

## МЕТОД $R$ -ФУНКЦИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ВОСЬМИГРАННОЙ ТОПЛИВНОЙ КАССЕТЕ С 37-ю ТВЭЛАМИ

*Рассмотрены сопряженные краевые задачи теплообмена для случаев, когда вязкая несжимаемая жидкость движется по каналам неканонического сечения, обтекающая пучок стержней. Исследовано влияние вида упаковки на распределение скорости и температуры. Для решения использован метод  $R$ -функций в сочетании с вариационным методом Рунца. Рассмотрены циклическая, шахматная и коридорная упаковки ТВЭЛов.*

**Введение.** В связи с интенсивным ростом количества атомных станций, а также с ростом числа моделей и модификаций ядерных реакторов существенным становится вопрос о преимуществах тех или иных установок. В то же время перед конструкторами стоит ряд вопросов, для которых оптимальные решения всё ещё не найдены. На атомных станциях идёт крупнейший оборот финансовых средств, и малейший выигрыш в экономичности приносит огромные прибыли, однако нельзя забывать о надёжности и затратах при строительстве установки – это сложная комплексная задача, которая решается на стадии проектирования. Расчет реактора на стадии проектирования предполагает определение основных параметров активной зоны, значений температуры и др. Теплогидравлический расчет активной зоны реактора является одним из краеугольных камней в обосновании безопасной эксплуатации АЭС. Расчет параметров теплоносителя и температур тепловыделяющих элементов производится на всех стадиях проектирования и обоснования безопасности ЭУ.

Целью работы является применение новых конструктивных средств метода  $R$ -функций для математического и компьютерного моделирования конвективного теплообмена в решетках ТВЭЛов, а также исследование влияния вида упаковки на распределение скорости и температуры.

**1. Основная часть.** Рассмотрим активную зону реактора, которая собирается из большого числа топливных кассет [2, 3, 5]. Построим уравнение модельной восьмигранной топливной кассеты с тридцатью семью ТВЭЛами, упакованными по трем известным схемам: циклической, шахматной и коридорной. В данном случае восьмигранная кассета выбрана из соображений удобства расположения всех видов упаковок ТВЭЛов при одинаковом их количестве, что является необходимым условием оценки влияния вида упаковки на распределение скорости и температуры.

Для построения уравнения восьмигранного кожуха воспользуемся методикой, разработанной в [1, 2, 4, 5]. Рассмотрим уравнение прямой  $\sigma \equiv R_b - x \geq 0$  (где  $R_b$  – радиус окружности, вписанной в правильный восьмиугольник) и периодическую функцию

$$\mu_v = \frac{8}{\pi n} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{1}{(2k-1)^2} \sin \left[ (2k-1) \frac{n\theta}{2} \right], \quad n = 8.$$

В результате получим

$$\omega_b \equiv R_b - r \cos \mu_v \geq 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}.$$

Остановимся на построении функции  $\omega(x, y) \equiv \omega_b \wedge_0 \bar{\omega}_{tv} \geq 0$ , когда ТВЭЛ транслируется с циклической симметрией  $n_1$  раз вдоль окружности радиуса  $R_1$ ,  $n_2$  раза – вдоль окружности радиуса  $R_2$  и  $n_3$  раза – вдоль окружности радиуса  $R_3$ .

Для построения уравнения границы ТВЭЛа, транслированного с циклической симметрией  $n_1$  раз вдоль окружности радиуса  $R_1$ , воспользуемся функцией  $\omega_{01} \equiv \frac{1}{2R_{tv}}(R_{tv}^2 - (x - R_1)^2 - y^2)$ , где  $R_{tv}$  – радиус ТВЭЛа, и формулой

$$\mu_1 = \frac{8}{n_1\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{1}{(2k-1)^2} \sin \left[ (2k-1) \frac{n_1\theta}{2} \right].$$

В результате получим уравнение

$$\omega_{tv1} \equiv \frac{1}{2R_{tv}}(R_{tv}^2 - (r \cos \mu_1 - R_1)^2 - (r \sin \mu_1)^2) \geq 0.$$

Для построения уравнения границы ТВЭЛа, транслированного с циклической симметрией  $n_2$  раз вдоль окружности радиуса  $R_2$ , воспользуемся функцией  $\omega_{02} \equiv \frac{1}{2R_{tv}}(R_{tv}^2 - (x - R_2)^2 - y^2)$  и формулой

$$\mu_2 = \frac{8}{n_2\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{1}{(2k-1)^2} \sin \left[ (2k-1) \frac{n_2\theta}{2} \right].$$

Тогда

$$\omega_{tv2} \equiv \frac{1}{2R_{tv}}(R_{tv}^2 - (r \cos \mu_2 - R_2)^2 - (r \sin \mu_2)^2) \geq 0.$$

Для построения уравнения границы ТВЭЛа, транслированного с циклической симметрией  $n_3$  раз вдоль окружности радиуса  $R_3$ , воспользуемся функцией

$$\omega_{03} \equiv \frac{1}{2R_{tv}}(R_{tv}^2 - (x - R_3)^2 - y^2)$$

и формулой

$$\mu_3 = \frac{8}{n_3\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{1}{(2k-1)^2} \sin \left[ (2k-1) \frac{n_3\theta}{2} \right].$$

Тогда

$$\omega_{tv3} \equiv \frac{1}{2R_{tv}}(R_{tv}^2 - (r \cos \mu_3 - R_3)^2 - (r \sin \mu_3)^2) \geq 0.$$

Таким образом, при

$$n_1 = 18, \quad R_1 = 4.2, \quad n_2 = 12, \quad R_2 = 2.8, \quad n_3 = 6, \quad R_3 = 1.5, \quad R_{tv} = 0.2$$

уравнение границы кассеты с тридцатью шестью ТВЭЛами имеет вид

$$\omega \equiv (\omega_b \wedge_0 \overline{\omega_{tv1} \vee_0 \omega_{tv2} \vee_0 \omega_{tv3}}) \geq 0,$$

и является семипараметрическим  $(n_1, n_2, n_3, R_1, R_2, R_3, R_{tv})$  семейством кривых (рис. 1а).

Заметим, что здесь и далее использованы простейшие  $R$ -операции [4]

$$f \wedge_0 g = f + g - \sqrt{f^2 + g^2}, \quad f \vee_0 g = f + g + \sqrt{f^2 + g^2}, \quad \bar{f} = -f.$$

При этом построенные по этой методике уравнения  $\omega(x, y) \geq 0$  являются бесконечно дифференцируемыми. В рассматриваемом случае  $R$ -операции использовались лишь три раза. При наличии центрального ТВЭЛа получим

$$\omega \equiv \omega_b \wedge_0 \overline{\omega_{tv1} \vee_0 \omega_{tv2} \vee_0 \omega_{tv3} \vee_0 \frac{1}{2R_{tv}}(R_{tv}^2 - x^2 - y^2)} \geq 0,$$

и общее количество ТВЭЛов становится равным тридцати семи (рис. 1а).

Для построения треугольной (шахматной) [4] упаковки ТВЭЛов зададим

$$f_1 = R_{tv}^2 - \mu_x^2 - \mu_y^2 \geq 0,$$

где

$$\mu_x = \frac{4h_x}{\pi^2} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin\left[(2k-1)\frac{\pi x}{h_x}\right]}{(2k-1)^2}, \quad \mu_y = \frac{4h_y}{\pi^2} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin\left[(2k-1)\frac{\pi y}{h_y}\right]}{(2k-1)^2},$$

$$f_2 = R_{tv}^2 - \mu_{x1}^2 - \mu_{y1}^2 \geq 0,$$

где

$$\mu_{x1} = \frac{4h_x}{\pi^2} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin\left[\frac{(2k-1)\pi(x-h_x/2)}{h_x}\right]}{(2k-1)^2},$$

$$\mu_{y1} = \frac{4h_y}{\pi^2} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin\left[\frac{(2k-1)\pi(y-h_y/2)}{h_y}\right]}{(2k-1)^2}.$$

Здесь  $h_x, h_y$  – шаги трансляции по осям  $Ox, Oy$ .

Тогда уравнение топливной кассеты имеет вид

$$\omega \equiv \omega_b \wedge_0 \bar{\omega}_{tv} \geq 0, \quad \omega_{tv} \equiv (f_1 \vee_0 f_2) \geq 0.$$

Построение функции  $\omega(x, y)$  выполнено при следующих значениях буквенных параметров:  $R_{tv} = 0.2, h_x = 2.75, h_y = 1.52$  (рис. 1б). Следует отметить, что при построении уравнения кассеты по новой методике  $R$ -операции использовались лишь два раза.

Для построения прямоугольной (коридорной) упаковки ТВЭЛов зададим

$$f_1 = R_{tv}^2 - \mu_x^2 - \mu_y^2 \geq 0,$$

где

$$\mu_x = \frac{4h_x}{\pi^2} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin\left[(2k-1)\frac{\pi x}{h_x}\right]}{(2k-1)^2}, \quad \mu_y = \frac{4h_y}{\pi^2} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin\left[(2k-1)\frac{\pi y}{h_y}\right]}{(2k-1)^2}.$$

Тогда уравнение топливной кассеты имеет вид

$$\omega \equiv \omega_b \wedge_0 \bar{\omega}_{tv} \geq 0, \quad \omega_{tv} \equiv f_1 \geq 0.$$

Построение функции  $\omega(x, y)$  выполнено при следующих значениях буквенных параметров:  $R_{tv} = 0.2, h_x = h_y = 1.5$  (рис. 1в).

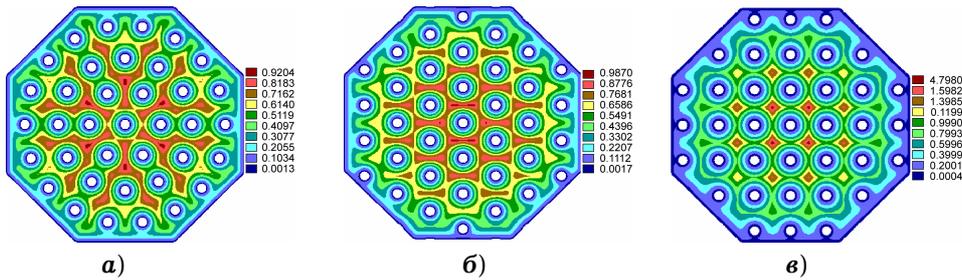


Рис.1. Топливная кассета с 37 ТВЭЛами: а) – с циклической симметрией и центральным ТВЭЛом; б) – расположение по шахматной схеме; в) – расположение по коридорной схеме.

Основная система уравнений, описывающая процесс теплообмена в потоке вязкой жидкости, при постоянных физических свойствах жидкости и температуры имеет вид

$$\frac{DT}{D\tau} = a\Delta T + \frac{q_V}{\rho c_p} + \frac{\mu\Phi}{\rho c_p}, \quad \frac{D\mathbf{V}}{D\tau} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{V}, \quad \operatorname{div}\mathbf{V} = 0,$$

где  $\frac{D}{D\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)$  – субстанциональная (полная) производная,  $\mu\Phi$  – диссипативная функция,  $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$  – коэффициент теплопроводности,

$c_p$  – теплоемкость среды,  $q_V$  – мощность внутренних источников тепла.

В случае стационарных процессов температура тела не зависит от времени, и уравнение теплопроводности при продольном обтекании ТВЭЛов принимает вид

$$V_z \frac{\partial T}{\partial z} = a\Delta T + \frac{q_V}{\rho c_p},$$

а математическая модель поля скоростей при ламинарном течении имеет вид

$$\Delta V_z = -\frac{\nabla P}{\mu\ell} = -C,$$

где  $\nabla P$  – постоянное вдоль трубы падение давления на произвольно выбранном участке длины  $\ell$ .

В области тепловой стабилизации, когда  $\frac{\partial T}{\partial z} = \text{const}$ , получим  $-\operatorname{div}(\lambda\nabla T) = q_V - V_z C_1$ . Таким образом, математическая модель теплообмена при ламинарном движении жидкости по кассете с ТВЭЛами сводится к системе уравнений

$$\begin{aligned} \Delta V_z &= -C, & (x, y) &\in \Omega_b \cap \bar{\Omega}_{tv}, \\ -\operatorname{div}(\lambda_i \nabla T_i) &= F_i, & (x, y) &\in \Omega_b, \end{aligned}$$

где

$$F_1 = -V_z, \quad (x, y) \in \Omega_b \cap \bar{\Omega}_{tv}, \quad F_2 = q_V, \quad (x, y) \in \Omega_{tv},$$

с граничными условиями вида

$$\begin{aligned} V_z|_{\partial\Omega_b \cap \partial\Omega_{tv}} &= 0, & \frac{\partial T}{\partial n} + hT|_{\Omega_b} &= 0, \\ T_1|_{\partial\Omega_{tv}} &= T_2|_{\partial\Omega_{tv}}, & \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n_1}|_{\partial\Omega_{tv}} &= \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n_2}|_{\partial\Omega_{tv}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Зная уравнения кассеты и ТВЭЛов, постановку задачи (1) можем переписать в виде

$$\begin{aligned} \Delta V_z &= -C, \\ -\operatorname{div}(\lambda\nabla T) &= F, \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} V_z|_{\partial\Omega_b \cap \partial\Omega_{tv}} &= 0, & \frac{\partial T}{\partial n} + hT|_{\Omega_b} &= 0, \\ T_1|_{\partial\Omega_{tv}} &= T_2|_{\partial\Omega_{tv}}, & \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n_1}|_{\partial\Omega_{tv}} &= \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n_2}|_{\partial\Omega_{tv}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_1 \frac{1 - \operatorname{sgn} \omega_{tv}}{2} + \lambda_2 \frac{1 + \operatorname{sgn} \omega_{tv}}{2}, \\ F &= -V_z \frac{1 - \operatorname{sgn} \omega_{tv}}{2} + q_V \frac{1 + \operatorname{sgn} \omega_{tv}}{2}. \end{aligned}$$

Для решения использован метод  $R$ -функций в сочетании с вариационным методом Ритца. Структура решения задачи о ламинарном течении при продольном обтекании ТВЭЛов жидкости имеет вид  $V_z = \omega p_1$ , где  $\omega(x, y) \equiv \omega_b \wedge_0 \bar{\omega}_{tv} \geq 0$  – уравнение границы поперечного сечения кассеты, а неопределенную компоненту  $p_1 = \sum_{i=1}^N c_{ik} \varphi_{ik}(x, y)$  будем отыскивать, минимизируя функционал  $I = \int_{\Omega} ((\nabla V_z)^2 - 2CV_z) d\Omega$ . Заметим, что решение  $V_z$  получаем в аналитическом виде и используем без какой-либо дальнейшей обработки (аппроксимации, интерполяции). Поэтому полученное распределение скорости подставляем в правую часть уравнения теплопроводности. Структура решения задачи определения температурного поля использовалась как точно удовлетворяющая граничным условиям на  $\partial\Omega_b$  функция  $u = p_2 + \omega_b(-D_1 p_2 + h p_2)$ , так и в виде  $T = p_2$ , где, как и ранее,  $p_2 = \sum_{i=1}^N d_{ik} \varphi_{ik}(x, y)$ . Здесь следует отметить, что граничные условия  $\frac{\partial T}{\partial n} + hT \Big|_{\Omega_b} = 0$  и  $\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n_1} \Big|_{\partial\Omega_{tv}} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n_2} \Big|_{\partial\Omega_{tv}}$  являются естественными и следуют из функционала Ритца  $I = \int_{\Omega} (\lambda(\nabla T)^2 - 2FT) d\Omega + \int_{\partial\Omega_b} hT^2 d\partial\Omega_b$ . В качестве аппроксимационных средств  $\varphi_{ik}(x, y)$  использовались кубические сплайны Шенберга при  $N = 6400, 10000$ . Вычислительные эксперименты проводились в условиях эксплуатации системы *ПОЛЕ*, разработанной в отделе прикладной математики и вычислительных методов ИПМаш НАН Украины. На рис. 2, рис. 3 приведены результаты исследований для различных упаковок ТВЭЛов. Каждая упаковка содержит 37 стержней при всех прочих равных условиях  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 10, h = 1, q_v = 10$ . Меняя значения буквенных параметров, можно получать различные распределения исследуемых полей.

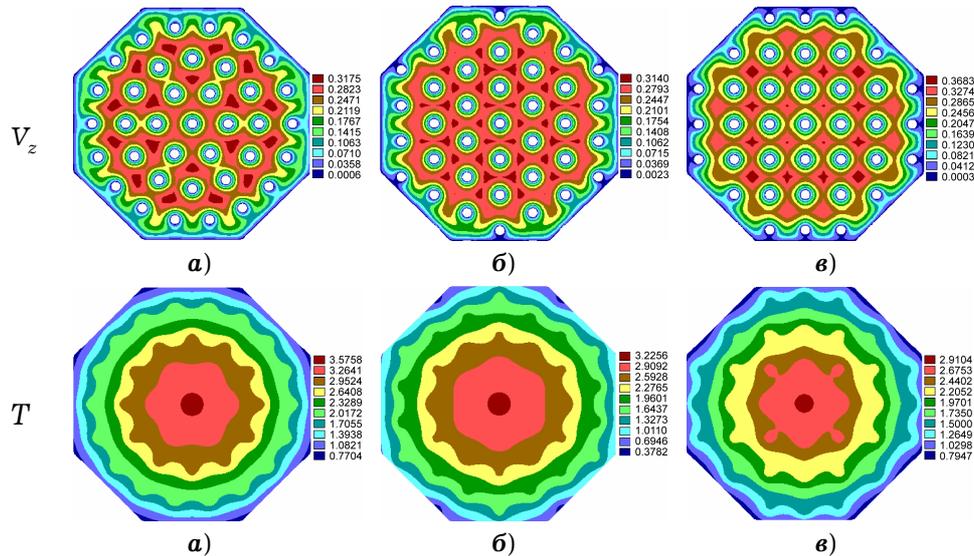


Рис. 2. Картины распределения поля скоростей  $V_z$  и температур  $T$ : а) – циклическая упаковка, б) – шахматная; в) – коридорная.

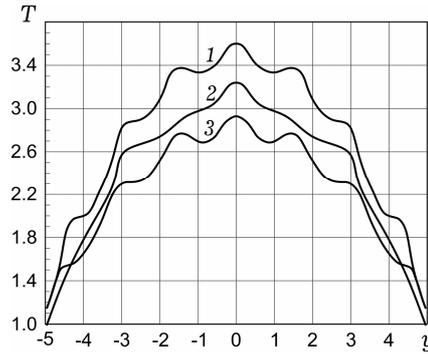


Рис. 3. Графики распределения температуры в сечении  $x = 0$  : кривая 1 – циклическая упаковка, 2 – шахматная, 3 – коридорная.

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что при циклической упаковке максимальная температура на 9.8% больше, чем при шахматной, и на 18.6% больше, чем при коридорной упаковке.

В реальных конструкциях на месте центрального ТВЭЛа расположено крепление в виде стержня. Тогда

$$\omega_b = (R_b - r \cos \mu_v) \wedge_0 (x^2 + y^2 - R_s^2) \geq 0, \quad R_s = R_{tv} + 0.05,$$

и все вычисления проводятся, как и ранее. Результаты приведены на рис. 4, рис. 5.

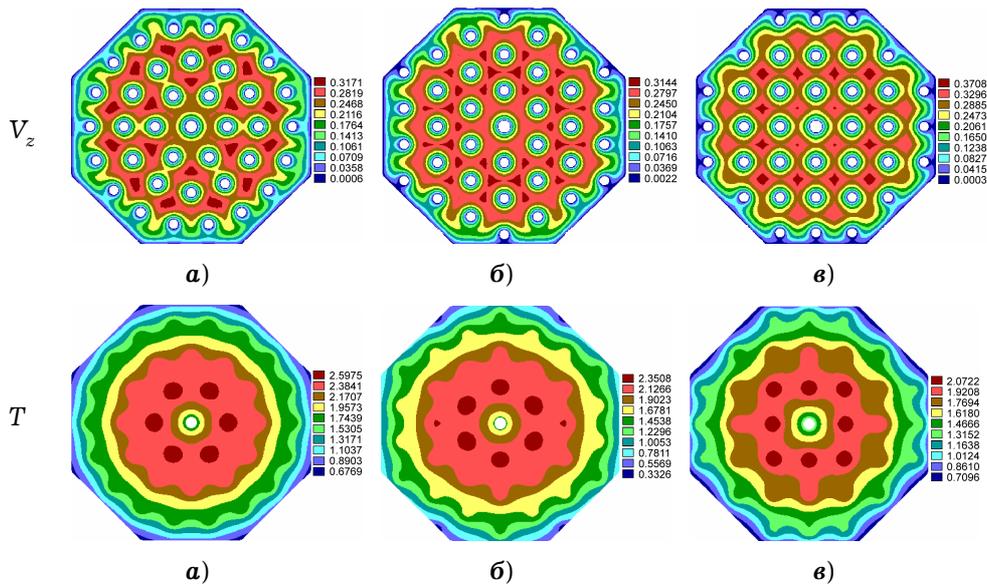


Рис. 4. Картины распределения поля скоростей  $V_z$  и температур  $T$  при наличии центрального крепления: а) – циклическая упаковка; б) – шахматная; в) – коридорная.

В этом случае при циклической упаковке максимальная температура на 9% больше, чем при шахматной, и на 20% больше, чем при коридорной упаковке. Если сравнить результаты решения с центральным ТВЭЛом и центральным стержневым креплением, то при циклической упаковке максимальная температура падает на 27%, при шахматной – на 27%, при коридорной – на 29%.

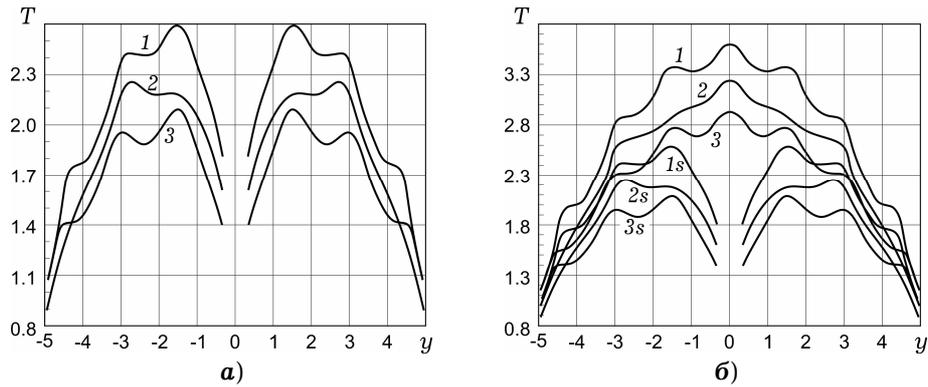


Рис. 5. Графики распределения температуры в сечении  $x = 0$  при наличии центрального крепления: а) кривая 1 – циклическая упаковка, 2 – шахматная, 3 – коридорная; б) общий график: 1s – циклическая, 2s – шахматная, 3s – коридорная упаковки.

**Выводы.** Проведенные исследования позволяют конструкторам выбирать те или иные виды упаковок в зависимости от технических требований. Метод  $R$ -функций является эффективным методом решения задач расчета физических полей в элементах конструкций ядерных энергетических установок сложной формы. Работа с математической моделью процесса и вычислительный эксперимент дает возможность быстро и без существенных затрат исследовать свойства и поведение процесса в различных ситуациях.

1. Максименко-Шейко К. В.  $R$ -функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. – Харьков: Ин-т проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, 2009. – 306 с.
2. Максименко-Шейко К. В., Толок А. В., Шейко Т. И. Сопряженная задача конвективного теплообмена в топливной кассете ТВЭЛов // Информ. технологии. – 2013. – № 11. – С. 32–36.
3. Петухов Б. С., Генин Л. Г., Ковалев С. А. Теплообмен в ядерных энергетических установках. – Москва: Атомиздат, 1974. – 407 с.
4. Рвачев В. Л. Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
5. Maksymenko-Sheyko K. V., Uvarov R. A., Sheyko T. I. The  $R$ -functions method in mathematical modeling of convective heat transfer in fuel cartridge with fuel rods // Problems of atomic science and technology. Ser.: Nuclear Physics Investigations (60). – 2013. – No. 3 (85). – P. 205–209.

#### МЕТОД $R$ -ФУНКЦИЙ В МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОБМІНУ У ВОСЬМИГРАННІЙ ПАЛИВНІЙ КАСЕТІ З 37-ма ТВЕЛАМИ

Розглянуто спряжені крайові задачі теплообміну для випадків, коли в'язка нестислива рідина рухається вздовж каналів неканонічного перерізу, обтікаючи пучок стержнів. Досліджено вплив типу упаковки на розподіл швидкості і температури. Для розв'язання застосовано метод  $R$ -функцій у поєднанні з варіаційним методом Рітца. Розглянуто циклічну, шахматну і коридорну упаковки ТВЕЛів.

#### THE $R$ -FUNCTIONS METHOD IN MATHEMATICAL MODELLING OF CONVECTIVE HEAT TRANSFER IN THE OCTAHEDRAL FUEL CARTRIDGE WITH 37 FUEL RODS

The conjugated boundary value problems of heat transfer are considered for cases when the viscous incompressible liquid moves along channels of non-canonical section bypassing the bundle of rods. The influence of the packaging pattern on velocity and temperature distribution is investigated. The  $R$ -functions method in combination with Ritz variational method is used for the solution. The cyclic, chess and rectangular packaging pattern are considered.

Ин-т проблем машиностроения  
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков,  
Харьков. нац. ун-т им. В. Н. Каразина, Харьков

Получено  
28.03.16