ СИСТЕМЫ КОШИ – РИМАНА И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИХ РЕШЕНИЯ ЧЕРЕЗ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

На сегодня существует значительное количество многомерных обобщений голоморфных векторов. Самым общим является четырехмерное обобщение системы Коши – Римана. В данной работе с помощью введения в рассмотрение двух кватернионных функций и кватернионного дифференцирования впервые получено пятимерное обобщение голоморфного вектора. С использованием представления голоморфного вектора через кватернионную гармоническую функцию и ее производные рассмотрены задача Римана – Гильберта и одна задача в слое. Получено решение задачи Римана – Гильберта в пятимерном полупространстве.

Для того чтобы однозначная функция $w = u + iv$, заданная в области $D \in \mathbb{R}^2$, была голоморфной, необходимо и достаточно, чтобы ее действительная и мнимая части удовлетворяли равенствам

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

Система [9]

$$\begin{aligned} &u_x + v_y + w_z = 0, \qquad s_x - v_z + w_y = 0, \\ &s_y + u_z - w_x = 0, \qquad s_z - u_y + v_x = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

считается трехмерным обобщением системы (1). Так как каждая из функций s, u, w, v является гармонической функцией, решения этой системы в литературе называют голоморфными векторами, а системы (1) и (2) соответственно называют системой Коши – Римана и системой Моисила – Теодореску.

Система (2) построена в [7] следующим образом. Известно, что градиент решения $U(x,y,z)$ уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \tag{3}$$

т. е. $\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) = (u, v, w)$, удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} &u_x + v_y + w_z = 0, \qquad -v_z + w_y = 0, \\ &u_z - w_x = 0, \qquad -u_y + v_x = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Введем четвертую искомую функцию s таким образом, чтобы полученная система

$$\begin{aligned} &u_x + v_y + w_z = 0, \qquad s_x - v_z + w_y = 0, \\ &s_y + u_z - w_x = 0, \qquad s_z - u_y + v_x = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

была системой эллиптического типа и в результате получим систему Моисила – Теодореску (2).

Если в каждое уравнение системы (5) добавим слева соответственно $-s_t$, u_t, v_t, w_t, чтобы полученная система также оставалась системой эллиптического типа, то получим систему, которая встречается в теории голоморфного кватерниона:

$$\begin{aligned} &s_t - u_x - v_y - w_z = 0, \qquad u_t + s_x - v_z + w_y = 0, \\ &v_t + s_y + u_z - w_x = 0, \qquad w_t + s_z - u_y + v_x = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2016. – 59, № 1. – С. 78-85.

Система (6) также называется системой Моисила – Теодореску и является четырехмерным обобщением системы Коши – Римана.

Еще один метод построения такой системы описан в работе [6]. В этой работе рассматривается общая система дифференциальных уравнений первого порядка в $\mathbb{R}^4$:

$$\sum_{j=1}^{4} B_j \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x_j} = 0 , \tag{7}$$

где B_j – постоянные комплексные матрицы размерности 2×2, искомый вектор $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{v})$ – столбец из комплексных функций $\tilde{u} = \tilde{u}(x)$, $\tilde{v} = \tilde{v}(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Эта система также называется четырехмерным обобщением системы Коши – Римана, если компоненты $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ для каждого $\tilde{U}$ являются гармоническими функциями. Теперь через $U = (s, u, v, w)$ обозначим вектор-столбец, составленный из действительных и мнимых частей компонентов решения $\tilde{U}$ исходной системы (7):

$$s = \operatorname{Re}\tilde{u}, \qquad u = \operatorname{Im}\tilde{u}, \qquad v = \operatorname{Re}\tilde{v}, \qquad w = \operatorname{Im}\tilde{v}$$

и, проведя гомотопическую классификацию, систему (7) запишем в виде

$$\begin{aligned}
&s_t + u_x + \rho b_1 v_y - \rho b_2 w_y - \rho b_2 v_z - \rho b_1 w_z = 0 ,\\
&u_t - s_x + \rho b_2 v_y + \rho b_1 w_y + \rho b_1 v_z - \rho b_2 w_z = 0 ,\\
&v_t - w_x - \rho b_1 s_y - \rho b_2 u_y + \rho b_2 s_z - \rho b_1 u_z = 0 ,\\
&w_t + v_x + \rho b_2 s_y - \rho b_1 u_y + \rho b_1 s_z + \rho b_2 u_z = 0 ,
\end{aligned} \tag{8}$$

где $b = b_1 + ib_2$ – произвольное комплексное число, $\rho = \left(b_1^2 + b_2^2\right)^{-1}$.

Если в этой системе положим $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ и будем считать, что s, u, v, w не зависят от t, то получим систему Моисила – Теодореску (5), которая является естественным трехмерным обобщением системы Коши – Римана. Действительно, при $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ из системы (8) получаем систему

$$\begin{aligned}
&u_x + v_y - w_z = 0 ,\\
&-s_x + w_y + v_z = 0 ,\\
&-w_x - s_y - u_z = 0 ,\\
&v_x - u_y + s_z = 0 .
\end{aligned}$$

Если в этой системе вместо функции u положим $-w$, а вместо функции s возьмем функцию $-v$, то придем к системе (5).

Если в (8) положим $b_1 = 0$, $b_2 = 1$ и будем считать, что s, u, v, w являются функциями всех четырех аргументов t, x, y, z, то получим систему, являющуюся четырехмерным обобщением системы Коши – Римана:

$$\begin{aligned}
&s_t + u_x + w_y - v_z = 0 ,\\
&u_t - s_x + v_y + w_z = 0 ,\\
&v_t - w_x - u_y - s_z = 0 ,\\
&w_t + v_x + s_y + u_z = 0 ,
\end{aligned}$$

которая встречается в теории голоморфного кватерниона [2, 4].

Рассмотрим систему

$$u_x + v_y + \rho b_1 w_z - \rho b_2 s_z = 0\,,$$

$$v_x - u_y + \rho b_1 s_z + \rho b_2 w_z = 0\,,$$

$$w_x - s_y - \rho b_1 u_z - \rho b_2 v_z = 0\,,$$

$$s_x + w_y - \rho b_1 v_z + \rho b_2 u_z = 0\,. \qquad (9)$$

Если в (9) принять, что s, u, v, w не зависят от t, то имеем общую трехмерную систему типа системы Моисила – Теодореску [8].

Отсюда при $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ получим саму систему Моисила – Теодореску (5). Запишем систему (9) в виде

$$\begin{pmatrix} 2\dfrac{\partial}{\partial\xi} & b\rho\dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\bar{b}\rho\dfrac{\partial}{\partial z} & 2\dfrac{\partial}{\partial\bar{\xi}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0\,,$$

где

$$\xi = x + iy, \qquad \bar{\xi} = x - iy\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial\bar{\xi}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$b = b_1 + ib_2, \quad \rho = \left(b_1^2 + b_2^2\right)^{-1}, \quad p = u + iv, \quad q = w + is\,,$$

или в раскрытом виде

$$2\frac{\partial p}{\partial\xi} + b\rho\frac{\partial q}{\partial z} = 0, \qquad -\bar{b}\rho\frac{\partial p}{\partial z} + 2\frac{\partial q}{\partial\bar{\xi}} = 0\,.$$

Как и в работе [8], вводя в рассмотрение комплексную гармоническую функцию трех переменных

$$\varphi(x,y,z) = \omega(x,y,z) + i\tau(x,y,z)\,,$$

убедимся, что

$$p = \rho(b_1 + ib_2)\left(\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial y}\right), \qquad q = \frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z}\,,$$

является решением этой системы. Отсюда, отделяя действительные и мнимые части, получим представления решений системы (9) через производные гармонических функций $\omega(x,y,z)$ и $\tau(x,y,z)$:

$$u = b_1(\omega_x - \tau_y) - b_2(\tau_x + \omega_y)\,,$$

$$v = b_2(\omega_x - \tau_y) - b_1(\tau_x + \omega_y), \qquad w = \omega_z, \qquad s = \tau_z\,. \qquad (10)$$

Теперь построим общее представление решения системы (8) через производные двух произвольных гармонических функций. Для этого введем в рассмотрение две независимые комплексные переменные $\zeta = t + ix$, $\eta = y + iz$ и две комплексные искомые функции $U = s + iu$, $V = v + iw$. Тогда систему (8) можем записать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial\zeta} + \rho b\frac{\partial V}{\partial\bar{\eta}} = 0, \qquad -\rho\bar{b}\frac{\partial U}{\partial\eta} + \frac{\partial V}{\partial\bar{\zeta}} = 0\,, \qquad (11)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\frac{\partial}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y} + i\frac{\partial}{\partial z}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Если введем в рассмотрение комплексную гармоническую функцию от четырех независимых переменных t, x, y, z:

$$\varphi(t,x,y,z) = \omega(t,x,y,z) + i\tau(t,x,y,z),$$

то общее представление решения системы (11) через производные гармонической функции запишем как

$$U = 2\rho b\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\zeta}}, \qquad V = 2\frac{\partial\varphi}{\partial\eta},$$

т. е.

$$s + iu = \rho(b_1 + ib_2)\left[\frac{\partial}{\partial t}(\omega + i\tau) + i\frac{\partial}{\partial x}(\omega + i\tau)\right],$$

$$v + iw = \frac{\partial}{\partial y}(\omega + i\tau) + i\frac{\partial}{\partial z}(\omega + i\tau).$$

Отсюда, отделяя действительные и мнимые части, получим представление решения системы (8) через производные гармонических функций ω и τ:

$$s = \rho b_1(\omega_t - \tau_x) - \rho b_2(\tau_t + \omega_x),$$

$$u = \rho b_1(\tau_t + \omega_x) + \rho b_2(\omega_t - \tau_x),$$

$$v = \omega_y + \tau_z, \qquad w = \tau_y - \omega_z. \tag{12}$$

В работе [8] в трехмерном случае для системы (9) поставлена и решена известная задача Римана – Гильберта. Рассмотрим задачу в области $D \in \mathbb{R}^3$. Требуется найти в области $D \in \mathbb{R}^3$ регулярное решение системы (9) с граничными условиями [1]

$$\alpha_j u + \beta_j v + \gamma_j w + \delta_j s = f_j, \qquad j = 1,2, \tag{13}$$

где α_j, β_j, γ_j, δ_j, f_j – заданные непрерывные функции, удовлетворяющие условию Гельдера. Известно, что регуляризуемость краевой задачи является необходимым и достаточным условием нетеровости оператора. Для системы типа (8) в случае $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ не существует ни одной регуляризуемой краевой задачи ни в какой ограниченной области [2, 4].

В работе [5] показана корректность одной краевой задачи для системы вида (8) с младшими членами в бесконечной области $D \equiv \{0 < t < h, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, -\infty < z < +\infty\}$. Обозначим через T оператор, отображающий вектор $U \equiv (s,u,v,w)$ на левые части уравнения (8). Требуется найти в области D решение неоднородной системы

$$TU + A(x)U = F(x), \tag{14}$$

где $U(x) \in C^\infty(\bar{D}) \cap W_2^2(D)$, $A(x)$ – заданная квадратная матрица четвертого порядка, а $F(x)$ – заданная четырехмерная вектор-функция. Компоненты $U(x)$ удовлетворяют на границе Γ условиям

$$s(\Gamma) = U(\Gamma) = v(t=0) = w(t=h) = 0. \tag{15}$$

Доказана следующая

Теорема. *Если матрица* $A(x) \in C(\bar{D})$ *и существует положительное число* $\delta < \frac{\sqrt{2}}{h}$ *такое, что* $\|AU\|_0 \le \delta\|U\|_0$, *то для любой вектор-функции* $F(x) \in L_2(D)$ *задача* (14), (15) *имеет единственное решение* $U(x) \in W_2^1(D)$.

До сих пор не было известно пятимерное обобщение голоморфного вектора. Построим пятимерный аналог системы Коши – Римана. Пусть $b = b_1 + ib_2 + jb_3 + kb_4$, $\overline{b} = b_1 - ib_2 - jb_3 - kb_4$ – соответственно кватернионное и сопряженное кватернионное постоянные числа; $\partial = \partial_{x1} + i\partial_{x2} + j\partial_{x3} + k\partial_{x4}$, $\overline{\partial} = \partial_{x1} - i\partial_{x2} - j\partial_{x3} - k\partial_{x4}$ – кватернионное и сопряженное кватернионное дифференцирования; b_ℓ, $\ell = 1,2,3,4$, – действительные постоянные, $\rho = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2)^{-1}$, причем i, j, k – кватернионные единицы, обладающие свойствами: $i\,j = k$, $k\,i = j$, $j\,k = i$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

В пространстве $\mathbb{R}^5$ переменных $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ рассмотрим систему уравнений с частными производными первого порядка от функций $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_8$:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_5} + \rho b_1\left(\frac{\partial u_5}{\partial x_1} - \frac{\partial u_6}{\partial x_2} - \frac{\partial u_7}{\partial x_3} - \frac{\partial u_8}{\partial x_4}\right) - \rho b_2\left(\frac{\partial u_6}{\partial x_1} + \frac{\partial u_5}{\partial x_2} + \frac{\partial u_8}{\partial x_3} - \frac{\partial u_7}{\partial x_4}\right) -$$
$$- \rho b_3\left(\frac{\partial u_7}{\partial x_1} - \frac{\partial u_8}{\partial x_2} + \frac{\partial u_5}{\partial x_3} + \frac{\partial u_6}{\partial x_4}\right) -$$
$$- \rho b_4\left(\frac{\partial u_8}{\partial x_1} + \frac{\partial u_7}{\partial x_2} - \frac{\partial u_6}{\partial x_3} + \frac{\partial u_5}{\partial x_4}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_5} + \rho b_1\left(\frac{\partial u_6}{\partial x_1} + \frac{\partial u_5}{\partial x_2} + \frac{\partial u_8}{\partial x_3} - \frac{\partial u_7}{\partial x_4}\right) + \rho b_2\left(\frac{\partial u_5}{\partial x_1} - \frac{\partial u_6}{\partial x_2} - \frac{\partial u_7}{\partial x_3} - \frac{\partial u_8}{\partial x_4}\right) +$$
$$+ \rho b_3\left(\frac{\partial u_8}{\partial x_1} + \frac{\partial u_7}{\partial x_2} - \frac{\partial u_6}{\partial x_3} + \frac{\partial u_5}{\partial x_4}\right) -$$
$$- \rho b_4\left(\frac{\partial u_7}{\partial x_1} - \frac{\partial u_8}{\partial x_2} - \frac{\partial u_5}{\partial x_3} + \frac{\partial u_6}{\partial x_4}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_5} - \rho b_3\left(\frac{\partial u_5}{\partial x_1} - \frac{\partial u_6}{\partial x_2} - \frac{\partial u_7}{\partial x_3} - \frac{\partial u_8}{\partial x_4}\right) + \rho b_1\left(\frac{\partial u_7}{\partial x_1} - \frac{\partial u_8}{\partial x_2} + \frac{\partial u_5}{\partial x_3} + \frac{\partial u_6}{\partial x_4}\right) +$$
$$+ \rho b_4\left(\frac{\partial u_6}{\partial x_1} + \frac{\partial u_5}{\partial x_2} + \frac{\partial u_8}{\partial x_3} - \frac{\partial u_7}{\partial x_4}\right) -$$
$$- \rho b_2\left(\frac{\partial u_8}{\partial x_1} + \frac{\partial u_7}{\partial x_2} - \frac{\partial u_6}{\partial x_3} + \frac{\partial u_5}{\partial x_4}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial u_4}{\partial x_5} + \rho b_4\left(\frac{\partial u_5}{\partial x_1} - \frac{\partial u_6}{\partial x_2} - \frac{\partial u_7}{\partial x_3} - \frac{\partial u_8}{\partial x_4}\right) + \rho b_2\left(\frac{\partial u_7}{\partial x_1} - \frac{\partial u_8}{\partial x_2} + \frac{\partial u_5}{\partial x_3} + \frac{\partial u_6}{\partial x_4}\right) -$$
$$- \rho b_3\left(\frac{\partial u_6}{\partial x_1} + \frac{\partial u_5}{\partial x_2} + \frac{\partial u_8}{\partial x_3} - \frac{\partial u_7}{\partial x_4}\right) +$$
$$+ \rho b_1\left(\frac{\partial u_8}{\partial x_1} + \frac{\partial u_7}{\partial x_2} - \frac{\partial u_6}{\partial x_3} + \frac{\partial u_5}{\partial x_4}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial u_5}{\partial x_5} + \rho b_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{\partial u_4}{\partial x_4}\right) - \rho b_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_4}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_4}\right) -$$
$$- \rho b_3\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_4}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_4}\right) -$$
$$- \rho b_4\left(\frac{\partial u_4}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_1}{\partial x_4}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial u_6}{\partial x_5} + \rho b_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{\partial u_4}{\partial x_4} \right) - \rho b_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_4}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_4} \right) +$$
$$+ \rho b_3 \left(\frac{\partial u_4}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_1}{\partial x_4} \right) -$$
$$- \rho b_4 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_4}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_4} \right) = 0 ,$$
$$\frac{\partial u_7}{\partial x_5} + \rho b_3 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{\partial u_4}{\partial x_4} \right) - \rho b_1 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_4}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_4} \right) -$$
$$- \rho b_2 \left(\frac{\partial u_4}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_1}{\partial x_4} \right) +$$
$$+ \rho b_4 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_4}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_4} \right) = 0 ,$$
$$\frac{\partial u_8}{\partial x_5} + \rho b_4 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{\partial u_4}{\partial x_4} \right) - \rho b_1 \left(\frac{\partial u_4}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_1}{\partial x_4} \right) +$$
$$+ \rho b_2 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_4}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_4} \right) -$$
$$- \rho b_3 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_4}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_4} \right) = 0 . \qquad (16)$$

Эта система получена из системы

$$\frac{\partial U}{\partial x_5} + \rho b \partial V = 0 ,$$
$$- \rho \bar{b} \partial U + \frac{\partial V}{\partial x_5} = 0 , \qquad (17)$$

где $U = u_1 + iu_2 + ju_3 + ku_4$, $V = u_5 + iu_6 + ju_7 + ku_8$. В системе (16) каждая из функций $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_8$ является гармонической. Действительно, если в (16) первое уравнение продифференцируем по x_5 , второе уравнение, сначала разделим на $-\rho b_1$, затем продифференцируем по x_5 , также аналогичным образом продифференцируем и другие уравнения, то после сложения получим, что u_1 удовлетворяет уравнению Лапласа. Аналогично, продифференцировав по остальным переменным, убедимся, что и другие функции u_k , $k = 2, 3, \ldots, 8$, также удовлетворяют уравнению Лапласа.

Введем в рассмотрение кватернионную гармоническую функцию от $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$:

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) ,$$

полагая, что

$$u_\ell = \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial x_5}, \qquad \ell = 1, 2, 3, 4 ,$$
$$u_r = \rho (B_r, M_r), \qquad r = 5, 6, 7, 8 . \qquad (18)$$

Здесь $\rho = \left(\sum_{k=1}^{8} b_k^2 \right)^{-1}$, (B_r, M_r) – скалярное произведение векторов B_r , M_r :

$$B_5 = (b_1, b_2, b_3, b_4), \qquad B_6 = (b_1, -b_2, -b_3, -b_4) ,$$
$$B_7 = (b_1, b_2, -b_3, -b_4), \qquad B_8 = (b_1, -b_2, b_3, -b_4) ,$$

$$M_5 = (m_1, m_2, m_3, m_4), \qquad M_6 = (m_2, m_1, m_3, m_4),$$

$$M_7 = (m_3, m_4, m_1, m_2), \qquad M_8 = (m_4, m_3, m_2, m_1).$$

Через m_s, $s = 1,2,3,4$, обозначены следующие комбинации производных гармонических функций:

$$m_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_3} + \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_4}, \qquad m_2 = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_3} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_4},$$

$$m_3 = \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_4}, \qquad m_4 = \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_4}.$$

С помощью представления (18) задача Римана – Гильберта о нахождении регулярного в полупространстве $\mathbb{R}^5_\Gamma \equiv \{x_5 > 0\}$ решения $W = (U, V) = (u_1, u_2, \ldots, u_8)$ системы (16), удовлетворяющего на границе $\Gamma \equiv \{x_5 = 0\}$ условиям

$$\sum_{\ell=1}^{8} a_{\ell r} u_\ell = f_r, \qquad r = 1,2,3,4, \tag{19}$$

где $a_{\ell r}$, f_r, $\ell = 1,2,\ldots,8$, $r = 1,2,3,4$, – заданные функции на границе, сводится к задаче о наклонной производной

$$\sum_{s=1}^{4} (\alpha_{sr}, \nabla\varphi_r) = f_r, \qquad r = 1,2,3,4, \tag{20}$$

здесь α_{sr} – вполне определенные вектора. Таким образом, получили задачу о наклонной производной – задачу о нахождении в полупространстве $x_5 > 0$ гармонических функций $\varphi_\ell(x)$, $\ell = 1,2,3,4$, удовлетворяющих на границе условиям (19). В частности, можно рассмотреть задачу для регулярных в полупространстве $x_5 > 0$ гармонических функций с постоянными коэффициентами $a_{\ell r}$, подбирая коэффициенты системы (16), (19) так, чтобы уравнение (20) приняло вид

$$\frac{\partial\varphi_\ell}{\partial x_5} = f_\ell, \qquad \ell = 1,2,3,4. \tag{21}$$

Решения задачи (21), функции $\varphi_\ell(x)$, $\ell = 1,2,3,4$, стремящиеся к нулю на бесконечности, а также в предположении, что и функции $f_\ell(x)$, $\ell = 1,2,3,4$, также стремятся к нулю на бесконечности, находятся явно по формуле [3]:

$$\varphi_\ell(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_\ell(y)\, dy_1\, dy_2\, dy_3\, dy_4}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4} (x_i - y_i)^2 + x_5^2}}, \qquad \ell = 1,2,3,4. \tag{22}$$

Следовательно, на основании формул (22) в случае граничных условий (21) по формуле (18) определим единственное решение задачи (16), (19). В дальнейшем можно решить методом Булигана – Жиро краевую задачу для пятимерной системы – обобщающую систему Мойсила – Теодореску.

1. *Бицадзе А. И.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – Москва: Наука, 1966. – 204 с.
2. *Виноградов В. С.* Об одной эллиптической системе, не имеющей нетеровых граничных задач // Докл. АН СССР. – 1971. – **199**, № 5. – С. 1008–1010.
3. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – Москва: Мир, 1964. – 830 с.
   То же: *Courant R.* Partial differential equations. – New York: Intersci. Publ., 1962. – xxii+830 p.

4. *Соломяк М. З.* О линейных эллиптических системах первого порядка // Докл. АН СССР. – 1963. – **150**, № 1. – С. 48–51.
5. *Токибетов Ж. А., Тунгатаров А. Б., Сапакова С. З.* Обобщенная задача Римана–Гильберта для многомерных систем дифференциальных уравнений в частных производных // Вестн. Вост.-Казахст. гос. техн. ун-та им. Д. Серикбаева. Сер. Математика, физика, химия, информатика. – 2013. – № 3 – С. 227–235.
6. *Усс А. Т.* О краевых задачах для четырехмерных аналогов системы Коши–Римана с комплексными коэффициентами // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2001. – Вып. 12. – С. 10–16.
7. *Янушаускас А. И.* Задача о наклонной производной теории потенциала. – Новосибирск, 1985. – 262 с.
8. *Teodorescu N.* La dérivée aréolaire // Annales Roumaines de Mathématiques. Cahier 3. – 1936.
9. *Tokibetov J. A., Sapakova S. Z.* About Noetherian of Riemann–Hilbert's problem for general Cauchy–Riemann's system // Int. J. Math. Phys. Quarterly Journal of al-Farabi Kazakh National University. – 2012. – **3**, No. 2. – P. 111–113.

БАГАТОВИМІРНІ АНАЛОГИ СИСТЕМИ КОШІ – РІМАНА І ПОДАННЯ ЇХ РОЗВ'ЯЗКУ ЧЕРЕЗ ГАРМОНІЧНІ ФУНКЦІЇ

На сьогодні існує значна кількість багатовимірних узагальнень голоморфних векторів. Найбільш загальним є чотиривимірне узагальнення системи Коші – Рімана. У цій роботі за допомогою введення у розгляд двох кватерніонних функцій і кватерніонного диференціювання вперше отримано п'ятивимірне узагальнення голоморфного вектора. З використанням подання голоморфного вектора через кватерніонну гармонічну функцію і її похідні розглянуто задачу Рімана – Гільберта і одну задачу в шарі. Отримано розв'язок задачі Рімана – Гільберта в п'ятивимірному півпросторі.

MULTIDIMENSIONAL ANALOGUES OF THE CAUCHY – RIEMANN'S SYSTEM AND REPRESENTATIONS OF THEIR SOLUTIONS VIA HARMONIC FUNCTIONS

Nowadays there are plenty of multi-dimensional generalizations of holomorphic vectors. The most common is a four-dimensional generalization of the Cauchy – Riemann system. In this paper, by introducing into consideration two quaternion functions and quaternion differentiation, five-dimensional generalization of a holomorphic vector is obtained for the first time. Using the representation of holomorphic vector via quaternion harmonic function and its derivatives, the Riemann – Hilbert problem and one problem in the layer are considered. The new solution of the Riemann – Hilbert problem in five-dimensional half-space is obtained.

Казахск. нац. ун-т им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Получено
02.07.15