УДК 539.3

І. Т. Селезов

УЗАГАЛЬНЕННЯ МЕТОДУ КОШІ – ПУАССОНА І ПОБУДОВА РІВНЯНЬ ТИПУ ТИМОШЕНКА

Розглядається узагальнення методу Коші – Пуассона на n-вимірний евклідів простір і його додаток до побудови гіперболічних апроксимацій. Представлені дослідження узагальнюють і доповнюють попередні. В евклідовому просторі вводяться обмеження на похідні. Формулюється принцип гіперболічного виродження за параметрами і його реалізація у вигляді необхідних і достатніх умов. Як окремий випадок 4-вимірного простору (зі збереженням операторів до шостого порядку) отримано узагальнене гіперболічне рівняння згинних коливань пластин з коефіцієнтами, залежними тільки від числа Пуассона. Це рівняння включає як окремі випадки відомі рівняння Бернуллі – Ейлера, Кірхгофа, Релея, Тимошенка. Як розвиток досліджень Максвелла та Ейнштейна про поширення збурень зі скінченною швидкістю в суцільному середовищі відзначається нетривіальна побудова рівняння Тимошенка згинних коливань балки.

Вступ. Побудова гіперболічних рівнянь, що описують реальні явища поширення збурень із скінченною швидкістю, представляє важливу проблему. Таке моделювання веде свій початок від досліджень Максвелла (Maxwell, 1864) [20]. Після моделювання електромагнітного поля Максвелл на основі глибокого аналізу показав скінченність швидкості поширення збурень у газі, на відміну від традиційної моделі Больцмана (Maxwell, 1867) [21]. Побудова гіперболічних моделей як розвиток досліджень Максвелла була реалізована Ейнштейном (Einstein, 1950) [16] і при дослідженні гравітаційних хвиль розвивалася Вебером (Weber, 1950) [1]. За експериментальні дослідження швидкості поширення гравітаційних хвиль у 2017 році отримали Нобелівську премію три дослідники: B. C. Barish, K. S. Thorne, R. Weiss.

Пізніше було багато узагальнень до побудови моделей, що описують поширення тепла, дифузію і багатьох інших, наведених у (Селезов і Кривонос, 2015) [7]. Відмітимо також останнє дослідження щодо введення ін’єкції медичного препарату в тканину, у якому представлено нове узагальнення дифузійного рівняння в гіперболічне (Selezov & Kryvonos, 2017) [8].

З математичної точки зору, по суті, параболічний оператор другого порядку узагальнювався в гіперболічний теж другого порядку.

Метод розв’язання задачі еластодинаміки для шару розвиненням за малою товщинною координатою запропоновано в 1828–1829 роках в роботах Cauchy (1828) [11] і Poisson (1829) [22]. Це знижує розмірність задачі на одиницю, тобто зводить тривимірну задачу до двовимірної, що набуло реалізації пізніше у багатьох дослідженнях (див., наприклад, Подстригач, 1963) [6]. На n-вимірний евклідовий простір метод було узагальнено Селезовим (Selezov, [24]) в 1997 р. Для дослідження в n-вимірному евклідовому просторі потрібно введення додаткових обмежень при виродженні за малими параметрами.

У цій статті представимо узагальнення методу Коші – Пуассона на n-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ і введемо обмеження на похідні. Розглядається гіперболічне виродження і побудова гіперболічних апроксимацій вищого порядку. В окремому випадку $n = 4$ наведено побудову хвильових гіперболічних рівнянь для пружного шару. На відміну від попередніх досліджень, така апроксимація є вищого порядку, і як окремі випадки включає всі відомі раніше рівняння. Особливо відзначається рівняння Тимошенка згинних коливань балки [26] як нетривіальне узагальнення класичної теорії.

1. Узагальнення методу Коші – Пуассона на *n*-вимірний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$. В евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ з координатами x^q, $q = 1,\ldots,n$, розглядаємо математичну модель, представлену скінченною системою диференціальних рівнянь із частинними похідними, для якої ставимо крайову задачу в області $\Omega\times[0,X^m]$, $X^m > 0$, обмеженій гіперповерхнями $x^s = \pm h^s$, $h^s > 0$ (індекс s фіксований): $\Omega = \{x\in\mathbb{R}^n : -\infty < (x^1, x^2,\ldots, x^{s-1}, x^{s+1},\ldots, x^{n-1}) < < \infty,\ x^n \ge 0,\ -h^s \le x^s \le h^s\}$. Вважаємо, що гіперповерхні $x^s = \pm h^s$ віддалені від серединної гіперповерхні $x^s = 0$ і розглядаємо розвинення відносно $x^s = 0$. Вважаємо також, що на гіперповерхнях $x^s = \pm h^s$ задано певні умови.

Передбачається, що модель залежить від скінченного числа ν параметрів ε_r, $r = 1,\ldots,\nu$. Формально така модель може бути задана як система k диференціальних рівнянь із частинними похідними p-го порядку з k невідомими u_i, $i = 1,\ldots,k$, і n аргументами (Dunford & Schwartz, 1969) [15]

$$F_i(x^1,\ldots,x^n; u_1,\ldots,u_k; u_{1,1},\ldots,u_{k,n},\ldots u_{1,\underbrace{1\ldots1}_{p}},\ldots,u_{k,\underbrace{n\ldots n}_{p}}; \varepsilon_1\ldots,\varepsilon_\nu) =$$
$$= P_i(x^1,\ldots,x^n) \qquad \text{в} \qquad \Omega. \tag{1}$$

На гіперповерхнях $x^s = \pm h^s$ задаємо таку систему граничних умов:

$$f_j(x^1,\ldots,x^n; u_1,\ldots,u_k; u_{1,1},\ldots,u_{k,\underbrace{n\ldots n}_{p-1}}; \varepsilon_1\ldots,\varepsilon_\nu)\Big|_{x^s=\pm h^s} = O_j^{\pm},$$
$$j = 1,\ldots,k\cdot p. \tag{2}$$

Тут індекс після «коми» означає диференціювання за відповідною координатою; у загальному випадку $p \ne n$, F_i залежить від усіх можливих частинних похідних до p-го порядку включно, положення гіперповерхні може залежати від u_i і їхніх похідних. Розв'язання крайової задачі (1), (2) полягає у визначенні функцій u_i, що перетворюють рівняння (1) у тотожність, і у виборі із множини цих функцій таких, які задовольняють умови (2).

1.1. Припущення про малість параметрів. Параметри ε_ν передбачаємо малими: $\varepsilon_\nu \ll 1$, тобто можна розглядати виродження за параметрами $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\nu$. У цьому випадку задачу можна істотно спростити: зменшенням порядку системи диференціальних рівнянь, частковою декомпозицією і т. д. Цю задачу можемо розглядати як відображення диференціального оператора з частинними похідними з $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n-1}$.

Відхилення гіперповерхонь $x^s = \pm h^s$ від гіперповерхні $x^s = 0$ передбачаємо також малими. Зміну функцій уздовж гіперповерхні $x^s = 0$ характеризуємо величиною ℓ. Тоді $\varepsilon_0 = \dfrac{h^s}{\ell} \ll 1$. Величину $2h$ вважаємо скінченною додатною: $0 < 2h < M$, $M < \infty$.

Якщо величина ℓ дорівнює довжині хвилі λ, тобто $\ell = \lambda$, то в гіперболічному операторі це відповідає виходу на характеристику, що визначається головною частиною оператора.

1.2. Обмеження на похідні. На відміну від роботи Селезова (Selezov, [24]), тут вводиться обмеження на клас диференціальних операторів. Похідні від компонент, паралельних до серединної поверхні гіпершару, мають бути парними $u_{k,s}$ $(s = 2, 4, \dots)$, що звужує клас задач. У випадку непарних похідних $u_{k,n}$ при $k = s$ поле може проникати всередину шару і розвинення не будуть придатні.

1.3. Розвинення у ряд як зниження розмірності задачі. Коші і Пуассон при розгляді задачі еластодинаміки в розмірному вигляді для шару припускали малість товщини шару порівняно з планарним розміром. При узагальненні на евклідовий простір ця умова була означена вище: зміна шуканих функцій уздовж гіперповерхні є набагато більшою, ніж їх зміна уздовж нормалі.

Розвинення польових функцій у степеневі ряди за s-ю координатою відносно серединної гіперповерхні приводить до виродженої задачі визначення коефіцієнтів рядів, залежних тепер тільки від $n-1$ координат:

$$u_i(t, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}(t, x^2, \dots, x^{s-1}, x^s, \dots, x^n)(x^s)^k .$$

Таким чином, розмірність задачі знижена на одиницю.

У цьому випадку розвинення справджуються для будь-якого поля, що характеризується гладкими функціями (нескінченно диференційовними функціями), так щоб існували розвинення, що сходяться. При формальній побудові розв'язків можна будувати розвинення у степеневі ряди за нормаллю до координатної лінії у припущенні, що шукані функції є з класу C^∞.

2. Гіперболічне виродження і скінченність швидкості поширення збурень. Розглянемо окремий випадок, коли диференціальні рівняння (1) і граничні умови (2) представлені як сума лінійних і нелінійних частин, де порядок p лінійного оператора L є вищим, ніж порядок p_1 нелінійного оператора (Courant & Hilbert, 1962) [13]

$$\begin{gathered}
a_{i\ell q}(x^1,\dots,x^n;\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_\nu)\frac{\partial^q u_\ell}{\partial x^{1(\alpha_1)}\dots\partial x^{n(\alpha_n)}} + \\
+\hat{F}_i\left(x^1,\dots,x^n;u_1,\dots,u_k;\frac{\partial u_\ell}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial u_k}{\partial x^n};\frac{\partial^2 u_\ell}{\partial x^1 \partial x^2},\dots;\frac{\partial^{p_1} u_\ell}{\partial x^{1(p_1)}},\right. \\
\left.\dots,\frac{\partial^{p_1} u_k}{\partial x^{n(p_1)}};\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_\nu\right) = P_i \qquad \text{в} \quad \Omega, \quad (i,\ell) = 1,\dots,k, \\
q = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \quad q = 1,\dots,p, \quad p_1 = 1,\dots,p-1,
\end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered}
\left\{ b_{j\ell q}(x^1,\dots,x^n;\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_\nu)\frac{\partial^q u_\ell}{\partial x^{1(\alpha_1)}\dots\partial x^{n(\alpha_n)}} + \right. \\
\left. \left. +\hat{f}_i\left(x^1,\dots,x^n;u_1,\dots;\dots\frac{\partial^{p_2} u_k}{\partial x^{n(p_2)}};\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_\nu\right)\right\}\right|_{x^s=\pm h^s} = Q_j^{\pm}, \\
j = p \cdot k, \quad q = 1,\dots,p-1, \quad p_2 = 1,\dots,p-2, \quad \ell = 1,\dots,k.
\end{gathered} \tag{4}$$

Систему рівнянь (3), (4) при $\varepsilon_r \to 0$ називатимемо виродженою системою. Якщо гіперболічна система диференціальних рівнянь (3) при виродженні за параметрами залишається гіперболічною, то таке виродження називатимемо ***гіперболічним виродженням***.

При виродженні можуть бути отримані рівняння різного типу. Можливі три випадки: виродження до рівнянь гіперболічного, параболічного або змішаного типу. Питання полягає в тому, що правильно? Згідно з принципом гіперболічного виродження за малим параметром необхідно, щоб початкова гіперболічна система вироджувалася також у гіперболічну. Саме тому тільки граничні гіперболічні системи представляють інтерес з точки зору ***скінченності швидкості поширення збурень*** і симетрії (Selezov, [24]).

Диференціальні рівняння і граничні умови можемо записати у вигляді (Kythe, 1996) [18]

$$L_i \equiv a_{i\ell q} \frac{\partial^q u_\ell}{\partial x^{1(\alpha_1)} \dots \partial x^{n(\alpha_n)}} + F_i = P_i \qquad \text{в} \quad \Omega\,, \qquad t \geq 0\,,$$

$$(i,\ell) = 1,\dots,k, \qquad q = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \quad q = 1,\dots,p\,, \tag{5}$$

$$\left\{ b_{j\ell q} \frac{\partial^q u_\ell}{\partial x^{1(\alpha_1)} \dots \partial x^{n(\alpha_n)}} + f_j \right\}\Bigg|_{x^s = \pm h^s} = Q_j^{\pm}\,,$$

$$j = p \cdot k\,,\ q = 1,\dots,p-1\,,\ \ell = 1,\dots,k\,, \tag{6}$$

де (5) − система k рівнянь p-го порядку з k невідомими функціями, які повинні визначатися як її розв'язки, що задовольняють граничні умови (6) і початкові умови у випадку початково-крайової задачі так, щоб гарантувалася коректна постановка задачі. Перший член у (5) є головною частиною оператора, другий член − F_i, залишається як частина оператора. У граничних умовах (6) член f_j − оператор нижчого порядку, ніж перший член. (За індексами, що повторюються, виконується підсумовування.) Передбачається, що коефіцієнти $a_{i\ell q}$ і $b_{j\ell q}$ є сталими, але вони можуть залежати від малого параметра $\varepsilon_r \ll 1$.

На відміну від рівнянь загального вигляду (1), (2), система рівнянь (5) може бути класифікована за типом диференціальних рівнянь із частинними похідними. Якщо система рівнянь (5) є гіперболічного типу, то у випадку коректно поставленої задачі Коші для (5), (6) в області Ω існують розв'язки у формі слабких розривів, що поширюються (розриви похідних найвищого порядку в диференціальному операторі). Це відповідає реальності: у дійсних фізичних середовищах або системах будь-яке збурення поширюється зі скінченною швидкістю і визначається властивостями середовища або системи. Математичне формулювання поняття скінченних швидкостей означене Калашниковим (1979) [3] як така властивість: розв'язок задачі Коші з фінітними початковими даними є фінітним за просторовими змінними при кожному фіксованому значенні часової координати. Слід відмітити, що головна частина оператора є відповідальною за розв'язність початково-крайової задачі за Коші −Ковалевською (Misokhata, 1965) [4].

Необхідно отримати гіперболічні апроксимації, тобто побудувати відображення початкового простору $\mathbb{R}^n(\varepsilon_r)$ у вироджений простір, $\mathbb{R}^n(\varepsilon_r) \to \mathbb{R}^n$, що задовольняє умову граничної коректності − бути гіперболічного типу, тобто умову скінченності швидкості поширення збурень [7, 17]. У цьому випадку у виродженому просторі замість функцій $u(x)$ появляються нові функції $\hat{u}(x)$.

Надалі розглядаємо випадок координатного виродження $\varepsilon_0 = 2h/\ell \to 0$, де $2h$ є скінченною величиною. Розвинення польових функцій у степеневі ряди за виродженою координатою s відносно серединної гіперповерхні приводить до виродженої задачі визначення коефіцієнтів рядів, залежних тепер тільки від $n-1$ координати:

$$u_i(t, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}(t, x^2, \dots, x^{s-1}, x^s, \dots, x^n)(x^s)^k\,. \tag{7}$$

Підстановка (7) у рівняння (5) із частинними похідними і граничні умови (6) дає рекурентні співвідношення з рівнянь (5) і безліч систем диференціальних рівнянь нескінченного порядку з (6) в $\mathbb{R}^{n-1}$. Рекурентні співвідношення дозволяють виразити усі коефіцієнти в послідовних наближеннях через декілька початкових.

Наступний крок – усікання цих нескінченних систем, яке можливе різними шляхами, при збереженні членів, відповідних різним правилам. Можна з рекурентних співвідношень виразити всі u_{ik} в термінах мінімальної скінченної кількості шуканих функцій, що відповідають кількості систем диференціальних рівнянь. Підстановка цих функцій в усічені рівняння приводить до розв'язувальних рівнянь, що дозволяє отримувати різні апроксимації, тобто спрощені моделі. Правила збереження членів повинні бути такими, щоб ця система була гіперболічного типу.

2.1. ***Необхідна умова*** існування скінченної швидкості поширення збурень в n-му наближенні – це гіперболічність оператора n-го порядку.

Для побудови гіперболічної апроксимації n-го порядку необхідно утримати в нескінченних системах усі просторово-часові диференціальні оператори до заданого порядку n. Збереження усіх членів оператора до певного порядку дає головну частину оператора гіперболічного типу.

2.2. ***Достатня умова*** існування скінченності швидкості поширення збурень – це коректна постановка початково-крайової задачі (Misokhata, 1965) [4].

Наприклад, збереження операторів до 4-го порядку в n-вимірному евклідовому просторі приводить до гіперболічної апроксимації, відповідної рівнянню Тимошенка, що не містить коригуючого коефіцієнта типу товщинного зсуву. Збереження операторів до 6-го порядку дає нове вище наближення – узагальнене гіперболічне рівняння.

3. Узагальнене гіперболічне рівняння поширення згинних хвиль у пружному шарі. Виходячи із викладеного вище, розглянемо побудову вироджених моделей для випадку $\mathbb{R}^4$. Це – задача еластодинаміки для шару. Математичне формулювання відповідної початково-крайової задачі для пружного ізотропного середовища в термінах переміщень u_1, u_2, u_3, залежних від ортогональних координат x_1, x_2, x_3 і часу t, представляється таким чином: знайти вектор-функцію $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ як розв'язок рівнянь

$$\nabla^2 u_k + (1 + \lambda / G)\partial_k(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) + \rho F_k = \partial_{tt} u_k \quad \text{в} \quad \Omega \times [0, T],\ T > 0, \tag{8}$$

що задовольняє граничні умови

$$\sigma_{33}\big|_{x_3 = \pm \xi / 2} = q^{\pm}(x_1, x_2, t),$$

$$\sigma_{3i}\big|_{x_3 = \pm \xi/2} = p^{\pm}(x_1, x_2, t), \qquad i = 1, 2, \tag{9}$$

і початкові умови

$$u_k\big|_{t=0} = 0, \qquad \partial_t u_k\big|_{t=0} = 0, \qquad k = 1, 2, 3. \tag{10}$$

Компоненти вектора переміщення представимо у вигляді степеневих рядів за x_3:

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_{i\nu}(x_1, x_2, t)\, x_3^{\nu}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{11}$$

Функції $u_{i\nu}$ передбачаємо диференційовними стільки разів, скільки вимагається, усі похідні $u_{i\nu}$ є неперервними, а ряди (11) сходяться рівномірно. Масові сили F_k надалі не враховуємо. У (8) позначено: $\nabla^2 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}$ – лапласіан, $\boldsymbol{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{e}_3$ – оператор градієнта, $\mathbf{e}_k$, $k = 1, 2, 3$,

– базисні вектори; «$\cdot$» – символ скалярного множення. Символи ∂_k і ∂_t – частинні похідні за координатою x_k і часом t. Вираз для компонент тензора напружень має вигляд

$$\sigma_{ik} = \lambda u_{n,n}\delta_{ik} + G(u_{i,k} + u_{k,i}).$$

Тут $\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k, \end{cases}$ – символ Кронекера, G і λ – сталі Ляме, що виражаються через модуль Юнга E і коефіцієнт Пуассона ν:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \qquad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Безрозмірні величини вводимо, беручи за характерні товщину $2h$ [м], швидкість зсувних хвиль c_s [м/с], густину ρ [кг/м^3], за формулами:

$$u_k^* = \frac{1}{2h}u_k, \qquad (x_1^*, x_2^*) = \frac{1}{2h}(x_1, x_2),$$

$$t^* = \frac{c_s}{2h}t, \quad q^* = \frac{1}{G}q, \quad h^* = \frac{1}{2}, \quad c_s^2 = \frac{G}{\rho}.$$

Крім цього, при дослідженні поширення хвиль вводимо безрозмірні величини: $\ell^* = \frac{1}{2h}\ell$ – довжину хвилі, $c^* = \frac{c}{c_s}$ – фазову швидкість.

Узагальнене диференціальне рівняння відносно поперечної координати $u_3 = w_0$ має вигляд (індекс «$*$» тут і надалі опускаємо)

$$\left\{ \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + a_1\nabla^2\nabla^2 \right)_{\text{K}} - a_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2 + a_3\frac{\partial^4}{\partial t^4} \right]_{\text{TM}} - \right.$$

$$\left. - b_1\nabla^2\nabla^2\nabla^2 + b_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2\nabla^2 - b_3\frac{\partial^4}{\partial t^4}\nabla^2 + b_4\frac{\partial^6}{\partial t^6} \right\}_{\text{TMC}} w_0 =$$

$$= \left\{ \left[1 - d_1\nabla^2 + d_2\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right]_{\text{TM}} + d_3\nabla^2\nabla^2 - d_4\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2 + \right.$$

$$\left. + d_5\frac{\partial^4}{\partial t^4} \right\}_{\text{TMS}} (q^+ - q^-). \qquad (12)$$

У (12) позначено: $w_0 = w_0(x_1, t)$ – поперечне відхилення (прогин), $q^+ - q^-$ – поперечне навантаження, а коефіцієнти рівняння є такими:

$$a_1 = \frac{1}{6(1-\nu)}, \quad a_2 = \frac{2-\nu}{6(1-\nu)}, \quad a_3 = \frac{7-8\nu}{48(1-\nu)}, \quad b_1 = \frac{1}{120(1-\nu)},$$

$$b_2 = \frac{4\nu^2 - 16\nu + 1}{480(1-\nu)^2}, \quad b_3 = \frac{16\nu^2 - 37\nu + 19}{5760(1-\nu)^2}, \quad b_4 = \frac{64\nu^2 - 104\nu + 41}{7680(1-\nu)^2},$$

$$d_1 = \frac{2-\nu}{8(1-\nu)}, \quad d_2 = \frac{1}{8}, \quad d_3 = \frac{\nu^2 - 4\nu + 3}{384(1-\nu)^2},$$

$$d_4 = \frac{4\nu^2 - 12\nu + 7}{768(1-\nu)^2}, \quad d_5 = \frac{1}{384}.$$

Оператор з індексом «K» відповідає рівнянню Бернулі – Ейлера (поширений на пластини Кірхгофом). Оператор з індексом «TM» відповідає рівнянню Тимошенка (поширений на пластини Уфляндом і розвинений Міндліним). Рівняння Релея входить в оператор «TM» при $a_3 = 0$. Оператор з індексом «TMS» відповідає узагальненому рівнянню (побудований Селезовим).

З наведеної аналітичної побудови випливає як окремий випадок рівняння Тимошенка, але без введення коригуючого параметра − коефіцієнта зсуву. Основний вклад у наближенні Тимошенка дають члени вищого наближення

$$-b_1\nabla^2\nabla^2\nabla^2 w_0 + b_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2\nabla^2 w_0 - b_3\frac{\partial^4}{\partial t^4}\nabla^2 w_0 + b_4\frac{\partial^6}{\partial t^6}w_0 .$$

5. Про гіперболічну модель Тимошенка. Приводиться новий погляд на уточнені рівняння типу Тимошенка для стержнів, пластин і оболонок відповідно до фундаментальних досліджень Максвелла, Ейнштейна, Ландау про поширення збурень з скінченною швидкістю. Дж. Максвелл після фундаментальних досліджень в області електромагнетизму (Maxwell, 1864) [20] уперше представив гіперболічне рівняння поширення хвиль зі скінченною швидкістю у газах (Maxwell, 1867) [21] замість параболічного, такого, що описує поширення збурень з нескінченною швидкістю.

С. П. Тимошенко у 1921 р. [26] уперше узагальнив параболічне рівняння поширення згинних коливань балки на гіперболічне рівняння, застосувавши феноменологічний підхід, так що при згинних деформаціях балки нормаль не залишається нормаллю до серединної поверхні , що не враховується моделлю суцільного середовища. У класичних моделях Бернулі − Ейлера, Кірхгофа (1850) [17], Релея (Rayleigh, 1889) [23] нормаль залишається нормаллю. Ефекти Тимошенка проявляються локально за наявності різких неоднорідностей або коротких хвиль і треба застосовувати більш загальні теорії, наприклад, теорію Коссера (Cosserat, 1909) [12].

Ніяким коригуючим коефіцієнтом неможливо змінити тип диференціального оператора, можна тільки підбором цього коефіцієнта наблизити опис до того, що передбачається моделлю суцільного середовища.

Узагальнення Тимошенка аналогічно тому, що має місце при побудові і інших гіперболічних моделей, коли враховуються ефекти вищого порядку, що виходять за рамки класичних традиційних теорій суцільних середовищ. Наприклад, поширення тепла (Cattaneo, 1948) [10] (у цьому випадку відмінність від класичної теорії пізніше пояснили нерівноважною термодинамікою (Luikov, 1966) [19]), гіперболічна турбулентність (Монін, 1955) [5], модель дифузії (Давидов, 1935) [2] (яка враховує зіткнення часток), узагальнене рівняння Смолуховського (Davies, 1954) [14], статистичні процеси (Фок, 1926) [9], седиментація (Selezov, 2014) [25].

З точки зору теорії диференціальних операторів, узагальнення Тимошенка є істотно нетривіальним, оскільки в цьому випадку узагальнюється параболічний оператор вищого порядку (четвертого, а не другого), на відміну від усіх попередніх узагальнень (дифузія, тепло тощо).

Розглянемо рівняння, що описують поширення одновимірних хвиль, які випливають з (12), при повороті відносно вертикальної осі, нормальної до серединної поверхні.

− Рівняння Бернулі − Ейлера (1695, 1744), поширене на пластини Кірхгофом (Kirchhoff, 1850) [17]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{D}{\rho h}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 . \qquad (13)$$

− Рівняння Релея з урахуванням інерції обертання (Rayleigh, 1889)[23]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{D}{\rho h}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{I}{h}\frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} = 0 . \qquad (14)$$

− Рівняння Тимошенка з урахуванням зсуву (Timoshenko, 1921) [26]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{D}{\rho h}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left(\frac{D}{k_s^2 G h} + \frac{I}{h}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\rho I}{k_s^2 G h}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 . \qquad (15)$$

Рівняння (15), що включає (13) і (14), було представлене в змістовній статті С. П. Тимошенка в 1921 р. [26] і набуло поширення як рівняння Тимошенка.

Висновки. Наведено узагальнення методу Коші – Пуассона на n-вимірний евклідовий простір з обмеженнями на диференціальні оператори і малість параметрів виродження. Записано умови виродження гіперболічних апроксимацій і скінченності швидкості поширення збурень. Отримано узагальнене рівняння поширення згинних хвиль у шарі. Відзначається рівняння Тимошенка як нетривіальне узагальнення параболічного оператора вищого порядку.

1. *Вебер Дж.* Общая теория относительности и гравитационные волны. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 272 с.
   Те саме: *Weber J.* General relativity and gravitational waves. – New York: Intersci. Publ., 1961. – viii+200 p.
2. *Давыдов Б. И.* Уравнение диффузии с учетом молекулярной скорости // Докл. АН СССР. – 1935. – **2**, № 7. – С. 474–475.
3. *Калашников А. С.* О понятии конечности скорости распространения возмущений // Успехи мат. наук. – 1979. – **34**, № 2. – С. 199–200.
   Те саме: *Kalashnikov A. S.* The concept of a finite rate of propagation of a perturbation // Russian Math. Surveys. – 1979. – **34**, No. 2. – P. 235–236.
4. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. – Москва: Мир, 1977. – 504 с.
   Те саме: *Mizohata S.* The theory of partial differential equations. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1979. – 504 p.
5. *Монин А. С.* О диффузии с конечной скоростью // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. – 1955. – № 3. – С. 234–248.
6. *Подстригач Я. С.* Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя // Инж.-физ. журн. – 1963. – **6**, № 10. – С. 129–136.
7. *Селезов И. Т., Кривонос Ю. Г.* Волновые гиперболические модели распространения возмущений. – Киев: Наук. думка, 2015. – 172 с.
8. *Селезов И. Т., Кривонос Ю. Г.* Моделирование распространения медицинского препарата в ткани в обобщенной постановке // Кибернетика и системный анализ. – 2017. – **53**, № 4. – С. 50–58.
   Те саме: *Selezov I. T., Kryvonos Iu. G.* Modeling medicine propagation in tissue: Generalized statement // Cybernetics and Systems Analysis. – 2017. – **53**, No. 4. – P. 535–542. – DOI 10.1007/s10559-017-9955-1.
9. *Фок В. А.* Решение одной задачи теории диффузии по методу конечных разностей и приложение его к диффузии света // Тр. гос. оптич. ин-та. – 1926. – **4**, вып. 34. – С. 1–32. – (§ 13. Связь с дифференциальными уравнениями и выражение для диффузии. – С. 29–31.)
10. *Cattaneo C.* Sulla conduzione del calore // Atti Semin. Mat. Fis. della Università di Modena. – 1948. – **3**, No. 3. – P. 83–101.
11. *Cauchy A. L.* Sur l'équilibre et le mouvement d'une lame solide // In: *Cauchy A. L.* Exercices de mathematiques, 3. – Paris, 1828. – P. 245–326.
   https://books.google.com.ua/books?id=dOWIJj4oMoEC&printsec=frontcover&hl=uk&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false.
12. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie de corps déformables. – Paris: A. Hermann et fils, 1909. – vi+227 p.
13. *Courant R., Hilbert D.* Methods of mathematical physics. – New York etc.: Intersci. Publ., 1962. – Vol. 1, 2. – 830 p.
14. *Davies R. W.* The connection between the Smoluchowski equation and the Kramers – Chandrasekhar equation // Phys. Review. – 1954. – **93**, No. 6. – P. 1169–1170.
15. *Dunford N., Schwartz J. T.* Linear operators. Part II. Spectral theory. Self adjoint operators in Hilbert space. – New York etc.: Intersci. Publ. Wiley & Sons, 1963. – ix+P. 859–1923.
16. *Einstein A.* The meaning of relativity. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1950. – 150 p.

17. *Kirchhoff G.* Über das gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe // J. Reine angew. Math. – 1850. – **40**, No. 1. – P. 51–88.
18. *Kythe P. K.* Fundamental solutions for differential operators and applications. – Boston: Birkhäuser, 1996. – xxiv+414 p.
19. *Luikov A. V.* Application of irreversible thermodynamics methods to investigation of heat and mass transfer// Int. J. Heat Mass Transfer. – 1966. – **9**, No. 2. – P. 139–152.
20. *Maxwell J. C.* A dynamical theory of the electromagnetic field // Phil. Trans. R. Soc. London. – 1865. – **155**. – P. 459–512.
21. *Maxwell J. C.* On the dynamical theory of gases // Phil. Trans. R. Soc. London. – 1867. – **157**. – P. 49–88.
22. *Poisson S. D.* Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques // Mém. Acad. Roy. Sci. – 1829. – **8.** – P. 357–570.
23. *Rayleigh L* On the free vibrations of an infinite plate of homogeneous isotropic elastic matter // Proc. London Math. Soc. – 1889. – **20**. – P. 225–234.
24. *Selezov I.* Degenerated hyperbolic approximations of the wave theory of elastic plates // In: Differential Operators and Related Topics: Proc. Mark Krein Int. Conf. on Operator Theory and Applications (Odessa, Ukraine, August 18–22, 1997), Vol. 1. – Ser. Operator Theory: Advances and Applications. – Vol. 117. – Basel: Birkhauser Verlag, 2000. – P. 339–354.
25. *Selezov I.* Extended models of sedimentation in coastal zone // Vib. Phys. Sys. – 2014. – **26**. – P. 243–250.
26. *Timoshenko S. P.* On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars// Phil. Mag. – 1921. – Ser. 6. – **41**, No. 245. – P. 744–746. – https://doi.org/10.1080/14786442108636264.

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА КОШИ – ПУАССОНА И ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТИПА ТИМОШЕНКО

Рассматривается обобщение метода Коши – Пуассона на n-мерное евклидово пространство и его приложение к построению гиперболических аппроксимаций. Представленные исследования обобщают и дополняют предыдущие. В евклидовом пространстве вводятся ограничения на производные. Формулируется принцип гиперболического вырождения по параметрам и его реализация в виде необходимых и достаточных условий. Как частный случай 4-мерного пространства, сохраняя операторы до 6-го порядка, получено обобщенное гиперболическое уравнение изгибных колебаний пластин с коэффициентами, зависящими только от числа Пуассона. Это уравнение включает как частные случаи все известные уравнения Бернулли – Эйлера, Кирхгофа, Релея, Тимошенко. Как развитие исследований Максвелла и Эйнштейна о распространении возмущений с конечной скоростью в сплошной среде отмечается нетривиальное построение Тимошенко уравнения изгибных колебаний балки.

GENERALIZATION OF CAUCHY – POISSON METHOD AND CONSTRUCTION OF EQUATIONS OF TIMOSHENKO TYPE

We consider a generalization of the Cauchy – Poisson method to n-dimensional Euclidean space and its application to the construction of hyperbolic approximations. The presented studies generalize and supplement the previous ones. In Euclidean space, restrictions on the derivatives are introduced. The principle of hyperbolic degeneracy in terms of parameters is formulated and its implementation in the form of necessary and sufficient conditions. As a particular case of a 4-dimensional space, preserving operators up to the 6th order, we obtain a generalized hyperbolic equation for the bending vibrations of plates with coefficients depending only on the Poisson number. This equation includes, as special cases, all the known equations of Bernoulli – Euler, Kirchhoff, Rayleigh, Timoshenko. As the development of Maxwell and Einstein's researches on the propagation of perturbations with finite velocity in a continuous medium, Tymoshenko's non-trivial construction of the equation for the bending vibrations of a beam is noted.

Ін-т гідромеханіки НАН України, Київ

Одержано
26.03.17