

**ПРОГНОЗУВАННЯ ЧАСУ ДО РУЙНУВАННЯ ПРИ ПОВЗУЧОСТІ
ОСЕСИМЕТРИЧНО НАВАНТАЖЕНИХ ПОРОЖНИСТИХ ЦИЛІНДРІВ**

Розглянуто задачу про визначення напружено-деформованого стану, пошкоджуваності та тривалої міцності осесиметрично навантажених порожнистих циліндрів в умовах повзучості в просторовій та оболонковій постановках. Оболонкова постановка ґрунтується на гіпотезі прямолінійного елемента. Розв'язки, отримані на основі теорії оболонок, зіставлено з просторовими розв'язками для циліндрів різної товщини. Розроблено новий спосіб прогнозування часу до руйнування в просторовій постановці на основі даних, отриманих в оболонковій постановці, і навпаки.

Стан проблеми. В сучасній техніці широко застосовують елементи конструкцій у вигляді тіл обертання, що працюють в умовах повзучості. В інженерних розрахунках для таких об'єктів часто застосовують розрахункові схеми у вигляді оболонки обертання [1, 4, 7, 9–13, 15 та ін.]. При цьому залучають як класичну теорію, так і різні уточнені теорії оболонок, що враховують, наприклад, деформації поперечного зсуву. Похибка розв'язку, отриманого в рамках тієї чи іншої теорії оболонок, залежить від співвідношення геометричних розмірів, граничних умов, способів навантаження, механічних характеристик матеріалу тощо. Вивчити одночасний вплив усіх факторів є складним завданням. Одним із можливих шляхів дослідження похибок наближених теорій оболонок є співставлення отриманих на їх основі розв'язків з результатами розв'язання тривимірних задач [4]. Аналіз застосовності класичної і уточнених теорій у задачах пружного деформування оболонок наведено в роботах [4, 9 та ін.]. У той же час оцінці похибки оболонкових моделей у задачах повзучості, пошкоджуваності і тривалої міцності циліндричних оболонок присвячено лише окремі роботи. Так, у статті [16] досліджено повзучість і пошкоджуваність внаслідок повзучості порожнистого циліндра в рамках осесиметричної просторової постановки й на основі гіпотез Кірхгофа – Лява з урахуванням різної поведінки сплаву АК4-1Т при розтягу та стиску в умовах повзучості. На відміну від [16], у розглядуваній роботі використовуємо уточнену модель теорії оболонок, що ґрунтується на гіпотезах прямолінійного елемента [4]. Властивості повзучості вважаємо незалежними від типу напруженого стану. Виконано порівняння результатів розв'язання задачі повзучості й пошкоджуваності для оболонок різної товщини з результатами просторового розв'язку для осесиметрично навантажених порожнистих циліндрів. Відмітимо також відсутність у літературі робіт, присвячених прогнозуванню часу до руйнування порожнистих циліндрів при повзучості.

У зв'язку з цим метою роботи є: **а)** порівняння результатів розв'язання задачі повзучості та пошкоджуваності порожнистих циліндрів при різних умовах навантаження у рамках просторової та оболонкової постановок; **б)** розробка та обґрунтування способу прогнозування часу до руйнування в просторовій постановці на основі даних про час до руйнування, отриманих за оболонковою теорією, і навпаки.

1. Постановка початково-крайової задачі повзучості циліндра в рамках просторової моделі та метод її розв'язання. Розглянемо круговий осесиметрично навантажений порожнистий ізотропний циліндр у циліндричній системі координат $O r \varphi z$. Вісь Oz збігається з віссю обертання. Вважаємо, що температура $T(r, z, t)$ циліндра є незмінною в часі і виконується умова $T(r, z, 0) = T_0$, де T_0 – початкова температура (температура природного, ненапруженого і недеформованого стану).

Задачу розв'язуємо в геометрично лінійній квазістатичній постановці. Припускаємо, що в процесі деформування пластичні деформації не виникають, а компоненти швидкостей пружних деформацій $\dot{\varepsilon}_{kl}^e$ і незворотних деформацій повзучості \dot{p}_{kl} є адитивними:

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \dot{\varepsilon}_{kl}^e + \dot{p}_{kl}, \quad k, \ell = 1, 2, 3.$$

Повзучість і пошкоджувальність багатьох конструкційних матеріалів можуть бути описані рівняннями вигляду [14]

$$\dot{p}_{kl} = \frac{3}{2} A \frac{\sigma_i^m}{(1 - \psi)^n} s_{kl}, \quad \dot{\psi} = B \frac{\sigma_e^k}{(1 - \psi)^q}. \quad (1)$$

Тут $\sigma_e = \alpha \sigma_i + (1 - \alpha) \sigma_1$; σ_i – інтенсивність напружень, σ_1 – максимальне головне напруження; $s_{kl} = \sigma_{kl} - \delta_{kl}(\sigma_{kk})$ – компоненти девіатора напружень; A , B , α , m , n , k , q – константи матеріалу; $\psi = \psi(t)$ – скалярний параметр пошкоджувальності: $\psi(0) = 0$, $\psi(t_*) = 1$, де t_* – час до руйнування.

У циліндричній системі координат маємо

$$\dot{\varepsilon}_{rr}(r, z, t) = \dot{\varepsilon}_{rr}^e(r, z, t) + \dot{p}_{rr}(r, z, t),$$

$$\dot{\varepsilon}_{zz}(r, z, t) = \dot{\varepsilon}_{zz}^e(r, z, t) + \dot{p}_{zz}(r, z, t),$$

$$\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}(r, z, t) = \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^e(r, z, t) + \dot{p}_{\varphi\varphi}(r, z, t),$$

$$\dot{\varepsilon}_{rz}(r, z, t) = \dot{\varepsilon}_{rz}^e(r, z, t) + \dot{p}_{rz}(r, z, t).$$

Тут і далі крапка над символом означає повну похідну за часом t .

Основні невідомі задачі повзучості та пошкоджувальності внаслідок повзучості в довільній точці циліндра можна знайти із розв'язку задачі Коші за часом для системи звичайних диференціальних рівнянь [6 (с. 571), 16]

$$\begin{aligned} \frac{du_r}{dt} &= \dot{u}_r, & \frac{du_z}{dt} &= \dot{u}_z, \\ \frac{d\varepsilon_{rr}}{dt} &= \dot{\varepsilon}_{r,r}, & \frac{d\varepsilon_{zz}}{dt} &= \dot{\varepsilon}_{z,z}, & \frac{d\varepsilon_{\varphi\varphi}}{dt} &= \frac{\dot{u}_r}{r}, \\ \frac{d\gamma_{rz}}{dt} &= 2 \frac{d\varepsilon_{rz}}{dt} = \dot{\varepsilon}_{r,z} + \dot{\varepsilon}_{z,r}, \\ \frac{d\sigma_{rr}}{dt} &= \lambda(\dot{\varepsilon}_{zz} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{p}_{zz} - \dot{p}_{\varphi\varphi}) + \lambda_1(\dot{\varepsilon}_{rr} - \dot{p}_{rr}), \\ \frac{d\sigma_{zz}}{dt} &= \lambda(\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{p}_{rr} - \dot{p}_{\varphi\varphi}) + \lambda_1(\dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{p}_{zz}), \\ \frac{d\sigma_{\varphi\varphi}}{dt} &= \lambda(\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{p}_{rr} - \dot{p}_{zz}) + \lambda_1(\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \dot{p}_{\varphi\varphi}), \\ \frac{d\sigma_{rz}}{dt} &= G(\dot{\gamma}_{rz} - 2\dot{p}_{rz}), \\ \frac{dp_{rr}}{dt} &= \dot{p}_{rr}, & \frac{dp_{zz}}{dt} &= \dot{p}_{zz}, & \frac{dp_{\varphi\varphi}}{dt} &= \dot{p}_{\varphi\varphi}, & \frac{dp_{rz}}{dt} &= \dot{p}_{rz}, & \frac{d\psi}{dt} &= \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут $u_r(r, z, t)$, $u_z(r, z, t)$ – переміщення уздовж осей Or і Oz відповідно;

ε_{rr} , ε_{zz} , $\varepsilon_{\varphi\varphi}$, ε_{rz} – компоненти тензора повних деформацій; σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{rz} – компоненти тензора напружень; $\lambda = \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}$; $\lambda_1 = \lambda + 2G$;

$G = \frac{E}{2 + 2\nu}$; E , ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу; p_{rr} , p_{zz} , $p_{\varphi\varphi}$, p_{rz} – компоненти тензора деформацій повзучості.

У початковий момент часу деформації повзучості і параметр пошкоджуваності дорівнюють нулеві: $p_{rr} = p_{zz} = p_{\phi\phi} = p_{rz} = \psi = 0$. Початкові умови для решти шуканих функцій знаходимо із розв'язку задачі пружного деформування циліндра.

Початкову задачу для системи рівнянь (2) розв'язуємо методом Рунге – Кутта – Мерсона (РКМ) з автоматичним вибором кроку за часом [6, с. 544]. Праві частини рівнянь (2) у фіксовані моменти часу $t \neq 0$, які відповідають схемі РКМ, знаходимо за допомогою розв'язку варіаційної задачі для функціонала у формі Лагранжа для осесиметрично навантаженого тіла скінченної довжини [6 (с. 570), 16]

$$\begin{aligned} \Lambda(\dot{u}_r, \dot{u}_z) = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[\lambda_1 \left(\dot{u}_{r,r}^2 + \dot{u}_{z,z}^2 + \frac{\dot{u}_r^2}{r^2} \right) + G(\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r})^2 + \right. \\ & \left. + 2\lambda \left(\dot{u}_{r,r} \dot{u}_{z,z} + \frac{\dot{u}_r (\dot{u}_{r,r} + \dot{u}_{z,z})}{r} \right) \right] r dr dz - \\ & - \iint_{\Omega} \left[\dot{u}_{r,r} \dot{N}_r^f + \dot{u}_{z,z} \dot{N}_z^f + \frac{\dot{u}_r \dot{N}_\phi^f}{r} + \dot{N}_{rz}^f (\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r}) \right] r dr dz - \\ & - \int_{\partial\Omega_p} (\dot{P}_n \dot{u}_n + \dot{P}_\tau \dot{u}_\tau) d\partial\Omega, \end{aligned} \quad (3)$$

де $\dot{u}_r(r, z, t)$, $\dot{u}_z(r, z, t)$ – кінематично можливі швидкості переміщень відповідно вздовж осей Or та Oz ; $\dot{P}_n^0(r, z, t)$, $\dot{P}_\tau^0(r, z, t)$ – швидкості нормальної та дотичної складових зовнішніх поверхневих сил; \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ – зовнішня нормаль та дотична до $\partial\Omega$; $\dot{u}_n = \dot{u}_r n_1 + \dot{u}_z n_2$, $\dot{u}_\tau = \dot{u}_z n_1 - \dot{u}_r n_2$ – нормальна і тангенціальна складові вектора швидкостей переміщень; n_1 , n_2 – напрямні косинуси нормалі \mathbf{n} . Швидкості «фіктивних» сил, зумовлені деформаціями повзучості, обчислюємо за формулами

$$\begin{aligned} \dot{N}_r^f &= [\lambda_1 \dot{p}_{rr} + \lambda(\dot{p}_{zz} + \dot{p}_{\phi\phi})], & \dot{N}_z^f &= [\lambda_1 \dot{p}_{zz} + \lambda(\dot{p}_{rr} + \dot{p}_{\phi\phi})], \\ \dot{N}_\theta^f &= [\lambda_1 \dot{p}_{\phi\phi} + \lambda(\dot{p}_{rr} + \dot{p}_{zz})], & \dot{N}_{rz}^f &= 2G\dot{p}_{rz}. \end{aligned}$$

Швидкості деформацій повзучості в функціоналі (3) вважаються заданими і не варіюються.

Варіаційні задачі для функціонала (3) розв'язуємо методом Рітца в поєднанні з методом R -функцій [8], згідно з яким наближений розв'язок крайової задачі подаємо у вигляді формули – структури розв'язку, яка точно задовольняє граничні умови і є інваріантною щодо форми області.

Для розв'язання задачі пружного деформування циліндра при знаходженні початкових умов для рівнянь (2) можна використати наведений вище функціонал. При цьому у формулі (3) необхідно замінити похідні функцій за часом самими функціями, а «фіктивні» сили покласти рівними нулеві.

2. Постановка і метод розв'язання задачі на основі оболонкової теорії. Розглядаючи осесиметрично навантажений порожнистий циліндр в рамках уточненої теорії оболонок, припускаємо, що виконуються гіпотези прямолінійного елемента [4]. Відповідно до цих гіпотез зв'язок між осьовим u_z і нормальним u_ζ переміщеннями довільної точки оболонки з відповідними переміщеннями u , w точки серединної поверхні має вигляд

$$u_z = u + \zeta \Psi_z, \quad u_\zeta = w, \quad \Psi_z = -w' + \gamma_z, \quad (4)$$

де ζ – координата, яка відраховується по нормалі до серединної поверхні з радіусом $r = R$; ψ_z, γ_z – відповідно повний кут прямолінійного елемента і кут, зумовлений поперечним зсувом; штрихом позначаємо похідну за координатою. Використовуючи (4) і співвідношення Коші, зв'язок між компонентами тензора деформацій $\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{z\zeta}$ у довільній точці оболонки, компонентами деформації серединної поверхні $\varepsilon_z, \varepsilon_\varphi$, параметром зміни її кривини α_z і кутом зсуву γ_z подамо у вигляді

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_z + \zeta \alpha_z, & \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{\varepsilon_\varphi}{a_\varphi}, & 2\varepsilon_{z\zeta} &= \gamma_z, \\ \varepsilon_z &= u', & \varepsilon_\varphi &= \frac{w}{R}, & \alpha_z &= \psi'_z, & a_\varphi &= 1 + \frac{\zeta}{R}. \end{aligned} \quad (5)$$

Компоненти напружень визначаються рівностями

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= B_{11}\varepsilon_{zz} + B_{12}\varepsilon_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}^a, & \sigma_{\varphi\varphi} &= B_{12}\varepsilon_{zz} + B_{22}\varepsilon_{\varphi\varphi} - \sigma_{\varphi\varphi}^a, \\ \sigma_{z\zeta} &= B_{33}\varepsilon_{z\zeta} - \sigma_{z\zeta}^a. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут B_{ij} – коефіцієнти жорсткості: $B_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}$, $B_{12} = \nu B_{11}$, $B_{33} = 2G$; індексом « a » відмічено величини додаткових напружень:

$$\sigma_{zz}^a = B_{11}(p_{zz} + \nu p_{\varphi\varphi}), \quad \sigma_{\varphi\varphi}^a = B_{22}(p_{\varphi\varphi} + \nu p_{zz}), \quad \sigma_{z\zeta}^a = B_{33}p_{z\zeta},$$

$p_{zz}, p_{\varphi\varphi}, p_{z\zeta}$ – компоненти деформацій повзучості, які залежать від напружень, параметрів повзучості і від параметра пошкоджуваності матеріалу і визначаються шляхом чисельного інтегрування фізичних рівнянь. Як і у випадку просторової задачі, це інтегрування здійснюється методом РКМ.

Вводячи інтегральні характеристики напруженого стану (радіальне зусилля N_r , осьове зусилля N_z та осьовий згинаючий момент M_z) і використовуючи рівняння рівноваги [4], кінематичні (5), фізичні (6) і статичні рівняння зводимо до системи звичайних диференціальних рівнянь шостого порядку:

$$\mathbf{Y}' = P(z)\mathbf{Y} + \mathbf{f}, \quad \mathbf{Y} = \{N_r, N_z, M_z, u_r, u_z, \psi_z\}, \quad (7)$$

де $P(z)$ – матриця системи, яка залежить від пружних констант матеріалу; \mathbf{f} – вектор вільних членів, що також залежить від деформацій повзучості. Розв'язок системи (7) повинен задовольняти граничні умови на торцях циліндра. Ненульові елементи матриці $P(z)$ і вектора \mathbf{f} визначаються рівностями

$$\begin{aligned} p_{12} &= -p_{54} = -\frac{\mu_1}{R}, & p_{13} &= -p_{64} = \frac{\mu_2}{R}, & p_{14} &= \frac{C_{02} + \mu_1 C_{01} - \mu_2 C_{11}}{R^2}, \\ p_{31} &= -p_{46} = 1, & p_{41} &= \frac{1}{C_{33}}, & p_{52} &= \frac{C_{20}}{\delta}, & p_{53} &= p_{62} = -\frac{C_{10}}{\delta}, & p_{63} &= \frac{C_{00}}{\delta}, \\ f_1 &= -\frac{\mu_1 N_z^a + N_\varphi^a - \mu_2 M_z^a}{R} - q_\zeta, & f_2 &= -q_z, & f_3 &= -m_z, & f_4 &= \frac{Q_z^a}{C_{33}}, \\ f_5 &= \frac{C_{20} N_z^a - C_{10} M_z^a}{\delta}, & f_6 &= -\frac{C_{10} N_z^a - C_{00} M_z^a}{\delta}, \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$\mu_1 = \frac{C_{10} C_{11} - C_{01} C_{20}}{\delta}, \quad \mu_2 = \frac{C_{00} C_{11} - C_{01} C_{10}}{\delta}, \quad \delta = C_{00} C_{20} - C_{10}^2,$$

Величини q_z, q_ζ, m_z , що входять в (8), – віднесені до серединної

поверхні розподілені поверхневі навантаження і момент [4]. Інтегральні характеристики жорсткості C_{pq} , C_{33} , а також додаткові зусилля N_z^a , N_ϕ^a , Q_z^a і момент M_z^a визначаються рівностями

$$C_{pq} = B_{11} F\{b_q \zeta^p\}, \quad p, q = 0, 1, 2, \quad C_{33} = 2Gh,$$

$$b_0 = a_\phi, \quad b_1 = \nu, \quad b_2 = \frac{1}{a_\phi}, \quad F\{\cdot\} = \int_{-h/2}^{h/2} (\cdot) d\zeta,$$

$$N_z^a = F\{\sigma_{zz}^a a_\phi\}, \quad N_\phi^a = F\{\sigma_{\phi\phi}^a\}, \quad Q_z^a = F\{\sigma_{z\zeta}^a a_\phi\}, \quad M_z^a = F\{\sigma_{zz}^a a_\phi \zeta\}. \quad (9)$$

Інтеграли, які входять в (9), обчислюємо чисельно за допомогою процедури, що поєднує методи Сімпсона і Ньютона. На кожному часовому кроці крайову задачу (7) розв'язуємо методом Рунге – Кутта з дискретною ортогоналізацією за С. К. Годуновим.

Зауважимо наступне.

- Наведені вище рівняння призначені для опису деформування в умовах повзучості циліндричних оболонок з урахуванням пошкоджуваності при відсутності теплових навантажень. У рівняннях враховуються величини ζ/R , що може виявитися доцільним для оболонок середньої товщини і неістотним для тонких оболонок.

- Незалежно від урахування чи неврахування величин ζ/R , ключові рівняння, що базуються на гіпотезах Кірхгофа – Лява, можуть бути отримані за допомогою (8), якщо в них покласти $1/C_{33} = 0$, а в рівностях (4), (5) покласти $\gamma_z = 0$ [2].

- У роботі [3] показано, що при наявності температурних деформацій урахування величин ζ/R може призвести до появи значних «фіктивних» напружень. Тому в температурних задачах цими величинами слід нехтувати порівняно з одиницею.

3. Числові результати. Наведемо зіставлення результатів розв'язування задачі повзучості й пошкоджуваності циліндра, отриманих в рамках просторової та оболонкової постановок.

Розглянемо порожнистий циліндр довжини $\ell = 0.1$ м, товщини $h = 0.0125$ м і радіуса серединної поверхні $R = 0.1$ м. У цьому випадку відношення товщини до радіуса серединної поверхні $\xi = h/R = 1/8$, отже, з точки зору теорії оболонок, розглядається оболонка середньої товщини. Циліндр виготовлений з алюмінієвого сплаву АК4-1Т і деформується при температурі $T = T_0 = 473$ К. Механічні властивості сплаву АК4-1Т при температурі $T = 473$ К наведено, наприклад, у роботах [5, 7 (с. 512)]. Пружні константи матеріалу $E = 60$ ГПа, $\nu = 0.35$. Виберемо спрощену модель повзучості, побудовану тільки на експериментальних даних при розтягу. Константи матеріалу в рівняннях (1) мають такі значення:

$$A = 5.5 \cdot 10^{-23} (\text{МПа})^{-(m+1)} \cdot (\text{год})^{-1}, \quad B = 5.5 \cdot 10^{-24} (\text{МПа})^{-k} \cdot (\text{год})^{-1},$$

$$m = 7, \quad k = 9, \quad n = q = 3, \quad \alpha = 1.$$

Розглянемо два види навантаження.

1°). На внутрішній поверхні $r = R_1 = R - h/2$ циліндр навантажено сталим тиском P_1 . У цьому випадку зв'язок між тиском і віднесеним до серединної поверхні оболонки навантаженням q_ζ визначається рівністю $P_1 = q_\zeta R/R_1$. Для обчислень прийнято $q_\zeta = 16.5$ МПа.

2°). На зовнішній поверхні циліндра $r = R_2 = R + h/2$ діє тиск P_2 , який змінюється уздовж осі циліндра згідно з розподілом

$$P_2 = \frac{1}{2} P \left(1 + \cos \frac{2\pi z}{\ell} \right). \quad (10)$$

У цьому випадку зв'язок між величинами q_ζ і P_2 визначається за формулою $q_\zeta = -P_2 R_2 / R$. Величину P в (10), яка визначає максимальне значення навантаження, при обчисленнях вибрано рівною $P = 23.8$ МПа.

Граничні умови крайової задачі, записані для швидкостей функцій, у рамках просторової постановки задано у вигляді

$$\begin{aligned} z = \pm \frac{\ell}{2} : \quad & \dot{u}_r = 0, \quad \dot{\sigma}_z = 0, \\ z = R_1, \quad z = R_2 : \quad & \dot{\sigma}_r = \dot{\sigma}_{rz} = 0. \end{aligned}$$

Можна показати, що структура розв'язку, яка задовольняє кінематичні граничні умови для швидкостей переміщень, має вигляд

$$\dot{u}_r = \omega \Phi_1, \quad \dot{u}_z = z \Phi_2,$$

де Φ_1, Φ_2 – невизначені компоненти структури розв'язку; $\omega = \frac{1}{\ell} \left(\frac{\ell^2}{4} - z^2 \right) \geq 0$ – смуга Ω між лініями $z = -\frac{\ell}{2}$ і $z = \frac{\ell}{2}$ ($\omega = 0$, $\omega_{,n} = -1$ на межі $\partial\Omega$, $\omega > 0$ всередині смуги). При чисельній реалізації невизначені компоненти структури розв'язку Φ_1, Φ_2 подаємо у вигляді скінченних рядів

$$\Phi_1(r, z, t) = \sum_{n=1}^{N_1} C_n^{(1)}(t) f_n^{(1)}(r, z), \quad \Phi_2(r, z, t) = \sum_{n=1}^{N_2} C_n^{(2)}(t) f_n^{(2)}(r, z),$$

де $C_n^{(1)}, C_n^{(2)}$ – невизначені коефіцієнти, які на кожному часовому кроці знаходимо методом Рітца; t – фіксований момент часової дискретизації схеми РКМ або дискретизації за часом для видачі результатів розрахунку; $\{f_n^{(1)}\}, \{f_n^{(2)}\}$ – системи лінійно незалежних функцій, за які тут використовуємо бікубічні сплайни Шенберга. Системи сплайнів будуємо на регулярній сітці $N_r \times N_z$, де N_r, N_z – кількість відрізків дискретизації уздовж осей O_r та O_z відповідно.

Наближений розв'язок задачі повзучості циліндра, сформульованої в рамках просторової постановки, отримано при таких параметрах просторової та часової дискретизації: $N_r = 10$, $N_z = 20$, початковий крок за часом $\Delta t_0 = 10^{-3}$ год, задана похибка обчислень у методі РКМ $\delta = 10^{-4}$. Критерієм зупинки процесу розв'язування і знаходження часу до руйнування t_* є виконання умови $\psi \geq 0.9$ у будь-якій точці просторової дискретизації.

При розв'язанні задачі в рамках теорії оболонки розглянуто праву симетричну половину оболонки, тобто $0 \leq z \leq \ell/2$. На меридіональний перетин оболонки нанесено рівномірну сітку зі 101 точки вздовж осі O_z і 11 точок по товщині. Інші параметри дискретизації: $\Delta t_0 = 10^{-5}$ год, $\delta = 10^{-6}$. Граничні умови сформульовано так:

$$\begin{aligned} z = 0 : \quad & N_r = u_z = \psi_z = 0, \\ z = \frac{\ell}{2} : \quad & N_z = M_z = u_r = 0. \end{aligned}$$

Розрахунки показали, що для розглянутих видів навантаження як у просторовому, так і в оболонковому розв'язках руйнування починається у центрі циліндра на внутрішній його поверхні.

При навантаженні виду 1° час до руйнування в просторовому розв'язку $t_{3D} = 4304$ год, а в оболонковому – $t_{SH} = 5399$ год (символ «*» для спрощення записів опущено). Відносне відхилення для часу до руйнування

$$\Delta = (t_{3D} - t_{SH}) / t_{3D} \quad (11)$$

становило $\Delta = -0.254$.

При навантаженні виду 2° час до руйнування в просторовому розв'язку $t_{3D} = 4291$ год, а в оболонковому – $t_{SH} = 3087$ год; $\Delta = 0.281$.

Деякі результати розрахунків наведено на рис. 1–6, де рисунки **а)** і **б)** відповідають видам навантаження 1° і 2° .

На рис. 1 показано графіки зміни вздовж осі циліндра радіальних переміщень серединної поверхні в різні моменти часу. Криві 1 відповідають моменту часу $t = 0$, криві 2 – $t = 2000$ год, криві 3 – часу до руйнування $t = t_*$. Тут і далі лінії з маркерами відповідають просторовому розв'язку.

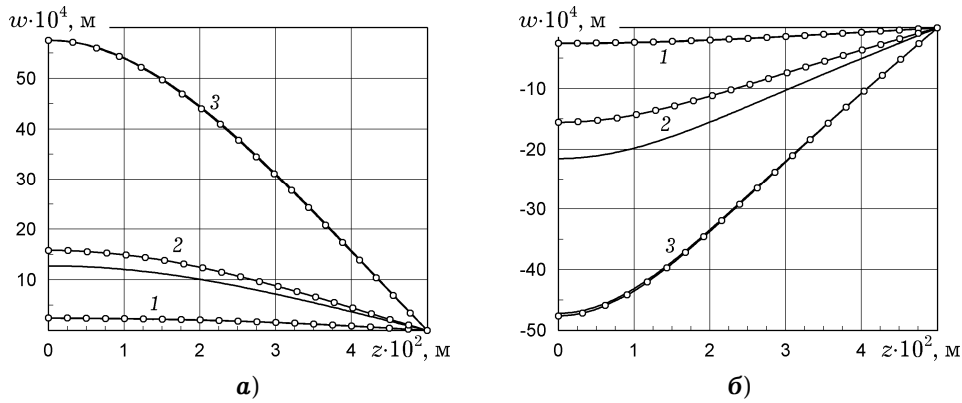


Рис. 1

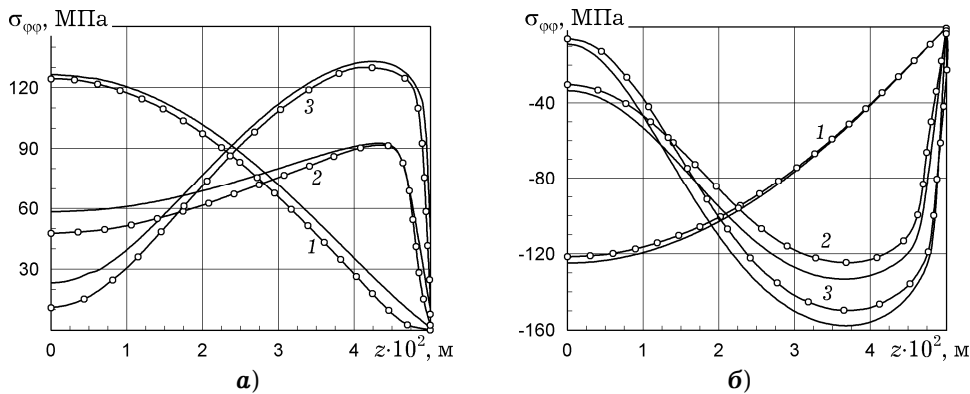


Рис. 2

На рис. 2 для тих самих значень часу наведено графіки колових напружень $\sigma_{\phi\phi}$ на внутрішній поверхні циліндра, де починається руйнування. Такі ж графіки колових $p_{\phi\phi}$ і осьових p_{zz} деформацій повзучості наведено на рис. 3, рис. 4, а для параметра пошкоджуваності ψ – на рис. 5. Зміну в часі параметра пошкоджуваності ψ , колових і осьових напружень $\sigma_{\phi\phi}$ і σ_{zz} у центрі циліндра на його внутрішній поверхні ілюструє рис. 6.

З рисунків бачимо, що незважаючи на те, що розглянутий циліндр не є тонким, можемо зробити висновок про задовільне співпадіння результатів для характеристик напружено-деформованого стану і часу до руйнування, отриманих за допомогою просторової та оболонкової теорій.

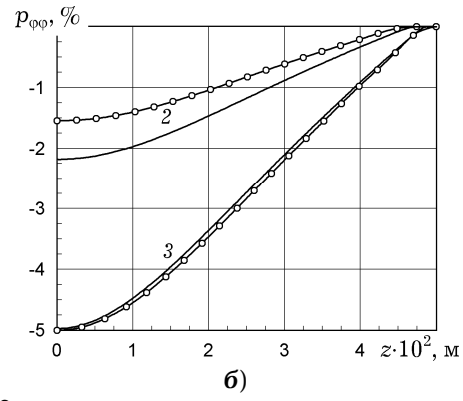
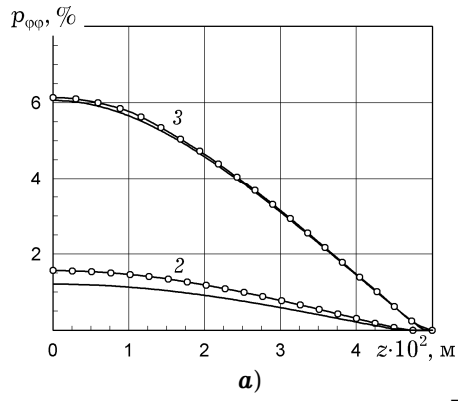


Рис. 3

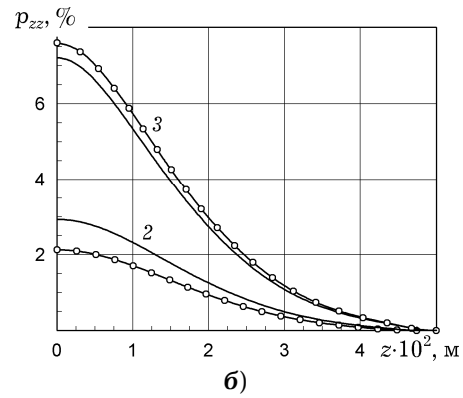
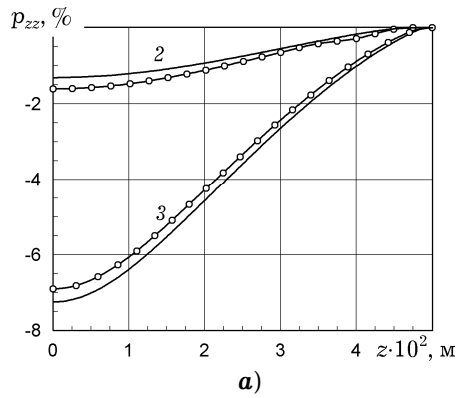


Рис. 4

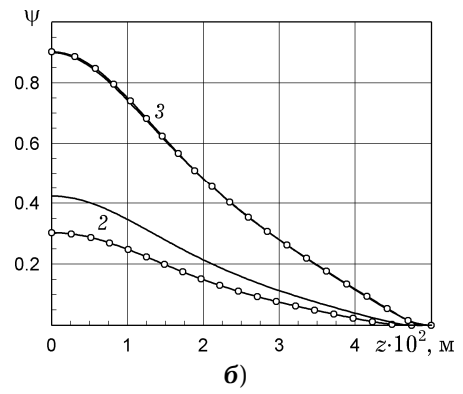
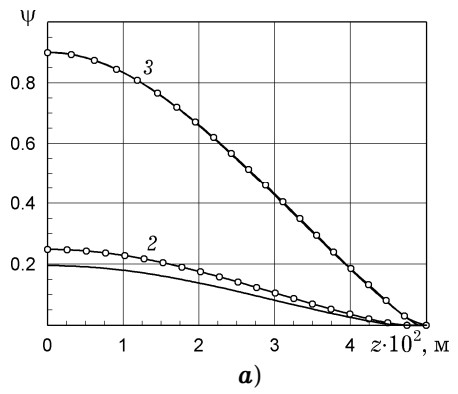


Рис. 5

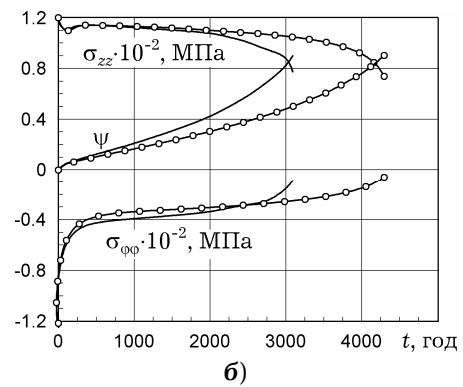
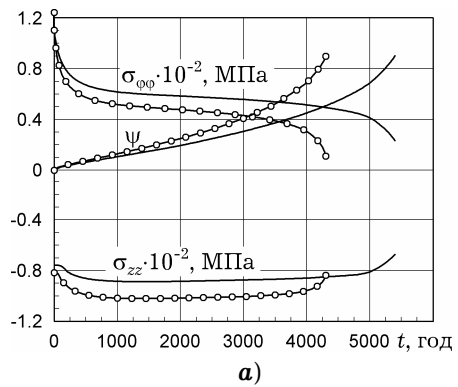


Рис. 6

4. Спосіб прогнозування часу до руйнування при повзучості. Для обґрунтування способу прогнозування часу до руйнування при повзучості порожнистих циліндрів і циліндричних оболонок звернемося до прикладів із попереднього параграфа.

Розглянемо циліндр при тих самих граничних умовах, властивостях матеріалу і геометричних розмірах, за винятком товщини. У розрахунках значення $\xi = h/R$ варіювалися в межах від 1/50 до 1/8. Вихідні дані й результати розрахунків при навантаженнях видів 1° і 2° подано відповідно в табл. 1 і табл. 2. Значення q_ζ при навантаженні виду 1° вибрано так, щоб час до руйнування в усіх наведених прикладах розрахунку був близьким. Аналогічно вибрано значення P при навантаженні виду 2°.

У результаті обчислень встановлено, що у всіх варіантах розрахунку для розглянутих видів навантаження руйнування починається в центрі циліндра на внутрішній поверхні. У табл. 1 і табл. 2 наведено значення часу до руйнування t_{3D} , отримані з розрахунків за просторовою моделлю, і значення часу до руйнування t_{SH} , отримані на основі оболонкової моделі. Там також подано значення відносного відхилення Δ для часу до руйнування (за формулою (11)).

Таблиця 1

ξ	1/50	1/25	1/20	1/16	1/10	1/8
q_ζ , МПа	2.55	5.1	6.4	8.0	13.0	16.5
t_{SH} , год	4594	4707	4688	4892	5200	5399
t_{3D} , год	4360	4281	4172	4277	4291	4304
Δ	-0.054	-0.099	-0.124	-0.144	-0.212	-0.254
t_{SH}^{pr} , год	4553	4659	4633	4868	5239	5493
t_{3D}^{pr} , год	4400	4325	4222	4298	4259	4230

Таблиця 2

ξ	1/50	1/25	1/20	1/16	1/10	1/8
P , МПа	3.17	6.95	8.85	11.3	18.7	23.8
t_{SH} , год	4096	3750	3806	3623	3305	3087
t_{3D} , год	4245	4111	4291	4216	4266	4291
Δ	0.035	0.088	0.113	0.141	0.225	0.281
t_{SH}^{pr} , год	4056	3744	3813	3628	3315	3095
t_{3D}^{pr} , год	4287	4117	4284	4210	4254	4280

Із таблиць видно, що $t_{3D} < t_{SH}$ для навантаження виду 1° для всіх значень ξ , тому відхилення Δ усюди від'ємні, а для навантаження виду 2° – додатні. Зі збільшенням ξ відхилення Δ зростають за модулем в обох випадках.

Розглянемо спочатку циліндр під дією навантаження виду 1°. З аналізу залежності відхилень Δ від величини ξ робимо висновок, що вона є близькою до лінійної і її можна апроксимувати залежністю

$$\Delta(\xi) = k\xi. \quad (12)$$

Значення кутового коефіцієнта k у рівності (12) визначено методом найменших квадратів, одержали $k = -2.21$. Для його обчислення вибирали $\xi = 1/50, 1/25, 1/16, 1/10$.

Прийнявши для параметра Δ лінійну апроксимацію (12), отримаємо формулу для прогнозування часу до руйнування за оболонковою теорією на основі просторового розв'язку:

$$t_{SH}^{pr} = t_{3D}(1 - k\xi). \quad (13)$$

З (11), (12) також впливає формула

$$t_{3D}^{pr} = t_{SH} \frac{1}{1 - k\xi}, \quad (14)$$

що дозволяє на основі оболонкового розв'язку прогнозувати час до руйнування у просторовій постановці. Ця формула приваблива тим, що для прогнозування часу до руйнування у просторовій постановці необхідно знати лише коефіцієнт k і значення часу до руйнування в оболонковій постановці. З огляду на те, що витрачений на отримання просторового розв'язку час може на кілька порядків перевищувати відповідний час обчислень в оболонковій постановці, отримуємо безсумнівну вигоду.

На основі знайденого значення кутового коефіцієнта $k = -2.21$ за формулами (13), (14) обчислено прогнозовані значення часу до руйнування в оболонковій t_{SH}^{pr} та просторовій t_{3D}^{pr} постановках (табл. 1). Можна переконатися, що максимальна різниця розрахункових і прогнозованих значень спостерігається при $\xi = 1/8$ і становить 1.7%. Слід зауважити, що при визначенні коефіцієнта k не використовувалися значення $\xi = 1/20$ і $\xi = 1/8$, проте отримані розрахункові і прогнозовані значення часу до руйнування також добре узгоджуються між собою.

Очевидно, що для побудови прямої, що виходить із початку координат, на площині $\xi O\Delta$ досить знати одну точку. Нехай ця точка відповідає значенню $\xi = 1/10$. Тоді кутовий коефіцієнт дорівнюватиме $k = -2.21$. Можна переконатися, що у цьому випадку відмінності прогнозованих значень часу до руйнування від розрахункових не перевищують 1.6%.

Тепер розглянемо циліндр під дією навантаження виду 2° . Кутовий коефіцієнт у формулі (12), обчислений методом найменших квадратів, становить $k = 2.23$. При його визначенні використано ті самі значення ξ , що і для навантаження виду 1° . Із порівняння наведених у табл. 2 розрахункових t_{SH} , t_{3D} і прогнозованих t_{SH}^{pr} , t_{3D}^{pr} значень часу до руйнування випливає, що вони добре збігаються одне з одним. Відхилення в усіх випадках є меншим ніж 1%.

Зазначимо, що для циліндрів, що знаходяться під дією навантаження розглянутих видів, модулі коефіцієнтів k виявилися майже рівними.

Запропонований спосіб прогнозування часу до руйнування, що ґрунтується на лінійній апроксимації (12), можна застосовувати в широкому діапазоні зміни відносної товщини циліндра, і для знаходження коефіцієнта k потрібно лише двох розрахунків при фіксованому значенні ξ . У цьому полягає його безперечна перевага. В інших випадках (наприклад, для інших граничних умов або видів навантаження) необхідно перевіряти прийнятність апроксимації. Визначення меж застосовності лінійної або будь-якої іншої апроксимації вимагає додаткових досліджень.

Висновки. Розроблено спосіб прогнозування часу до руйнування в умовах повзучості порожнистих циліндрів і циліндричних оболонок, що знаходяться під дією поперечного навантаження. Запропонований підхід

базується на аналізі відхилення оболонкового розв'язку від просторового. Він дозволяє достатньо точно прогнозувати час до руйнування в просторовій постановці, використовуючи результати оболонкового розв'язку, і навпаки – прогнозувати час до руйнування в оболонковій постановці на основі просторового розв'язку.

1. Бурлаков А. В., Львов Г. И., Морачковский О. К. Длительная прочность оболочек. – Харьков: Вища шк., 1981. – 104 с.
2. Галишин А. З. Расчет осесимметричного термовязкоупругопластического состояния слоистых ортотропных оболочек вращения с разветвленным меридианом // Прикл. механика. – 1993. – **29**, № 1. – С. 61–69.
Te same: Galishin A. Z. Axisymmetric thermoviscoelastoplastic state of laminar orthotropic shells of revolution with a branched meridian // Int. Appl. Mech. – 1993. – **29**, No. 1. – P. 53–60.
3. Галишин А. З., Шевченко Ю. Н. К расчету термоупругого напряженного состояния оболочек вращения средней толщины // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 5. – С. 58–67.
Te same: Galishin A. Z., Shevchenko Yu. N. Calculating the thermoelastic stress state of medium-thickness shells of revolution // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, No. 5. – P. 526–533.
4. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т. – Т. 4.)
5. Горев В. В., Рубанов В. В., Соснин О. В. О ползучести материалов с разными свойствами при растяжении и сжатии // Проблемы прочности. – 1979. – № 7. – С. 62–67.
Te same: Gorev V. V., Rubanov V. V., Sosnin O. V. Creep of materials with different properties in tension and compression // Strength Mater. – 1979. – **11**, No. 7. – P. 735–740.
6. Золочевский А. А., Скленус А. Н., Скленус С. Н. Нелинейная механика деформируемого твердого тела. – Харьков: Бизнес Инвестор Групп, 2011. – 720 с.
7. Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов. – Москва: Физматлит, 2015. – 495 с.
8. Рвачев В. Л. Теория R -функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
9. Сало В. А. Краевые задачи статики оболочек с отверстиями. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2003. – 216 с.
10. Шевченко Ю. Н., Бабешко М. Е., Терехов Р. Г. Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 328 с.
11. Шевченко Ю. Н., Галишин А. З., Бабешко М. Е. Термовязкоупругопластическое деформирование составных оболочек вращения при повреждаемости материала // Прикл. механика. – 2015. – **51**, № 6. – С. 3–11.
Te same: Shevchenko Yu. N., Galishin A. Z., Babeshko M. E. Thermoviscoelastoplastic deformation of compound shells of revolution made of a damageable material // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, No. 6. – P. 607–613.
12. Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Sichov A. Zum Kriechen dünner Rotationsschalen unter Einbeziehung geometrischer Nichtlinearität sowie der Asymmetrie der Werkstoffigenschaften // Forschung im Ingenieurwesen. – 1996. – **62**, No. 3. – S. 47–57.
13. Altenbach H., Naumenko K. Shear correction factors in creep-damage analysis of beams, plates and shells // JSME Int. J. Ser. A. – 2002. – **45**, No. 1. – P. 77–83.
14. Dunne F. P. E., Othman A. M., Hall F. R., Hayhurst D. R. Representation of uniaxial creep curves using continuum damage mechanics // Int. J. Mech. Sci. – 1990. – **32**, No. 11. – P. 945–957.
15. Naumenko K. On the use of the first order shear deformation models of beams, plates and shells in creep lifetime estimations // Tech. Mech. – 2000. – **20**, No. 3. – P. 215–226.
16. Zolochevsky A., Sklepus S., Galishin A., Kühhorn A., Kober M. A comparison between the 3D and the Kirchhoff – Love solutions for cylinders under creep-damage conditions // Tech. Mech. – 2014. – **34**, No. 2. – P. 104–113.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВРЕМЕНИ ДО РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ ОСЕСИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ

Рассматривается задача определения напряженно-деформированного состояния, повреждаемости и длительной прочности осесимметрично нагруженных полых цилиндров в условиях ползучести в пространственной и оболочечной постановках. Оболочечная постановка базируется на гипотезе прямолинейного элемента. Решения, полученные на основе теории оболочек, сопоставлены с пространственными решениями для цилиндров различной толщины. Разработан новый способ прогнозирования времени до разрушения в пространственной постановке на основе данных, полученных в оболочечной постановке, и наоборот.

PREDICTION OF THE FAILURE TIME FOR AXISYMMETRICALLY LOADED HOLLOW CYLINDERS UNDER CREEP CONDITIONS

The problem on the determination of the stress-strain state, damageability and long-term strength of axisymmetrically loaded hollow cylinders under creep conditions is considered in both spatial and shell formulations. The shell formulation is based on the hypothesis of rectilinear element. Solutions obtained on the basis of the theory of shells are compared with the spatial solutions for cylinders of different thickness. A new method for the prediction of time-to-failure in spatial formulation is developed on the basis of data obtained in the shell formulation, and vice versa.

¹ Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ,

² Ін-т проблем машинобудування
ім. А. М. Підгорного НАН України, Харків

Одержано
10.11.16