УДК 513. 88 ***Пам'яті М. Л. Горбачука***

О. Г. Сторож

ПРО РОЗВ'ЯЗНІ РОЗШИРЕННЯ ДЕЯКИХ НЕЩІЛЬНО ВИЗНАЧЕНИХ ОПЕРАТОРІВ І РЕЗОЛЬВЕНТИ ТАКИХ РОЗШИРЕНЬ

У термінах абстрактних крайових умов досліджено один клас розширень скінченновимірного звуження замкненого щільно визначеного лінійного оператора у гільбертовому просторі. Із застосуванням методів теорії лінійних відношень знайдено резольвентні множини та побудовано резольвенти розглядуваних розширень, множина яких параметризується деяким допоміжним оператором. У випадку, коли цей оператор є нормально розв'язним, наведено певні уточнення основних результатів.

Вступ та основні позначення. Теорію розширень нещільно визначених операторів започатковано М. О. Красносельським [5] і А. В. Штраусом [10]. У згаданих працях (див. також [19]) наведено опис самоспряжених [5] і дисипативних [10] розширень ермітового оператора у термінах дефектних просторів. Різні класи розширень таких операторів у термінах абстрактних просторів граничних значень, тобто у вигляді, який у випадку диференціальних операторів приводить безпосередньо до крайових умов, вивчалися в [4, 6, 13, 17]. При цьому корисною виявилася ініційована Р. Аренсом [11] теорія лінійних відношень у гільбертовому просторі. Різні класи розширень лінійних операторів і лінійних відношень були об'єктами досліджень в [1, 2, 7, 12, 14–20]. Лінійні відношення, породжені різними диференціальними виразами, досліджувалися, наприклад, у [13, 17, 18].

Метою цієї статті, яку можна трактувати як продовження праць [8, 9, 21], є встановлення умов розв'язності для одного класу розширень-відношень скінченновимірного звуження замкненого щільно визначеного лінійного оператора в гільбертовому просторі та знаходження резольвент досліджуваних розширень.

Надалі під H розуміємо фіксований комплексний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot\,|\,\cdot)$, а під $\mathcal{C}(H)$ – множину замкнених лінійних щільно визначених операторів у просторі H. Будь-який (замкнений) лінійний многовид в $H^2 \overset{\text{def}}{=} H \oplus H$ називають (замкненим) лінійним відношенням в H, а лінійний оператор ототожнюють з його графіком. Для будь-якого лінійного відношення (зокрема, оператора) $T \subset H^2$ існує спряжене (замкнене лінійне) відношення $T^* \subset H^2$, яке визначається так:

$$T^* = \hat{J}T^{\perp}\,(= (\hat{J}T)^{\perp})\,,$$

де $\forall (y, y') \in H^2$ $\hat{J}(y, y') = (-iy', iy)$, а «$\perp$» – символ ортогонального доповнення в H^2.

Використовуємо такі позначення:

$D(T)$, $R(T)$, $\ker T$ – відповідно область визначення, область значень і многовид нулів відношення (оператора) T:

$$D(T) = \{y \in H \mid (\exists y' \in H) : (y, y') \in T\}\,,$$

$$R(T) = \{y' \in H \mid (\exists y \in H) : (y, y') \in T\}\,,$$

$$\ker T = \{y \in H : (y, 0) \in T\}\,;$$

якщо $\lambda \in \mathbb{C}$, то

$$\lambda T = \{(y, \lambda y') : (y, y') \in T\}\,,$$

$$T-\lambda=\{(y,y'-\lambda y):(y,y')\in T\}$$

(таким чином, $\ker(T-\lambda)=\{y\in H:(y,0)\in T-\lambda\}\equiv\{y\in H:(y,\lambda y)\in T\}$);

$$\hat{\ker}(T-\lambda)=\{(y,\lambda y):y\in\ker(T-\lambda)\};$$

$$T^{-1}=\{(y',y)\in H^2:(y,y')\in T\}\qquad T(0)=\{y'\in H:(0,y')\in T\};$$

$\rho(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\ker(T-\lambda)=\{0\},R(T-\lambda)=H\}$ − резольвентна множина відношення T;

якщо X, Y − гільбертові простори, то $(\cdot|\cdot)_X$ − символ скалярного добутку на X, а $\boldsymbol{\mathcal{B}}(X,Y)$ − сукупність лінійних неперервних операторів $S:X\to Y$ таких, що $D(S)=X$;

$\boldsymbol{\mathcal{B}}(X)=\boldsymbol{\mathcal{B}}(X,X)$;

$\mathbb{I}_X$ − тотожне перетворення простору X;

$S\downarrow E$ − звуження відображення S на множину E;

SE − образ множини E при відображенні S;

$\dot{+}$, $\oplus$, Θ − відповідно символи прямої суми, ортогональної суми та ортогонального доповнення;

$\overline{E}$ − замикання множини E;

якщо $A_i:X\to Y_i$, $i=1,\ldots,n$, − лінійні оператори, то запис $A=A_1\oplus\ldots\oplus A_n$ означає, що $\forall x\in X\;\; Ax=(A_1x,\ldots,A_nx)$.

***Зауваження* 1.** Нехай T − замкнене лінійне відношення в H. Тоді

1°) $\ker T^*=H\Theta R(T)$ (див. [11, 14]);

2°) якщо $\lambda\in\rho(T)$, то $(T-\lambda)^{-1}\in\boldsymbol{\mathcal{B}}(H)$ (це випливає з теореми про замкнений графік [3, с. 211]).

Роль початкового об'єкта відіграє пара (L,L_0) операторів $H\to H$ таких, що $L,L_0\in\boldsymbol{\mathcal{C}}(H)$, $L_0\subset L$. Нижче $M\overset{\text{def}}{=}L_0^*$, $M_0\overset{\text{def}}{=}L^*$. Під $D[L]$ розуміємо многовид $D(L)$, трактований як гільбертів простір зі скалярним добутком

$$\forall\,y,z\in D(L)\qquad (y\,|\,z)_L\overset{\text{def}}{=}(y\,|\,z)+(Ly\,|\,Lz),$$

а під $\oplus_L$ та Θ_L − відповідно символи ортогональної суми та ортогонального доповнення в $D[L]$. Аналогічно визначаємо $D[M]$, $(\cdot|\cdot)_M$, $\oplus_M$, Θ_M. Якщо D − один із гільбертових просторів $D[L]$ або $D[M]$, G − (допоміжний) гільбертів простір, а $W\in\boldsymbol{\mathcal{B}}(D,G)$, то спряжений оператор $W'\in\boldsymbol{\mathcal{B}}(G,D)$ означимо таким чином:

$$\forall y\in D,\forall g\in G\qquad (Wy\,|\,g)_G=(y\,|\,W'g)_D.$$

Відомо [6, с. 159], що існують гільбертові простори G_1, G_2 та оператори $\Gamma_i\in\boldsymbol{\mathcal{B}}(D[L],G_i)$, $i=1,2$, такі, що

$$R(\Gamma_1\oplus\Gamma_2)=G_1\oplus G_2,\quad \ker(\Gamma_1\oplus\Gamma_2)=D(L_0),$$

а також оператори $\tilde{\Gamma}_1\in\boldsymbol{\mathcal{B}}(D[M],G_2)$, $\tilde{\Gamma}_2\in\boldsymbol{\mathcal{B}}(D[M],G_1)$ (які однозначно визначаються, виходячи з G_1, G_2, Γ_1, Γ_2) такі, що

$$R(\tilde{\Gamma}_1\oplus\tilde{\Gamma}_2)=G_2\oplus G_1,\quad \ker(\tilde{\Gamma}_1\oplus\tilde{\Gamma}_2)=D(M_0),$$

$$\forall y \in D(L), \quad \forall z \in D(M) \quad (Ly \mid z) - (y \mid Mz) =$$

$$= (\Gamma_1 y \mid \tilde{\Gamma}_2 z)_{G_1} - (\Gamma_2 y \mid \tilde{\Gamma}_1 z)_{G_2}, \qquad (1)$$

або, що є еквівалентним,

$$\forall y \in D(L), \forall z \in D(M) \quad (Ly \mid z) - (y \mid Mz) = (iJ\Gamma y \mid \tilde{\Gamma} z)_{\tilde{G}}, \qquad (2)$$

де

$$G = G_1 \oplus G_2, \quad \tilde{G} = G_2 \oplus G_1, \quad \Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2, \quad \tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_1 \oplus \tilde{\Gamma}_2,$$

а оператор $J \in \mathcal{B}(G, \tilde{G})$ визначається так:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & i\mathbb{I}_{G_2} \\ -i\mathbb{I}_{G_1} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

При цьому

$$\Gamma_1 M \tilde{\Gamma}_1' = 0, \qquad \Gamma_1 M \tilde{\Gamma}_2' = -\mathbb{I}_{G_1},$$

$$\Gamma_2 M \tilde{\Gamma}_1' = \mathbb{I}_{G_2}, \qquad \Gamma_2 M \tilde{\Gamma}_2' = 0, \qquad (4)$$

тобто

$$\Gamma M \tilde{\Gamma}' = iJ^*. \qquad (5)$$

Це випливає з (1) та (2).

Далі, нехай $H_0^{(L)}$, $H_0^{(M)}$ – скінченновимірні підпростори простору H. Покладемо

$$S_0 = L_0 \downarrow (H \Theta H_0^{(L)}), \quad T_0 = M_0 \downarrow (H \Theta H_0^{(M)}),$$

$$S = \left\{ (y, Ly + \varphi^{(M)}) : y \in D(L), \ \varphi^{(M)} \in H_0^{(M)} \right\},$$

$$T = \left\{ (z, Mz + \varphi^{(L)}) : z \in D(M), \ \varphi^{(L)} \in H_0^{(L)} \right\}$$

і позначимо через $P_0^{(L)}$, $P_0^{(M)}$ ортопроектори $H \to H_0^{(L)}$, $H \to H_0^{(M)}$ відповідно. Зауважимо, що в сенсі теорії лінійних відношень, у якій оператор ототожнюють з його графіком,

$$S_0^* = T, \quad T_0^* = S$$

(див. [14], а також [8]).

Введемо такі позначення:

$$G_{S,1} = G_1 \oplus H_0^{(L)}, \quad G_{S,2} = G_2 \oplus H_0^{M},$$

$$\Gamma_{S,1}(y, \varphi^{(M)}) = (\Gamma_1 y, -P_0^{(L)} y), \quad \Gamma_{S,2}(y, \varphi^{(M)}) = (\Gamma_2 y, \varphi^{(M)}),$$

$$y \in D(L), \ \varphi^{(M)} \in H_0^{(M)},$$

$$\tilde{\Gamma}_{S,1}(z, \varphi^{(L)}) = (\tilde{\Gamma}_1 z, -P_0^{(M)} z), \quad \tilde{\Gamma}_{S,2}(z, \varphi^{(L)}) = (\tilde{\Gamma}_2 z, \varphi^{(L)}),$$

$$z \in D(M), \ \varphi^{(L)} \in H_0^{(L)},$$

$$G_S = G_{S,1} \oplus G_{S,2}, \quad \Gamma_S = \Gamma_{S,1} \oplus \Gamma_{S,2},$$

$$\tilde{G}_S = G_{S,2} \oplus G_{S,1}, \quad \tilde{\Gamma}_S = \tilde{\Gamma}_{S,1} \oplus \tilde{\Gamma}_{S,2}.$$

Як доведено в [21],

$$\Gamma_S \in \mathcal{B}(D[L] \oplus H_0^{(M)}; G_S), \qquad \tilde{\Gamma}_S \in \mathcal{B}(D[M] \oplus H_0^{(L)}; \tilde{G}_S),$$

$$R(\Gamma_S) = G_S, \quad \ker \Gamma_S = D(S_0), \qquad R(\tilde{\Gamma}_S) = \tilde{G}_S, \quad \ker \tilde{\Gamma}_S = T_0.$$

Перейдемо безпосередньо до постановки задачі. Нехай F − деякий комплексний гільбертів простір такий, що $\dim F = \dim G_S$. Виходячи з леми про трійку (див., наприклад, [6, с. 23]), неважко показати, що для будь-якого замкненого розширення S_1 відношення S_0 такого, що це розширення є звуженням відношення S, існує оператор $A \in \mathcal{B}(G_S, F)$ такий, що $S_1 = \ker A\Gamma_S$. Далі пишемо S_A замість S_1. Таким чином,

$$S_A = \ker\left(A_1\Gamma_{S,1} + A_2\Gamma_{S,2}\right) =$$

$$= \left\{(y, Ly + \varphi^{(M)}) \in S : A_1\Gamma_{S,1}(y, \varphi^{(M)}) + A_2\Gamma_{S,2}(y, \varphi^{(M)}) = 0\right\},$$

де $A_i = A \downarrow G_{S,i}$. Зрозуміло, що $A_i \in \mathcal{B}(G_{S,i}, F)$, $i = 1, 2$.

Нижче припускаємо, що резольвентна множина $\rho(L_2)$ оператора $L_2 \overset{\text{def}}{=} L \downarrow \ker \Gamma_2$ непорожня. Нехай $\lambda \in \rho(L_2)$, а отже, $\bar{\lambda} \in \rho(M_2)$, де $M_2 \overset{\text{def}}{=} (M \downarrow \ker \tilde{\Gamma}_2)\ (= L_2^*)$. Тоді

$$L_\lambda \overset{\text{def}}{=} (L_2 - \lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(H), \qquad M_{\bar{\lambda}} \overset{\text{def}}{=} (M_2 - \bar{\lambda})^{-1}\ (= L_\lambda^*) \in \mathcal{B}(H).$$

У цій статті дослідимо умови розв'язності відношення $S_A - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, та встановимо зв'язок між резольвентами відношень S_A і $L_2 \overset{\text{def}}{=} L \downarrow \ker \Gamma_2$.

Покладемо

$$(\forall \lambda \in \rho(L_2)) \in Z_\lambda = (\tilde{\Gamma}_1 M_{\bar{\lambda}})^*. \tag{6}$$

З результатів, викладених у [6, с. 199−202], випливає, що

$$Z_\lambda = \left(L_\lambda(\mathbb{I}_H + \lambda M) + M\right)\tilde{\Gamma}_1'\ (\in \mathcal{B}(G_2, H)), \tag{7}$$

$$\Gamma_2 Z_\lambda = \mathbb{I}_{G_2}, \tag{8}$$

$$Z_\lambda \Gamma_2 \downarrow \ker(L - \lambda) = \mathbb{I}_{\ker(L-\lambda)}, \tag{9}$$

$$R(Z_\lambda) = \ker(L - \lambda). \tag{10}$$

Нехай $M(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \Gamma_1 Z_\lambda$, $\lambda \in \rho(L_2)$. Із результатів монографії [6] (див. також [15] і цитовану там літературу) випливає, що $M(\lambda) \in \mathcal{B}(G_2, G_1)$ і

$$D(L_0) \dot{+} \ker(L - \lambda) = \left\{y \in D(L) : \Gamma_1 y = M(\lambda)\Gamma_2 y\right\}.$$

Аналогічно, для кожного $\lambda \in \rho(L_2)$ $\tilde{Z}_{\bar{\lambda}} \overset{\text{def}}{=} (\Gamma_1 L_\lambda)^* \in \mathcal{B}(G_1, H)$ і

$$\tilde{Z}_{\bar{\lambda}} = (M_{\bar{\lambda}}(\mathbb{I}_H + \bar{\lambda}L) + L)\Gamma_1', \qquad \tilde{\Gamma}_2\tilde{Z}_{\bar{\lambda}} = \mathbb{I}_{G_1},$$

$$\tilde{Z}_{\bar{\lambda}}\Gamma_2 \downarrow \ker(M - \bar{\lambda}) = \mathbb{I}_{\ker(M-\bar{\lambda})}, \qquad R(\tilde{Z}_{\bar{\lambda}}) = \ker(M - \bar{\lambda}).$$

Далі, $\tilde{M}(\bar{\lambda}) \overset{\text{def}}{=} \tilde{\Gamma}_1\tilde{Z}_{\bar{\lambda}} \in \mathcal{B}(G_1, G_2)$ і $D(M_0) \dot{+} \ker(M - \bar{\lambda}) = \ker(\tilde{\Gamma}_1 - \tilde{M}(\bar{\lambda})\tilde{\Gamma}_2)$. Крім цього, для будь-якого $\lambda \in \rho(L_2)$ $M(\lambda)^* = \tilde{M}(\bar{\lambda})$.

1. Допоміжні оператор-функції. Нехай $\lambda \in \rho(L_2)$. Приймемо, що

$$\forall(a,\varphi^{(M)}) \in G_{S,2} \ (= G_2 \oplus H_0^{(M)}) \qquad Z_{S,\lambda}(a,\varphi^{(M)}) = Z_\lambda a - L_\lambda \varphi^{(M)}. \tag{11}$$

Лема 1.

1°) $\quad Z_{S,\lambda} \in \mathcal{B}(G_{S,2}, H)$;

2°) $\quad \ker(S-\lambda) = R(Z_{S,\lambda}) = \ker(L-\lambda) \dot{+} L_\lambda H_0^M$;

3°) $\quad \ker Z_{S,\lambda} = \{0\}$. $\qquad$ (12)

Д о в е д е н н я. Правильність твердження ***1°***) випливає безпосередньо з (11), оскільки

$$Z_\lambda \in \mathcal{B}(G_2, H), \qquad G_{S,2} = G_2 \oplus H_0^{(M)}.$$

Далі, $y \in \ker(S-\lambda)$ тоді і тільки тоді, коли існує $\varphi^{(M)} \in H_0^{(M)}$ таке, що

$$(L-\lambda)y + \varphi^{(M)} = 0, \tag{13}$$

тобто (див. (10)) існує $a \in G_2$ таке, що

$$y = Z_\lambda a - L_\lambda \varphi^{(M)}. \tag{14}$$

Звідси і з (11) випливає правильність рівності (12).

Нарешті, якщо $Z_{S,\lambda}(a,\varphi^{(M)}) = 0$, то, з огляду на (8), $a = \Gamma_2(Z_\lambda a - L_\lambda \varphi^{(M)}) = 0$, тому $L_\lambda \varphi^{(M)} = 0$, а отже, $\varphi^{(M)} = 0$. Лему доведено. ♦

Лема 2.

$$Z_{S,\lambda}^* = \tilde{\Gamma}_{S,1} M_{\bar{\lambda}}.$$

Д о в е д е н н я. Беручи до уваги (6), (7), переконуємось, що для будь-якого $h \in H$

$$\begin{aligned}(Z_{S,\lambda}(a,\varphi^M) \mid h) &= (Z_\lambda a \mid h) - (L_\lambda \varphi^{(M)} h) = \\ &= (a \mid \tilde{\Gamma}_1 M_{\bar{\lambda}} h)_{G_2} - (\varphi^{(M)} \mid M_{\bar{\lambda}} h) = \\ &= (a \mid \tilde{\Gamma}_1 M_{\bar{\lambda}} h)_{G_2} - (\varphi^{(M)} \mid P_0^{(M)} M_{\bar{\lambda}} h)_{H_0^{(M)}} = \\ &= ((a,\varphi^{(M)}) \mid (\tilde{\Gamma}_1 M_{\bar{\lambda}} h, -P_0^{(M)} M_{\bar{\lambda}} h))_{G_{S,2}} = \\ &= ((a,\varphi^{(M)}) \mid \tilde{\Gamma}_{S,1} M_{\bar{\lambda}} h)_{G_{S,2}}.\end{aligned}$$

Лему доведено. ♦

Зауваження 2. У подальшому проводимо такі ототожнення:

$$(y, Ly + \varphi^{(M)}) \leftrightarrow (y,\varphi^{(M)}), \qquad (z, Mz + \varphi^{(L)}) \leftrightarrow (z,\varphi^{(L)}),$$

а отже, $S \leftrightarrow D[L] \oplus H_0^{(M)}$, $T \leftrightarrow D[M] \oplus H_0^{(L)}$. Приймемо, що

$$\forall(a,\varphi^M) \in G_{S,2} \qquad \hat{Z}_{S,\lambda}(a,\varphi^{(M)}) = (Z_\lambda a - L_\lambda \varphi^{(M)},\ \varphi^{(M)}). \tag{15}$$

Зауваження 3. Формально функцію $\hat{Z}_{S,\lambda}$ потрібно було б означити так: $\hat{Z}_{S,\lambda}(a,\varphi^{(M)}) = (Z_\lambda a - L_\lambda \varphi^{(M)}, \lambda(Z_\lambda a - L_\lambda \varphi^{(M)})) = (y, \lambda y)$, де y визначено згідно з (14). Беручи до уваги (13), бачимо, що

$$\hat{Z}_{S,\lambda}(a,\varphi^{(M)}) = (y,\, Ly + \varphi^{(M)}).$$

Тому, з огляду на зауваження 2, розглядувану оператор-функцію природно означити саме згідно з (15).

Лема 3.

$$\forall\lambda \in \rho(L_2) \qquad \Gamma_{S,2} Z_{S,\lambda} = 1_{G_{S,2}}. \tag{16}$$

Д о в е д е н н я. Беручи до уваги (8), (15), бачимо, що для будь-яких $a \in G_2$ і $\varphi \in H_0^{(M)}$

$$\Gamma_{S,2}\hat{Z}_{S,\lambda}(a,\varphi^{(M)}) = \Gamma_{S,2}(Z_\lambda a - L_\lambda \varphi^{(M)}, \varphi^{(M)}) =$$

$$= (\Gamma_2(Z_\lambda a - L_\lambda \varphi^{(M)}), \varphi^{(M)}) = (a, \varphi^{(M)}).$$

Лему доведено. ♦

Наслідок 1 (пор. з (9), (10))

$$\forall\lambda \in \rho(L_2) \qquad Z_{S,\lambda}\Gamma_{S,2} \downarrow R(Z_{S,\lambda}) = 1_{R(Z_{S,\lambda})}. \tag{17}$$

Д о в е д е н н я. З огляду на (16), маємо, що для будь-якого $(a,\varphi^{(M)}) \in G_{S,2}$

$$\hat{Z}_{S,\lambda}\Gamma_{S,2}\hat{Z}_{S,\lambda}(a,\varphi^{(M)}) = \hat{Z}_{S,\lambda}(a,\varphi^{(M)}),$$

тобто справджується (17). ♦

Зауваження 4. Нехай $\lambda \in \rho(L_2)$, $(a,\varphi^{(L)}) \in G_{S,1}$ $(= G_1 \oplus H_0^{(L)})$. Приймемо

$$\tilde{Z}_{S,\bar{\lambda}}(a,\varphi^{(L)}) = \tilde{Z}_{\bar{\lambda}} a - M_{\bar{\lambda}}\varphi^{(L)}, \tag{18}$$

$$\hat{\tilde{Z}}_{S,\bar{\lambda}}(a,\varphi^{(L)}) = (\tilde{Z}_{\bar{\lambda}} a - M_{\bar{\lambda}}\varphi^{(L)},\, \varphi^{(L)}). \tag{19}$$

Міняючи ролями пари (L, L_0) та (M, M_0) і міркуючи так, як вище, легко переконатися, що

$$\tilde{Z}_{S,\bar{\lambda}} \in \mathcal{B}(G_{S,1}, H), \qquad R(\tilde{Z}_{S,\bar{\lambda}}) = \ker(T - \bar{\lambda});$$

$$\tilde{Z}^*_{S,\bar{\lambda}} = \Gamma_{S,1} L_\lambda;$$

$$\tilde{\Gamma}_{S,2}\hat{\tilde{Z}}_{S,\bar{\lambda}} = \mathbb{I}_{G_{S,1}};$$

$$\hat{\tilde{Z}}_{S,\bar{\lambda}}\tilde{\Gamma}_{S,2} \downarrow R(\hat{\tilde{Z}}_{S,\bar{\lambda}}) = \mathbb{I}_{R(\hat{\tilde{Z}}_{S,\bar{\lambda}})}.$$

Покладемо

$$M_S(\lambda) = \Gamma_{S,1}\hat{Z}_{S,\lambda}, \quad \tilde{M}_S(\bar{\lambda}) = \tilde{\Gamma}_{S,1}\hat{\tilde{Z}}_{S,\bar{\lambda}}. \tag{20}$$

Маємо $\forall (a,\varphi^{(M)}) \in G_{S,2}$

$$M_{S,\lambda}(a,\varphi^{(M)}) = \Gamma_{S,1}\hat{Z}_{S,\lambda}(a,\varphi^{(M)}) = \Gamma_{S,1}(Z_\lambda a - L_\lambda\varphi^{(M)}, \varphi^{(M)}) =$$

$$= (\Gamma_1(Z_\lambda a - L_\lambda\varphi^{(M)}),\, -P_0^{(L)}(Z_\lambda a - L_\lambda\varphi^{(M)})) =$$

$$= (M(\lambda)a - \tilde{Z}^*_{\bar{\lambda}}\varphi^{(M)},\, -P_0^{(L)}Z_\lambda a + P_0^{(L)}L_\lambda\varphi^{(M)}) =$$

$$= (M(\lambda)a - \tilde{Z}^*_{\bar{\lambda}}P_0^{(M)}\varphi^{(M)},\, -P_0^{(L)}Z_\lambda a + P_0^{(L)}L_\lambda P_0^{(M)}\varphi^{(M)}).$$

Тому

$$M_{S,\lambda} = \begin{pmatrix} M(\lambda) & -\tilde{Z}^*_{\bar{\lambda}} P_0^{(M)} \\ -P_0^{(L)} Z_\lambda & P_0^{(L)} L_\lambda P_0^{(M)} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Аналогічно, беручи до уваги (19), (20), показуємо, що

$$\tilde{M}_S(\bar{\lambda}) = \begin{pmatrix} \tilde{M}(\bar{\lambda}) & -\tilde{Z}^*_{\bar{\lambda}} P_0^{(M)} \\ -P_0^{(M)} \tilde{Z}_{\bar{\lambda}} & P_0^{(M)} M_{\bar{\lambda}} P_0^{(L)} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Зокрема, $M_S^*(\lambda) = \tilde{M}_S(\bar{\lambda})$.

Лема 4.

$$\ker(S - \lambda) \cap D(L_2) = L_\lambda H_0^{(M)}. \tag{23}$$

Д о в е д е н н я.

($\supset$). Нехай $y \in L_\lambda H_0^{(M)}$. З огляду на (12), $y \in \ker(S - \lambda)$. Крім цього, $y \in R(L_\lambda) = D(L_2)$. Таким чином, $y \in \ker(S - \lambda) \cap D(L_2)$.

($\subset$). Нехай $y \in \ker(S - \lambda) \cap D(L_2)$. Оскільки $y \in \ker(S - \lambda)$, то, з огляду на (12), існують $a \in G_2$ і $\varphi^{(M)} \in H_0^{(M)}$ такі, що $y = Z_\lambda a - L_\lambda \varphi^{(M)}$. Звідси, оскільки $y \in D(L_2)$, випливає, що $Z_\lambda a = y + L_\lambda \varphi^{(M)} \in D(L_2)$, а отже (див. (8)), $a = \Gamma_2 Z_\lambda a = 0$. Тому $y = -L_\lambda \varphi^{(M)}$ ($\in L_\lambda H_0^{(M)}$). Лему доведено. ♦

Лема 5 (пор. з (23))

$$R(\hat{Z}_{S,\lambda}) \cap \big(D[L_2] \oplus \{0\}\big) = \{0\}. \tag{24}$$

Д о в е д е н н я. Нехай $(y, \varphi) \in R(\hat{Z}_{S,\lambda})$. Тоді $\exists\, a \in G_2$, $\varphi^{(M)} \in H_0^{(M)}$ такі, що $(y, \varphi) = \big(Z_\lambda a - L_\lambda \varphi^{(M)}, \varphi^{(M)}\big)$. Якщо, крім цього, $(y, \varphi) \in D[L_2] \oplus \{0\}$, то $y \in D(L_2)$, $\varphi = 0$. Звідси випливає, що $\big(Z_\lambda a - L_\lambda \varphi^{(M)}, \varphi^{(M)}\big) = (y, 0)$. Тому $\varphi^{(M)} = 0$, а отже, $y = Z_\lambda a \in D(L_2) \cap \ker(L - \lambda) = \{0\}$. Лему доведено. ♦

Лема 6.

$$R(\hat{Z}_{S,\lambda}) \dot{+} \big(D[L_2] \oplus \{0\}\big) = D[L] \oplus H_0^{(M)}. \tag{25}$$

Д о в е д е н н я. Той факт, що сума в (25) є прямою, випливає з (24). Включення ($\subset$) є очевидним.

Покажемо ($\supset$). Нехай $y \in D(L)$, $\varphi \in H_0^{(M)}$. Оскільки, як випливає з результатів праці [1] і (12), $D(L) = D(L_2) + \ker(S - \lambda)$ (сума необов'язково є прямою), то існують (див. (11)) $u \in D(L_2)$, $a \in G_2$, $\varphi^{(M)} \in H_0^{(M)}$ такі, що $y = u + Z_\lambda a - L_\lambda \varphi^{(M)}$, а отже,

$$(y, \varphi) = (u, 0) + \big(Z_\lambda a - L_\lambda \varphi, \varphi\big) + \big(L_\lambda \varphi - L_\lambda \varphi^{(M)}, 0\big) =$$

$$= \big(u + L_\lambda \varphi - L_\lambda \varphi^{(M)}, 0\big) + \big(Z_\lambda a - L_\lambda \varphi, \varphi\big).$$

Для завершення доведення достатньо зауважити, що в останній сумі перший доданок міститься в $D[L_2] \oplus \{0\}$, а другий − в $R(\hat{Z}_{S,\lambda})$. Лему доведено. ♦

Лема 7.

$$\big(D[S_0] \oplus \{0\}\big) \dot{+} R(\hat{Z}_{S,\lambda}) = \ker\big(\Gamma_{S,1} - M_S(\lambda)\Gamma_{S,2}\big). \tag{26}$$

Д о в е д е н н я. Той факт, що сума в (26) є прямою, випливає з (24). Включення $\left(D[S_0]\oplus\{0\}\right)\subset\ker\left(\Gamma_{S,1}-M_S(\lambda)\Gamma_{S,2}\right)$ є очевидним.

Покажемо, що

$$R(\hat{Z}_{S,\lambda})\subset\ker\left(\Gamma_{S,1}-M_S(\lambda)\Gamma_{S,2}\right). \tag{27}$$

Дійсно, нехай $a\in G_2$, $\varphi\in H_0^{(M)}$. Тоді

$$\Gamma_{S,1}(Z_\lambda a-L_\lambda\varphi,\varphi)=$$

$$=\left(\Gamma_1(Z_\lambda a-L_\lambda\varphi),-P_0^{(L)}(Z_\lambda a-L_\lambda\varphi)\right)=\left(M(\lambda)a,-\tilde{Z}_{\bar\lambda}^{*}\varphi\right),$$

$$M_S(\lambda)\Gamma_{S,2}(Z_\lambda a-L_\lambda\varphi,\varphi)=M_S(\lambda)\left(\Gamma_2(Z_\lambda a-L_\lambda\varphi,\varphi)\right)=$$

$$=M_S(\lambda)(a,\varphi)=\left(M(\lambda)a-\tilde{Z}_{\bar\lambda}^{*}\varphi,-P_0^{(L)}(Z_\lambda a-L_\lambda\varphi)\right)$$

(див. (21)). Співвідношення (27), а з ним і включення $(\subset)$ доведено.

Доведемо $(\supset)$. Нехай $(y,\varphi)\in\ker(\Gamma_{S,1}-M_{S,\lambda}\Gamma_{S,2})\subset D[L]\oplus H_0^{(M)}$. Беручи до уваги (25), переконуємося в існуванні таких $u\in D(L_2)$, $a\in G_2$, $\varphi\in H_0^{(M)}$, що $(y,\varphi)=(u,0)+(Z_\lambda a-L_\lambda\varphi,\varphi)$. Оскільки $(y,\varphi)\in\ker(\Gamma_{S,1}-M_{S,\lambda}\Gamma_{S,2})$ і

$$(Z_\lambda a-L_\lambda\varphi,\varphi)\in R(\hat{Z}_{S,\lambda})\subset\ker(\Gamma_{S,1}-M_{S,\lambda}\Gamma_{S,2}),$$

то $(y,0)\in\ker(\Gamma_{S,1}-M_{S,\lambda}\Gamma_{S,2})$. Звідси випливає, що (оскільки $\Gamma_2 u=0$)

$$0=\left(\Gamma_{S,1}-M_S(\lambda)\Gamma_{S,2}\right)(u,0)=$$

$$=\left(\Gamma_1 u,-P_0^{(L)}u\right)-M_S(\lambda)\left(\Gamma_2 u,0\right)=\left(\Gamma_1 u,-P_0^{(L)}u\right).$$

Таким чином, $\Gamma_1 u=0$, $P_0^{(L)}=0$, тобто $u\in D(S_0)$. Лему доведено. ♦

2. Основні результати. Нижче скрізь під S_A розуміємо відношення, описане у Вступі.

Лема 8. *Припустимо, що* $\lambda\in\rho(L_2)$. *У цьому випадку*

1°) *елемент* $f\in H$ *належить до* $R(S_A-\lambda)$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$A_1\tilde{Z}_{S,\lambda}^{*}f\in R(A_1M_S(\lambda)+A_2); \tag{28}$$

2°) $\ker(S_A-\lambda)=Z_{S,\lambda}\ker(A_1M_S(\lambda)+A_2)$. (29)

Д о в е д е н н я. Нехай $f\in H$. Оскільки $R(L_2-\lambda)=H$, то $f\in R(L_2-\lambda)$, а отже, $(L_\lambda f,f)\in L_2-\lambda\subset S-\lambda$. Припустимо, що для деякого $y\in H$ $(y,f)\in S-\lambda$. Тоді $(y,f)-\left(L_\lambda f,f\right)=\left(y-L_\lambda f,0\right)\in S-\lambda$, тобто $y-L_\lambda f\in\ker(S-\lambda)$. З леми 1 випливає, що існують $a\in G_2$ і $\varphi^{(M)}\in H_0^{(M)}$ такі, що $y-L_\lambda f=Z_\lambda a-L_\lambda\varphi^{(M)}$, тобто

$$y=Z_\lambda a+L_\lambda(f-\varphi^{(M)}). \tag{30}$$

З другого боку, якщо $(y,f)\in S-\lambda$, то існує $\varphi\in H_0^{(M)}$ таке, що

$$f=(L-\lambda)y+\varphi. \tag{31}$$

Підставляючи (30) в (31), отримуємо $f=(L-\lambda)\left(Z_\lambda a+L_\lambda(f-\varphi^{(M)})+\varphi\right)$, $f=f-\varphi^{(M)}+\varphi$, тобто $\varphi=\varphi^{(M)}$. Далі,

$$f \in R(S_A - \lambda) \;\Leftrightarrow\; (y, f) \in S_A - \lambda \;\Leftrightarrow\; (y, f + \lambda y) \in S_A .$$

Крім цього, з (30) випливає, що $Ly = (L - \lambda)y + \lambda y = f - \varphi^{(M)} + \lambda y$, а тому $f + \lambda y = Ly + \varphi^{(M)}$. Отже,

$$f \in R(S_A - \lambda) \;\Leftrightarrow\; (y, Ly + \varphi^{(M)}) \in S_A \;\Leftrightarrow\; A_1\Gamma_{S,1}y + A_2\Gamma_{S,2}y = 0 .$$

Але (див. (8), (18), (21))

$$\Gamma_{S,1}(y, \varphi^{(M)}) = (\Gamma_1 y, -P_0^{(L)} y) =$$

$$= (\Gamma_1(Z_\lambda a + L_\lambda(f - \varphi^{(M)})), -P_0^{(L)}(Z_\lambda a + L_\lambda(f - \varphi^{(M)}))) =$$

$$= (\tilde{Z}_{\bar{\lambda}}^* f, -P_0^{(L)} L_\lambda f) = M_S(\lambda)(a, \varphi^{(M)}) + \tilde{Z}_{S,\bar{\lambda}}^* f ,$$

$$(M(\lambda)a - \tilde{Z}_\lambda^* \varphi^{(M)} + \tilde{Z}_\lambda^* f, -P_0^{(L)}(Z_\lambda a - L_\lambda \varphi^{(M)}) - P_0^{(L)} L_\lambda f) =$$

$$= (M(\lambda)a - \tilde{Z}_\lambda^* \varphi^{(M)}, -P_0^{(L)}(Z_\lambda a - L_\lambda \varphi^{(M)})) +$$

$$+ (Z_{\bar{\lambda}}^* f, -P_0^{(L)} L_\lambda f) = M_S(\lambda)(a, \varphi^{(M)}) + \tilde{Z}_{S,\bar{\lambda}}^* f ,$$

$$\Gamma_{S,2}(y, \varphi^{(M)}) = (\Gamma_2 y, \varphi^{(M)}) = (\Gamma_2(Z_\lambda a + L_\lambda(f - \varphi^{(M)}), \varphi^{(M)})) = (a, \varphi^{(M)}) .$$

Таким чином, елемент $f \in H$ належить до $R(S_A - \lambda)$ тоді і тільки тоді, коли існують $a \in G_2$ і $\varphi \in H_0^{(M)}$ такі, що

$$A_1 M_S(\lambda)(a, \varphi^{(M)}) + A_1 \tilde{Z}_{S,\bar{\lambda}}^* f + A_2(a, \varphi^{(M)}) = 0 ,$$

тобто $A_1 \tilde{Z}_{S,\bar{\lambda}}^* f = -(A_1 M_S(\lambda) + A_2)(a, \varphi^{(M)})$. Іншими словами, $f \in R(S_A - \lambda)$ тоді і тільки тоді, коли справджується (28). Повторюючи наведені вище міркування при $f = 0$, переконуємося у правильності рівності (29). Лему доведено. ♦

Покладемо $A_{S,\lambda} \overset{\text{def}}{=} A_1 M_S(\lambda) + A_2$.

Наслідок 2. *Існує гомеоморфізм* $\Pi_{S,\lambda} \in \mathcal{B}(G_{S,1}, \ker(T - \bar{\lambda}))$ *такий, що*

$$R(S_A - \lambda) = R(S_0 - \lambda) \oplus \Pi_{S,\lambda}(A_1^{-1} R(A_{S,\lambda})) . \tag{32}$$

Д о в е д е н н я. Покажемо спочатку, що

$$\ker(\tilde{Z}_{S,\bar{\lambda}}^* \downarrow \ker(T - \bar{\lambda})) = \{0\} . \tag{33}$$

Дійсно, нехай $u \in \ker(T - \bar{\lambda})$, $\tilde{Z}_{S,\bar{\lambda}}^* u = 0$. Оскільки $R(\tilde{Z}_{S,\bar{\lambda}}) = \ker(T - \bar{\lambda})$ (див. зауваження 4), то існує пара $(a, \varphi) \in G_{S,1}$ така, що $\tilde{Z}_{S,\lambda}(a, \varphi^{(M)}) = u$. Маємо: $0 = \tilde{Z}_{S,\bar{\lambda}}^* u = \tilde{Z}_{S,\bar{\lambda}}^* \tilde{Z}_{S,\bar{\lambda}}(a, \varphi)$, а тому $\left\| \tilde{Z}_{S,\bar{\lambda}}(a, \varphi) \right\|^2 = \|u\|^2 = 0$. Далі,

$$R(\Gamma_{S,1} L_\lambda) \equiv R(\tilde{Z}_{\bar{\lambda}}^*) = G_{S,1} . \tag{34}$$

(Нагадаємо, що $\tilde{Z}_{S,\lambda}^* = \Gamma_{S,1} L_\lambda$, див. зауваження 4). Справді, оскільки $R(L_\lambda) = D(L_2) = \ker \Gamma_{S,2}$, то достатньо довести, що $R(\Gamma_{S,1} \downarrow \ker \Gamma_{S,2}) = G_{S,1}$. А це дійсно так, оскільки $R(\Gamma_{S,1} \oplus \Gamma_{S,2}) = R(\Gamma_{S,1}) \oplus R(\Gamma_{S,2})$, а отже, $R(\Gamma_{S,1} \downarrow \ker \Gamma_{S,2}) = R(G_{S,1}) = G_{S,1}$.

Покажемо тепер, що

$$\tilde{Z}^*_{S,\bar{\lambda}} \downarrow R(S_0 - \lambda) \equiv \Gamma_{S,1} L_\lambda \downarrow R(S_0 - \lambda) = 0. \tag{35}$$

Дійсно, нехай $v \in R(S_0 - \lambda) \subset R(L_2 - \lambda) = D(L_\lambda)$, а $u = L_\lambda v$. Зрозуміло, що $u \in D(S_0 - \lambda) = D(S_0)$, тому $\Gamma_{S,1} u = 0$.

Перш ніж переходити до побудови шуканого гомеоморфізму, зазначимо, що многовид $R(S_0 - \lambda)$ є замкненим в H (це випливає з теореми про замкнений графік, див. [3, с. 211]), а отже, $H = R(S_0 - \lambda) \oplus \ker(T - \bar{\lambda})$ (див. зауваження 1). Виходячи звідси і беручи до уваги (34), (35), переконуємося, що $R(\tilde{Z}^*_{S,\bar{\lambda}} \downarrow \ker(T - \bar{\lambda})) = R(\tilde{Z}^*_{S,\bar{\lambda}}) = G_{S,1}$.

Таким чином, $\tilde{Z}^*_{S,\lambda} \downarrow \ker(T - \bar{\lambda}) \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(\ker(T - \bar{\lambda}), G_{S,1})$ − гомеоморфізм (це випливає з (33) і теореми Банаха про обернений оператор, див. [2, с. 12]), а отже, $\Pi_S(\lambda) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\tilde{Z}^*_{S,\bar{\lambda}} \downarrow \ker(T - \bar{\lambda}))^{-1} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(G_{S,1}, \ker(T - \bar{\lambda}))$ − гомеоморфізм $G_{S,1} \to \ker(T - \bar{\lambda})$.

Доведемо співвідношення (32). Для цього зазначимо, що $f \in H$ належить до $R(S_A - \lambda)$ тоді і тільки тоді, коли існують $f_0 \in R(S_0 - \lambda)$ та

$$f_1 \in R(S_A - \lambda) \Theta R(S_0 - \lambda) = R(S_A - \lambda) \cap \ker(T - \bar{\lambda})$$

такі, що $f = f_0 + f_1$. З другого боку, з огляду на лему 8 і формулу (35), $f \in R(S_A - \lambda) \Leftrightarrow (\tilde{Z}^*_{S,\bar{\lambda}} \downarrow \ker(T - \bar{\lambda})) f_1 \in A_1^{-1} R(A_{S,\lambda})$, $f_1 \in \Pi_{S,\lambda} A_1^{-1} R(A_{S,\lambda})$. Рівність (32) доведено. ♦

Теорема 1. *Нехай* $\lambda \in \rho(L_2)$. *Тоді*

i) $\dim \ker(S_A - \lambda) = \dim \ker A_{S,\lambda}$; (36)

ii) $\dim(H / R(S_A - \lambda)) = \dim(R(A_1) / (R(A_1) \cap R(A_{S,\lambda})))$; (37)

iii) $R(S_A - \lambda)$ *замкнена в* H *тоді і тільки тоді, коли* $A_1^{-1} R(A_{S,\lambda})$ *замкнена в* $G_{S,1}$;

iv) $\lambda \in \rho(S_A)$ *тоді і тільки тоді, коли* $\ker A_{S,\lambda} = \{0\}$ *і* $R(A_1) \subset R(A_{S,\lambda})$ (*тобто, коли* $A_{S,\lambda}^{-1} A_1 \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(G_{S,1}, G_{S,2})$). *У цьому випадку*

$$(S_A - \lambda)^{-1} = L_\lambda - Z_{S,\lambda} A_{S,\lambda}^{-1} A_1 \tilde{Z}^*_{S,\bar{\lambda}}, \tag{38}$$

а компактність оператора $(S_A - \lambda)^{-1} - L_\lambda$ *рівносильна компактності оператора* $A_{S,\lambda}^{-1} A_1$:

$$(S_A - \lambda)^{-1} - L_\lambda \in \boldsymbol{\mathcal{B}}_\infty(H) \Leftrightarrow A_{S,\lambda}^{-1} A_1 \in \boldsymbol{\mathcal{B}}_\infty(G_{S,1}, G_{S,2}).$$

Д о в е д е н н я. ***i***). Співвідношення (36) випливає з (29) і неперервної оборотності оператора $Z_{S,\lambda}$.

ii). Нехай $\ker(T - \bar{\lambda}) = \Pi_{S,\lambda}(A_1^{-1} R(A_{S,\lambda})) \dot{+} \mathcal{L}_1$, тобто

$$\Pi_{S,\lambda} G_{S,1} = \Pi_{S,\lambda}(A_1^{-1} R(A_{S,\lambda})) + \Pi_{S,\lambda}(\Pi_{S,\lambda}^{-1} \mathcal{L}_1),$$

а тому

$$G_{S,1} = A_1^{-1}R(A_{S,\lambda}) \dot{+} \Pi_{S,\lambda}^{-1}\mathcal{L}_1 . \tag{39}$$

Беручи до уваги (32) і (39), бачимо, що

$$H = R(S_0 - \lambda) \dot{+} \ker(T - \overline{\lambda}) =$$

$$= R(S_0 - \lambda) \dot{+} \Pi_{S,\lambda}(A_1^{-1}R(A_{S,\lambda})) \dot{+} \mathcal{L}_1 = R(S_A - \lambda) \dot{+} \mathcal{L}_1 .$$

Таким чином,

$$\dim\left(H/R(S_A - \lambda)\right) = \dim \mathcal{L}_1 = \dim \Pi_\lambda^{-1}\mathcal{L}_1 = \dim\left(G_{S,1}/A_1^{-1}R(A_{S,\lambda})\right).$$

Але $A_1^{-1}R(A_{S,\lambda}) = A_1^{-1}\left(R(A_1) \cap R(A_{S,\lambda})\right)$, тому рівність (37) рівносильна такій: $\dim\left(G_{S,1} / A_1^{-1}\left(R(A_1) \cap R(A_{S,\lambda})\right)\right)$. Доведемо цю рівність. Нехай

$$G_{S,1} = A_1^{-1}\left(R(A_1) \cap R(A_{S,\lambda})\right) \dot{+} \mathcal{L} , \tag{40}$$

тоді $R(A_1) = \left(R(A_1) \cap R(A_{S,\lambda})\right) \dot{+} A_1\mathcal{L}$. Якщо $\ell \in \mathcal{L}$ і $A_1\ell = 0$, то

$$\ell \in A_1^{-1}(\{0\}) \subset A_1^{-1}\left(R(A_1) \cap R(A_{S,\lambda})\right),$$

а тому $\ell \in A_1^{-1}\left(R(A_1) \cap R(A_{S,\lambda})\right) \cap \mathcal{L}$, так що $\ell = 0$ (оскільки сума (40) є прямою). Зі сказаного в попередньому реченні випливає, що $\dim \mathcal{L} = \dim A_1\mathcal{L}$, а отже,

$$\dim\left(G_{S,1} / A_1^{-1}\left(R(A_1) \cap R(A_{S,\lambda})\right)\right) = \dim \mathcal{L} =$$

$$= \dim A_1\mathcal{L} = \dim\left(R(A_1) / \left(R(A_1) \cap R(A_{S,\lambda})\right)\right).$$

Твердження ***ii***) доведено.

iii). Правильність цього твердження випливає безпосередньо з (32).

iv). Із (36), (37) випливає, що

$$\ker(S_A - \lambda) = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \ker A_{S,\lambda} = \{0\} , \tag{41}$$

$$R(S_A - \lambda) = H \quad \Leftrightarrow \quad R(A_1) \subset R(A_{S,\lambda}) . \tag{42}$$

Враховуючи (41), (42) і беручи до уваги зауваження 1, отримуємо

$$(S_A - \lambda)^{-1} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(H) \quad \Leftrightarrow \quad A_{S,\lambda}^{-1}A_1 \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(G_{S,1}, G_{S,2}).$$

Припустимо, що умови (41), (42) справджуються. Знайдемо резольвенту відношення S_A. Задачу можна сформулювати так:

Нехай $f \in R(S_A - \lambda)(= H)$. Знайти $y \in H$ таке, що $(y, f) \in S_A - \lambda$.

Повторюючи міркування, використані про доведенні леми 8, отримуємо

$$(y, f) \in S - \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, a \in G_{S,2} : y = Z_\lambda a + L_\lambda\left(f - \varphi^{(M)}\right)$$

(див. (30)), при цьому $f \in R(S_A - \lambda)$ тоді і тільки тоді, коли

$$A_{S,\lambda}\left(a, \varphi^{(M)}\right) = -A_1\tilde{Z}_{S,\bar{\lambda}}^* f . \tag{43}$$

Підставляючи (43) у (30), отримуємо $y = L_\lambda f - Z_{S,\lambda}A_{S,\lambda}^{-1}A_1\tilde{Z}_{S,\bar{\lambda}}^* f$ (нагадаємо, що $Z_{S,\lambda}\left(a, \varphi^{(M)}\right) = Z_\lambda a - L_\lambda \varphi^{(M)}$, див. (11)). Рівність (38) доведено.

Доведемо останнє твердження. Нехай $\lambda \in \rho(L_2) \cap \rho(S_A)$, $(S_A - \lambda)^{-1} - L_\lambda = Z_{S,\lambda}A_{S,\lambda}^{-1}A_1\tilde{Z}_{S,\bar{\lambda}}^* \in \boldsymbol{\mathcal{B}}_\infty(H)$. Тоді

$$-Z_{S,\lambda}A_{S,\lambda}^{-1}A_1\tilde{Z}_{S,\bar{\lambda}}^* \downarrow \ker(T-\bar{\lambda}) \in \mathcal{B}_\infty(\ker(T-\bar{\lambda}), H),$$

а отже,

$$-Z_{S,\lambda}A_{S,\lambda}^{-1}A_1\tilde{Z}_{S,\bar{\lambda}}^*\Pi_{S,\lambda} = -Z_{S,\lambda}A_{S,\lambda}^{-1}A_1 \in \mathcal{B}_\infty(G_{S,1}, H).$$

Оскільки $\ker Z_{S,\lambda} = \{0\}$, $R(Z_{S,\lambda}) = \ker(S-\lambda)$, то, за теоремою Банаха про обернений оператор, $Z_{S,\lambda}^{-1} \in \mathcal{B}(\ker(S-\lambda), G_{S,2})$, а тому $A_{S,\lambda}^{-1}A_1 = Z_{S,\lambda}^{-1}Z_{S,\lambda}A_{S,\lambda}^{-1}A_1 \in \mathcal{B}_\infty(G_{S,1}, G_{S,2})$. Навпаки, якщо $A_{S,\lambda}^{-1}A_1 \in \mathcal{B}_\infty(G_{S,1}, G_{S,2})$, то $(S_A-\lambda)^{-1} - L_\lambda \in \mathcal{B}_\infty(H)$, що випливає з (38). Теорему доведено. ♦

3. Критерії розв'язності у випадку, коли A – нормально розв'язний оператор. Нагадаємо, що під F розуміємо деякий комплексний гільбертів простір такий, що $\dim F = \dim G_S$, а під $A \in \mathcal{B}(G_S, F)$ – такий оператор, що $S_A = \ker A\Gamma_S$, де S_A – досліджуване відношення (див. Вступ). Нехай $F_1 \overset{\text{def}}{=} \overline{R(A)}$. Нижче скрізь вважаємо, що A – нормально розв'язний оператор. У цьому випадку твердження, висловлені в теоремі 1, допускають деякі уточнення.

Лема 9. *Нехай* $R(A) = F_1$ *і* $\lambda \in \rho(L_2)$. *Існує гомеоморфізм*

$$\tilde{\Pi}_{S,\bar{\lambda}} \in \mathcal{B}(G_{S,2}, \ker(S-\lambda))$$

такий, що

$$R(S_A^* - \bar{\lambda}) = R(T_0 - \bar{\lambda}) \oplus \tilde{\Pi}_{S,\lambda}R(A_{S,\lambda}^*). \tag{44}$$

Д о в е д е н н я. Міркуючи, як при доведенні наслідку 2, бачимо, що

$$\ker(Z_{S,\lambda}^* \downarrow \ker(S-\lambda)) = \{0\}, \quad R(Z_{S,\lambda}^* \downarrow \ker(S-\lambda)) = G_{S,2},$$

тому $\tilde{\Pi}_{S,\lambda} \overset{\text{def}}{=} (Z_{S,\lambda}^* \downarrow \ker(S-\lambda))^{-1} \in \mathcal{B}(G_{S,2}, \ker(S-\lambda))$ – гомеоморфізм $G_{S,2} \to \ker(S-\lambda)$. Відмітимо, що $g \in R(T-\bar{\lambda})$ тоді і тільки тоді, коли існує $(z, \varphi^{(L)}) \in D[M] \oplus H_0^{(L)}$ таке, що $g = (M-\bar{\lambda})z + \varphi^{(L)}$, тобто $(M-\bar{\lambda})z = g - \varphi^{(L)}$, а отже, при деякому $a \in G_{S,1}$

$$z = M_{\bar{\lambda}}g - M_{\bar{\lambda}}\varphi^{(L)} + \tilde{Z}_{\bar{\lambda}}a. \tag{45}$$

Далі, виходячи з (3)–(5) і результатів праці [21], неважко показати, що якщо A – нормально розв'язний оператор, то

$$S_A^* = \{(z, Mz + \varphi^{(L)}) \in T \mid \exists h \in F_1 : \tilde{\Gamma}_{S,1}(z, \varphi^{(L)}) = A_2^*h,$$
$$\tilde{\Gamma}_{S,2}(z, \varphi^{(L)}) = -A_1^*h\}. \tag{46}$$

Беручи до уваги (45), (46), робимо висновок, що елемент $g \in R(T-\bar{\lambda})$ належить до $R(S_A^* - \bar{\lambda})$ тоді і тільки тоді, коли при деякому $h \in F_1$

$$\tilde{\Gamma}_{S,1}(z, \varphi^{(L)}) = (\Gamma_1 z, -P_0^{(M)}z) =$$
$$= (\tilde{\Gamma}_1 M_{\bar{\lambda}}g - \tilde{\Gamma}_1 M_{\bar{\lambda}}\varphi^{(L)} + \tilde{\Gamma}_1\tilde{Z}_{\bar{\lambda}}a, -P_0^{(M)}(M_{\bar{\lambda}}g - M_{\bar{\lambda}}\varphi^{(L)} + \tilde{Z}_{\bar{\lambda}}a)) =$$
$$= (Z_\lambda^*g - Z_\lambda^*\varphi^{(L)} + M(\lambda)a, -P_0^{(M)}M_{\bar{\lambda}}g + P_0^{(M)}M_{\bar{\lambda}}\varphi^{(L)} - P_0^{(M)}\tilde{Z}_{\bar{\lambda}}a) =$$
$$= (\tilde{M}(\bar{\lambda})a - Z_\lambda^*\varphi^{(L)}, -P_0^{(M)}\tilde{Z}_{\bar{\lambda}}a + P_0^{(M)}M_{\bar{\lambda}}\varphi^{(L)}) +$$
$$+ (Z_\lambda^*g, -P_0^{(M)}M_{\bar{\lambda}}g) = A_2^*h,$$

$$\tilde{\Gamma}_{S,2}(z,\varphi^{(L)}) = (\Gamma_2 z,\varphi^{(L)}) = (\tilde{\Gamma}_2 M_{\bar\lambda} g - \tilde{\Gamma}_2 M_{\bar\lambda}\varphi^{(L)} + \tilde{\Gamma}_2 \tilde{Z}_\lambda a,\ \varphi^{(L)}) .$$

Таким чином, $g \in R(S_A^* - \bar\lambda)$ тоді і тільки тоді, коли (див. (22)) існує $h \in F_1$ таке, що

$$\begin{cases} \tilde{M}_S(\bar\lambda)(a,\varphi^{(L)}) + Z_{S,\lambda}^* g = A_2^* h \\ (a,\varphi^{(L)}) = -A_1^* h \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad Z_{S,\lambda}^* g = A_{S,\lambda}^* h .$$

Іншими словами, $g \in R(S_A^* - \bar\lambda)$ тоді і тільки тоді, коли $Z_{S,\lambda}^* g \in R(A_{S,\lambda}^*)$. Зокрема,

$$g \in R(S_A^* - \bar\lambda) \cap R(T_0 - \bar\lambda)^\perp =$$

$$= R(S_A^* - \bar\lambda) \cap \ker(S-\lambda) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (Z_\lambda^* \downarrow \ker(S-\lambda))g \in R(A_{S,\lambda}^*) \Leftrightarrow g \in \tilde{\Pi}_{S,\bar\lambda} R(A_{S,\lambda}^*) .$$

Співвідношення (44) доведено. ♦

Наслідок 3.

$$\ker(S_A^* - \bar\lambda) = \tilde{Z}_{S,\bar\lambda} A_1^* \ker A_{S,\lambda}^* . \tag{47}$$

Д о в е д е н н я. Щоб переконатись у правильності (47), достатньо повторити міркування, використані при доведенні леми 9, коли $g = 0$.

Теорема 2. *Нехай* $R(A) = F_1$, $\lambda \in \rho(L_2)$. *Тоді*

i) $\dim\ker(S_A^* - \bar\lambda) = \dim\ker A_{S,\lambda}^*$; (48)

ii) $\dim(H / R(S_A^* - \bar\lambda)) = \dim(G_{S,2} / R(A_{S,\lambda}^*))$; (49)

iii) $R(S_A - \lambda)$ *замкнена в* H *тоді і тільки тоді, коли* $A_{S,\lambda}$ – *нормально розв'язний оператор. У цьому випадку*
$\dim(H \Theta R(S_A - \lambda)) = \dim(F_1 \Theta R(A_{S,\lambda}))$; (50)

iv) $\lambda \in \rho(S_A)$ *тоді і тільки тоді, коли* $A_{S,\lambda}^{-1} \in \mathcal{B}(F_1, G_{S,2})$. *У цьому випадку* $(S_A - \lambda)^{-1} - L_\lambda \in \mathcal{B}_\infty(H) \Leftrightarrow A_1 \in \mathcal{B}_\infty(G_{S,1}, F_1)$.

Д о в е д е н н я. ***i***). Зрозуміло, що $R(A_1) + R(A_\lambda) = R(A) = F_1$, тому $\ker A_1^* \cap \ker A_\lambda^* = \{0\}$. Звідси, з (47) і неперервної оборотності оператора $\tilde{Z}_{S,\lambda}$ випливає (48).

ii). Нехай

$$\ker(S-\lambda) = \tilde{\Pi}_{S,\lambda} R(A_{S,\lambda}^*) \dotplus \mathcal{L} . \tag{51}$$

З (51) випливає, що

- $H = R(T_0 - \bar\lambda) \dotplus \tilde{\Pi}_{S,\lambda} R(A_{S,\lambda}^*) \dotplus \mathcal{L} = R(S_A^* - \bar\lambda) \dotplus \mathcal{L}$ (див. (44)), так що
  $\dim(H / R(S_A^* - \bar\lambda)) = \dim\mathcal{L}$;
- $G_{S,2} = \tilde{\Pi}_{S,\lambda}^{-1} \ker(S-\lambda) = R(A_{S,\lambda}^*) + \tilde{\Pi}_{S,\lambda}^{-1}\mathcal{L}$, так що
- $\dim(G_{S,2} / R(A_{S,\lambda}^*)) = \dim \tilde{\Pi}_{S,\lambda}^{-1}\mathcal{L} = \dim\mathcal{L}$.

Рівність (49) доведено.

iii). Оскільки $R(T_0 - \bar{\lambda})$ − замкнений многовид (це випливає з теореми про замкнений графік [3, с. 211]), то правильність цього твердження випливає безпосередньо з (44). При цьому потрібно взяти до уваги теорему про одночасну нормальну розв'язність взаємно спряжених лінійних відношень, зокрема лінійних операторів [3, с. 295; 16] та твердження *a*) з зауваження 1. Беручи до уваги згадані у попередньому реченні твердження, а також (48), (49), бачимо, що має місце (51).

iv). Беручи до уваги (36) і (50) (див. також зауваження 1), отримуємо

$$\lambda \in \rho(S_A) \ \Leftrightarrow \ \ker(S_A - \lambda) = \{0\},$$

$$R(S_A - \lambda) = H \ \Leftrightarrow \ \ker A_{S,\lambda} = \{0\},$$

$$R(A_{S,\lambda}) = F_1 \ \Leftrightarrow \ A_{S,\lambda}^{-1} \in \mathcal{B}(F_1, G_{S,2}).$$

Далі, з огляду на теорему 1, компактність оператора $(S_A - \lambda)^{-1} - L_\lambda$ рівносильна компактності оператора $A_{S,\lambda}^{-1} A_1$, компактність якого, в свою чергу, рівносильна компактності оператора A_1, оскільки $A_{S,\lambda}^{-1} \in \mathcal{B}(F_1, G_{S,2})$. Теорему доведено. ♦

***Зауваження* 5.** У випадку, коли $R(S_A - \lambda)$ не є замкненим, під розмірністю многовиду у (37) і (49) слід розуміти його алгебричну розмірність.

1. *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. об-ва. − 1952. − **1**. − С. 187−246.
2. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. − Киев: Наук. думка, 1984. − 284 с.
   Те саме: *Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L.* Boundary value problems for operator differential equations. − Berlin: Springer, 1991. − 347 p.
3. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. − Москва: Мир, 1972. − 740 с.
4. *Кочубей А. Н.* О расширениях неплотно заданного симметрического оператора // Сиб. мат. журн. − 1977. − **18**, № 2. − С. 314−320.
   Те саме: *Kochubei A. N.* The extensions of a nondensely defined symmetric operator // Sib. Math. J. − 1977. − **18**, No. 2. − P. 225−229.
5. *Красносельский М. А.* О самосопряженных расширениях эрмитовых операторов // Укр. мат. журн. − 1949. − № 1. − С. 21−38.
6. *Лянце В. Э., Сторож О. Г.* Методы теории неограниченных операторов. − Киев: Наук. думка, 1983. − 210 с.
7. *Маламуд М. М.* Об одном подходе к теории расширений неплотно заданного эрмитова оператора // Докл. АН УССР. − 1990. − № 3. − С. 20−25.
8. *Сторож О. Г.* Зв'язок між двома парами лінійних відношень та дисипативні розширення деяких нещільно визначених операторів // Карпат. мат. публікації. − 2009. − **1**, № 2. − С. 207−213.
9. *Сторож О. Г.* Методи теорії розширень та диференціально-граничні оператори: Дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. − Львів, 1995. − 277 с.
10. *Штраус А. В.* О расширениях и характеристической функции симметрического оператора // Изв. АН СССР. Сер. мат. − 1968. − **32**, № 1. − С. 186−207.
    Те саме: *Štraus A. V.* On the extensions and the characteristic function of a symmetric operator // Math. USSR-Izv. − 1968. − **2**, No. 1. − P. 181−203.
11. *Arens R.* Operational calculus of linear relations // Pacific J. Math. − 1961. − **11**, No. 1. − P. 9−23.
12. *Arlinskiĭ Yu. M., Hassi S., Sebestyén Z., De Snoo H. S. V.* On the class of extremal extensions of a nonnegative operator // In: Kérchy L., Gohberg I., Foias C. I., Langer H. (eds): Recent Advances in Operator Theory and Related Topics. − Operator Theory: Advances and Applications. − 2001. − Vol. 127. − P. 41−81.
13. *Bruk V. M.* On the characteristic operator of an integral equation with a Nevanlinna measure in the infinite-dimensional case // Журн. мат. физики, анализа, геометрии. − 2014. − **10**, No. 2. − С. 163−188.

14. *Coddington E. A.* Selfadjoint subspace extensions of nondensely defined symmetric operators // Bull. Amer. Math. Soc. – 1973. – **79**, No. 4. – P. 712–715.
15. *De Snoo H. S. V., Derkach V. A., Hassi S., Malamud M. M.* Generalized resolvents of symmetric operators and admissibility // Methods Funct. Anal. Topology. – 2000. – **6**, No. 3. – P. 24–55.
16. *Dijksma A., de Snoo H. S. V.* Self-adjoint extensions of symmetric subspaces // Pacific J. Math. – 1974. – **54**, No. 1. – P. 71–100.
17. *Hassi S., de Snoo H. S. V., Sterk A. E., Winkler H.* Finite-dimensional graph perturbations of selfadjoint Sturm – Liouville operators // In: Operator theory, Structured Matrices, and Dilations. Tiberiu Constantinescu Memorial Volume. – Bucharest: Theta Foundation, 2007. – P. 205–226.
18. *Hassi S., de Snoo H. S. V., Szafraniec F. H.* Infinite-dimensional perturbations, maximally nondensely defined symmetric operators, and some matrix representations // Indag. Math. – 2012. – **23**, No. 4. – P. 1087–1117.
19. *Kuzhel A. V., Kuzhel S. A.* Regular extensions of Hermitian operators. – Utrecht: VSP, 1998. – 273 p.
20. *Malamud M. M., Mogilevskii V. I.* On extensions of dual pairs of operators // Доп. НАН України. – 1997. – № 1. – С. 30–37.
21. *Oliiar Iu. I., Storozh O. G.* On a criterion of mutual adjointness for the extensions of some nondensely defined operators // Methods Funct. Anal. Topology. – 2014. – **20**, No. 1. – P. 50–58.

О РАЗРЕШИМЫХ РАСШИРЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ НЕПЛОТНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ И РЕЗОЛЬВЕНТАХ ТАКИХ РАСШИРЕНИЙ

В терминах абстрактных краевых условий исследован один класс расширений конечномерного сужения замкнутого плотно определенного линейного оператора в гильбертовом пространстве. С применением методов теории линейных отношений найдены резольвентные множества и построены резольвенты рассматриваемых расширений, множество которых параметризируется некоторым вспомогательным оператором. В случае, когда этот оператор является нормально разрешимым, представлены определенные уточнения основных результатов.

ON SOLVABLE EXTENSIONS OF SOME NONDENSELY DEFINED OPERATORS AND THE RESOLVENTS OF SUCH EXTENSIONS

In the terms of abstract boundary conditions, a class of the extensions of finite-dimensional restriction of closed densely defined linear operator acting in Hilbert space is investigated. Applying the methods of the theory of linear relations, the resolvent sets and the resolvents of considered extensions are established. The set of such extensions is parameterized with some auxiliary operator. Under the assumption that this operator is normally solvable, certain refinements of the main results are indicated.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
27.03.17