

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕПЛООВОГО ТА НАПРУЖЕНОГО СТАНІВ В ОПРОМІНЮВАНІЙ СИСТЕМІ З ШАРІВ РІЗНОЇ ПРОЗОРОСТІ, РОЗДІЛЕНИХ НЕПОГЛИНАЮЧИМ СЕРЕДОВИЩЕМ

Сформульовано та розв'язано задачу про дослідження термонапруженого стану в системі, що складається з частково прозорого та непрозорого термочутливих шарів, зумовленого тепловим опроміненням зі сторони непрозорого шару. На основі отриманих числових розв'язків встановлено ряд нових закономірностей впливу теплообміну випромінюванням на теплову та механічну поведінку такої системи.

Елементи конструкцій і приладів, що функціонують за теплових навантажень, реально перебувають в умовах теплообміну випромінюванням з оточуючим середовищем (зокрема, за цільового опромінення). При цьому їх тепловий та термонапружений стан залежить від теплового стану в оточенні. Тому прогнозування термомеханічної поведінки таких елементів вимагає постановки задач про теплоперенос та термонапружений стан в системах, складовими частинами яких є тіла різної прозорості (частково прозорі та непрозорі) для теплового випромінювання, а також розробки методики розв'язування таких задач. У цьому випадку побудова моделей термомеханіки для непрозорих та частково прозорих тіл з урахуванням процесів випромінювання та поглинання теплової енергії ускладнена тим, що (при визначенні обумовлених тепловим випромінюванням теплових потоків на поверхні чи об'ємних тепловиділень у розглядуваному тілі) необхідно враховувати наявність оточуючих твердих тіл, їх тепловий стан, радіаційні властивості, геометрію і розташування. Детальний огляд моделей термомеханіки для тіл різної прозорості та проблем, які виникають при їх побудові, проведено в [2, 3, 5, 8 та ін.].

У роботах [2, 4, 8 та ін.] запропоновано підходи до дослідження теплового та термонапруженого станів опромінюваних чи охолоджуваних термочутливих частково прозорих та непрозорих тіл. Зокрема, враховано специфіку термочутливості теплофізичних, радіаційних та механічних характеристик, які входять у співвідношення сформульованих задач теплопереносу та термопружності, що особливо важливо за умов високотемпературного нагріву.

У праці [7] здійснено постановку задачі про дослідження термонапруженого стану в системі, що складається з розділених проміжком непоглинаючого середовища частково прозорого та непрозорого термочутливих шарів, зумовленого тепловим опроміненням зі сторони частково прозорого шару. На основі аналізу отриманих числових розв'язків виявлено ряд нових закономірностей впливу радіаційних характеристик матеріалів, температури джерела опромінення, теплообміну випромінюванням, наявності середовища між шарами на механічну та теплову поведінку складників системи.

У цій статті сформульовано та розв'язано аналогічну задачу для випадку опромінення зі сторони непрозорого шару.

Розглянемо систему (див. рис. 1), що складається з розділених проміжком непоглинаючого середовища плоскопаралельних шарів різної прозорості (непрозорого товщиною h_{op} і частково прозорого товщиною h_{sem}), яка цільово рівномірно опромінюється з інтенсивністю $I_{\lambda}^{(e)}$ зі сторони непрозорого шару від нагрітої паралельної до них поверхні із заданою постійною температурою T_s . Інтенсивність такого теплового потоку згідно з [3, 4] задаємо у

вигляді $I_{\lambda}^{(e)} = kI_{\lambda b}(\lambda, T_s)$, $k = \text{const}$. Тут λ – довжина хвилі випромінювання, β – кут, що утворює напрям падіння променя з віссю Oz , яка направлена по нормалі до шарів. Коефіцієнт k характеризує енергетичні параметри реального джерела. Области зовнішнього середовища $z < 0$, $z > \ell$ – повітря, яке вважається прозорим для випромінювання [13]. Поверхні шарів вільні від силового навантаження, а краї $x \rightarrow \pm\infty$, $y \rightarrow \pm\infty$ вільні від зусиль і моментів. Початкові температури $T_{\text{op}}(z, 0)$, $T_{\text{sem}}(z, 0)$ шарів і температуру повітря вважаємо сталими і рівними T_0 .

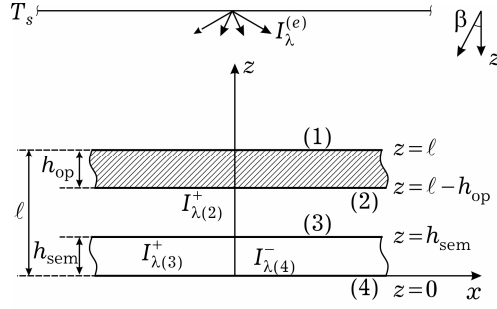


Рис. 1

Як і в [7], при вивченні поширення випромінювання в системі враховуємо випромінювання джерела, випромінювання і поглинання теплової енергії шарами, заломлення і дифузне відбивання на границях (середовище між шарами вважаємо прозорим, а його показник заломлення рівним 1). При цьому поширення випромінювання у частково прозорому шарі описуємо рівнянням переносу, яке враховує його власне випромінювання [13, 14]. Тоді на основі балансу потоків випромінювання на поверхнях $z = 0$, $z = h_{\text{sem}}$ частково прозорого шару та непрозорого $z = \ell - h_{\text{op}}$, що випромінює теплову енергію з інтенсивністю $I_{\lambda b}^{-} = (\lambda, T(1 - h_{\text{op}}))$ (тут і надалі індекси «op» і «sem» стосуються непрозорого та частково прозорого шарів, а індекси «1»–«4» – відповідних поверхонь (див. рис. 1)), отримуємо таку систему співвідношень для визначення ефективних інтенсивностей випромінювання [3, 13, 14] $I_{\lambda(3)}^{+}(h_{\text{sem}}, \nu)$, $I_{\lambda(4)}^{-}(0, \nu)$, $I_{\lambda(2)}^{+}(\ell - h_{\text{op}}, \nu)$ на поверхнях $z = h_{\text{sem}}$, $z = 0$, $z = \ell - h_{\text{op}}$ шарів:

$$\begin{aligned}
 & I_{\lambda(3)}^{+}(h_{\text{sem}}, \nu) - 2R_{\lambda \text{sem}} \int_0^1 \nu I_{\lambda(4)}^{-}(0, \nu) \exp(-a_{\lambda} h_{\text{sem}} \nu^{-1}) d\nu - n_{\lambda}^2 R_{\lambda \text{sem}} I_{\lambda}^{+\text{ir}} = \\
 & = \begin{cases} n_{\lambda}^2 (1 - R_{\lambda \text{sem}}) (1 - R_{\lambda \text{sem}} R_{\lambda \text{op}})^{-1} I_{\lambda b}^{-}(\pi - \xi), & \nu \leq \nu_*, \\ 0, & \nu > \nu_*, \end{cases} \\
 & I_{\lambda(4)}^{-}(0, \nu) - 2R_{\lambda \text{sem}} \int_0^1 \nu I_{\lambda(3)}^{+}(h_{\text{sem}}, \nu) \exp(-a_{\lambda} h_{\text{sem}} \nu^{-1}) d\nu - n_{\lambda}^2 R_{\lambda \text{sem}} I_{\lambda}^{-\text{ir}} - \\
 & - R_{2\lambda} (1 - R_{1\lambda})^2 (1 - R_{1\lambda} R_{2\lambda})^{-1} I_{\lambda}^{-}(\ell, \mu) \exp(-a_{\lambda} h_{\text{sem}} \mu^{-1}) = 0. \quad (1) \\
 & I_{\lambda(2)}^{+}(\ell - h_{\text{op}}, \nu) = n_{\lambda}^2 (1 - R_{\lambda \text{sem}}) \times \\
 & \times (1 - R_{\lambda \text{sem}} R_{\lambda \text{op}})^{-1} I_{\lambda(4)}^{-}(\ell, \mu) \exp(-a_{\lambda} h_{\text{sem}} \mu^{-1}) + \\
 & + (1 - R_{\lambda \text{sem}}) I_{\lambda}^{-\text{ir}} + R_{\lambda \text{sem}} (1 - R_{\lambda \text{sem}} R_{\lambda \text{op}})^{-1} I_{\lambda b}^{-}, \quad (2)
 \end{aligned}$$

де $v = \cos \beta$, $\xi = \arcsin(n_\lambda \sqrt{1 - v^2})$, $\mu = -\sqrt{1 - (1 - v^2)n_\lambda^2}$, $\beta_* = \arcsin(1/n_\lambda)$,
 $v_* = \cos \beta_*$, $I_{\lambda b}^- = \varepsilon(T(\ell - h_{\text{оп}}))I_{\lambda b}(T(\ell - h_{\text{оп}}))$; $R_{\lambda \text{sem}}$, $R_{\lambda \text{оп}}$, ε – спектральні
коєфіцієнти відбивання та інтегральний ступінь чорноти поверхонь частково
прозорого та непрозорого шарів, а a_λ , n_λ – спектральні коєфіцієнт погли-
нання і показник заломлення для частково прозорого шару,

$$I_\lambda^{+\text{ir}} = a_\lambda \int_0^{h_{\text{sem}}} I_{\lambda b}(\lambda, T) \exp(-a_\lambda z_*) dz_*,$$

$$I_\lambda^{-\text{ir}} = a_\lambda \int_0^{h_{\text{sem}}} I_{\lambda b}(\lambda, T) \exp(-a_\lambda (h_{\text{sem}} - z_*)) dz_*.$$

Ця система включає інтегральні рівняння (1) для частково прозорого шару і співвідношення (2), яке пов'язує ефективні інтенсивності на суміжних поверхнях. Отриманий аналітично розв'язок системи (1), (2) має вигляд

$$I_{\lambda(3)}^+(h_{\text{sem}}, v) = NA_1 C_2 M_1 f^* + 2NA_1 R_{1\lambda} g^* + \bar{N}(1 + A_1 C_1 M_1) I_\lambda^{+\text{ir}} \times$$

$$\times \bar{N} A_1 M_1 I_\lambda^{-\text{ir}} + \begin{cases} NI_{\lambda b}^-(\pi - \xi), & v \leq v_*, \\ 0, & v > v_*, \end{cases}$$

$$I_{\lambda(4)}^-(0, v) = NA_1 C_2 f^* + 2NA_1 C_1 R_{1\lambda} g^* + \bar{N} A_1 C_1 I_\lambda^{+\text{ir}} + \bar{N}(1 + A_1 C_1 M_1) I_\lambda^{-\text{ir}},$$

$$I_{\lambda(2)}^+(\ell - h_{\text{оп}}, v) = N_1 \bar{R}_{12} M_1 [NA_1 C_2 M_1 f^* + 2A_1 N R_{1\lambda} g^* +$$

$$+ \bar{N}(1 + A_1 C_1 M_1) I_\lambda^{+\text{ir}} + \bar{N} A_1 M_1 I_\lambda^{-\text{ir}} + N f^*] +$$

$$+ (1 - R_{1\lambda}) I_\lambda^{-\text{ir}} + R_{1\lambda} \bar{R}_{12} I_{\lambda b}^+. \quad (3)$$

Тут

$$f^* = \int_{v_*}^1 v I_\lambda^{(e)}(\pi - \xi) \exp(-a_\lambda h_{\text{sem}} v^{-1}) dv,$$

$$g^* = \int_{v_*}^1 v I_{\lambda b}^-(\xi) \exp(-a_\lambda h_{\text{sem}} v^{-1}) dv,$$

$$N = n_\lambda^2 (1 - R_{\lambda \text{sem}}), \quad \bar{N} = n_\lambda^2 R_{\lambda \text{sem}}, \quad N_1 = n_\lambda^{-2} (1 - R_{\lambda \text{sem}}) (2R_{\lambda \text{sem}})^{-1},$$

$$\bar{R}_{12} = (1 - R_{\lambda \text{sem}} R_{\lambda \text{оп}})^{-1}, \quad \bar{R} = 2R_{\lambda \text{оп}} (1 - R_{\lambda \text{sem}})^2 \bar{R}_{12},$$

$$M_1 = 2R_{\lambda \text{sem}} E_3(a_\lambda h_{\text{sem}}), \quad M_2 = 2R_{\lambda \text{оп}} E_3(a_\lambda h_{\text{sem}}),$$

$$\bar{R}_m = (1 - R_{\lambda \text{sem}})^2 \bar{R}_{12} M_2, \quad A_1 = (1 - M_1^2 - M_1 \bar{R}_m)^{-1},$$

$$C_1 = M_1 + \bar{R}_m, \quad C_2 = 2R_{\lambda \text{sem}} + \bar{R},$$

$E_n(x) = \int_0^1 \mu^{n-2} \exp(-x/\mu) d\mu$ – інтегро-експоненціальна функція n -го порядку [13, р. 779]

При відомих вже інтенсивностях $I_{\lambda(3)}^+(h_{\text{sem}}, \nu)$, $I_{\lambda(4)}^-(0, \nu)$ визначаємо тепловиділення $Q(z, T_{\text{sem}}, t)$ [2, 3] у частково прозорому шарі:

$$Q(z, T_{\text{sem}}, t) = 2n^2\sigma \left\{ T_{\text{op}}^4(\ell - h_{\text{op}}, t) \sum_{i=1}^3 D_{2i} F_i(T_{\text{op}}(\ell - h_{\text{op}}, t)) + \sum_{i=1}^3 G_{1i} \int_0^{h_{\text{sem}}} \exp(-a_i z^*) F_i(T_{\text{sem}}(z^*)) T_{\text{sem}}^4(z^*) dz^* + \sum_{i=1}^3 G_{2i} \int_0^{h_{\text{sem}}} \exp(-a_i(h_{\text{sem}} - z^*)) F_i(T_{\text{sem}}(z^*)) T_{\text{sem}}^4(z^*) dz^* \right\}. \quad (4)$$

Тут

$$\begin{aligned} D_{1i} &= a_i [A_{1i} N_i C_{2i} E_{3i} \{M_{1i} E_2(a_i(h_{\text{sem}} - z)) + E_2(a_i z)\} + N_i \bar{E}'_{2i}(z)], \\ D_{2i} &= a_i [2A_{1i} N_i R_{1i} E_{3i} \{E_2(a_i(h_{\text{sem}} - z)) + C_{1i} E_2(a_i z)\} + N_i \bar{E}''_{2i}(z)], \\ G_{1i} &= a_i^2 [\bar{N}_i (1 + A_{1i} C_{1i} M_{1i}) E_2(a_i(h_{\text{sem}} - z)) + \bar{N}_i A_{1i} C_{1i} E_2(a_i z)], \\ G_{2i} &= a_i^2 [\bar{N}_i A_{1i} M_{1i} E_2(a_i(h_{\text{sem}} - z)) + \bar{N}_i (1 + A_{1i} C_{1i} M_{1i}) E_2(a_i z)], \\ \bar{E}_{3i} &= E_3(a_i h_{\text{sem}}) - \nu_*^2 E_3(a_i h_{\text{sem}} \nu_*^{-1}), \\ \bar{E}'_{2i}(z) &= E_2(a_i(h_{\text{sem}} - z)) - \nu_* E_2(a_i(h_{\text{sem}} - z) \nu_*^{-1}), \\ \bar{E}''_{2i}(z) &= E_2(a_i z) - \nu_* E_2(a_i \nu_*^{-1}), \\ N_i &= n^2 (1 - R_{i\text{sem}}), \quad \bar{N}_i = n^2 R_{i\text{sem}}, \quad N_{1i} = n^{-2} (1 - R_{i\text{sem}}) (2R_{i\text{sem}})^{-1}, \\ \bar{R}_i &= 2R_{\text{op}} (1 - R_{i\text{sem}})^2 \bar{R}_{12i}, \quad \bar{R}_{12i} = (1 - R_{i\text{sem}} R_{\text{op}})^{-1}, \\ M_{1i} &= 2R_{i\text{sem}} E_3(a_i h_{\text{sem}}), \quad M_{2i} = 2R_{\text{op}} E_3(a_i h_{\text{sem}}), \\ A_{1i} &= (1 - M_{1i}^2 - M_{1i} \bar{R}_{mi})^{-1}, \quad \bar{R}_{mi} = (1 - R_{i\text{sem}})^2 \bar{R}_{12i} M_{2i}, \\ C_{1i} &= M_{1i} + \bar{R}_{mi}, \quad C_{2i} = 2R_{i\text{sem}} + \bar{R}_i, \quad F_1(T_*) = F_{0-\lambda_{\text{th}} T_*}, \\ F_2(T_*) &= F_{0-\lambda_{\text{max}} T_*} - F_{0-\lambda_{\text{th}} T_*}, \quad F_3(T_*) = 1 - F_{0-\lambda_{\text{max}} T_*}, \end{aligned}$$

$F_{0-\lambda T_*}$ – частка густини потоку випромінювання абсолютно чорного тіла при температурі T_* в діапазоні $0 - \lambda$ [13]. Вище використано такі апроксимації для радіаційних характеристик частково прозорого шару [4]: $n_\lambda = n$ (середньоінтегральне в діапазоні $(0 - \lambda)$ значення) і

$$R_{\lambda\text{sem}} = \begin{cases} R_{1\text{sem}}, & 0 < \lambda \leq \lambda_{\text{th}}, \\ R_{2\text{sem}}, & \lambda_{\text{th}} < \lambda \leq \lambda_{\text{max}}, \\ R_{3\text{sem}}, & \lambda_{\text{max}} < \lambda < \infty, \end{cases}$$

$$a_\lambda = \begin{cases} a_1, & 0 < \lambda \leq \lambda_{\text{th}}, \\ a_2, & \lambda_{\text{th}} < \lambda \leq \lambda_{\text{max}}, \\ a_3, & \lambda_{\text{max}} < \lambda < \infty, \end{cases}$$

де λ_{th} – порогова довжина хвилі, λ_{max} – верхня межа діапазону оптичних вимірювань.

За інтенсивностями $I_{\lambda(2)}^+(\ell - h_{\text{оп}}, \nu)$ та $I_{\lambda b}^-$ отримуємо вирази для теплових потоків $q^{(a)}(\ell - h_{\text{оп}}, t)$, $q^{(b)}(\ell - h_{\text{оп}}, t)$ на поверхні $z = \ell - h_{\text{оп}}$, обумовлених поглинанням і випроміненням теплової енергії [2, 4, 8]. Потік $q^{(a)}(\ell, t)$ поглинутої на поверхні $z = \ell$ енергії визначаємо за інтенсивністю $I_{\lambda}^{(e)}$ випромінювання джерела, а потік $q^{(b)}(\ell, t)$ випроміненої енергії виражаємо за законом Стефана – Больцмана [13]:

$$q^{(a)}(0, t) = \varepsilon(T_{h_{\text{оп}}}(0, t))\sigma k T_S^4, \quad q^{(b)}(\ell, t) = \varepsilon(T_{h_{\text{оп}}}(\ell, t))\sigma T_{h_{\text{оп}}}^4(\ell, t),$$

$$q^{(a)}(\ell - h_{\text{оп}}, t) = \sigma \left\{ T_S^4 \sum_{i=1}^3 V_{1i} F_i(T_S) + \right.$$

$$+ \varepsilon(T_{\text{оп}}(\ell - h_{\text{оп}}, t)) T_{\text{оп}}^4(\ell - h_{\text{оп}}, t) \sum_{i=1}^3 V_{2i} F_i(T_{\text{оп}}(\ell - h_{\text{оп}}, t)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^3 U_{1i} \int_0^{h_{\text{сем}}} \exp(-a_i z^*) F_i(T_{\text{сем}}(z^*, t)) T_{\text{сем}}^4(z^*, t) dz^* +$$

$$\left. + \sum_{i=1}^3 U_{2i} \int_0^{h_{\text{сем}}} \exp(-a_i (h_{\text{сем}} - z^*)) F_i(T_{\text{сем}}(z^*, t)) T_{\text{сем}}^4(z^*, t) dz^* \right\},$$

$$q^{(b)}(\ell - h_{\text{оп}}, t) = \varepsilon(T_{h_{\text{оп}}}(\ell - h_{\text{оп}}, t))\sigma T_{h_{\text{оп}}}^4(\ell - h_{\text{оп}}, t), \quad (5)$$

де

$$V_{1i} = N_{1i} \bar{R}_{12i} M_{1i} N_i (A_{1i} C_{2i} M_{1i} + 1) \bar{E}_{3i},$$

$$V_{2i} = R_{1i} \bar{R}_{12i} + 2N_{1i} M_{1i} A_{1i} R_{1i} N_i \bar{E}_{3i},$$

$$U_{1i} = a_i N_{1i} \bar{R}_{12i} M_{1i} \bar{N}_i (1 + A_{1i} C_{1i} M_{1i}),$$

$$U_{2i} = a_i (N_{1i} \bar{R}_{12i} M_{1i}^2 A_{1i} \bar{N}_i + 1 - R_{1i}).$$

Вирази для теплових джерел (4) і теплових потоків (5) згідно з [2, 3] враховуємо при формулюванні рівнянь і крайових умов, що описують тепловий стан у системі термочутливих шарів. Вони включають зв'язану систему рівнянь теплопровідності:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha(T_{\text{оп}}) \frac{\partial T_{\text{оп}}}{\partial z} \right) = \rho c_{\varepsilon}(T_{\text{оп}}) \frac{\partial T_{\text{оп}}}{\partial t}, \quad \ell - h_{\text{оп}} \leq z \leq \ell, \quad (6)$$

$$\alpha \frac{\partial^2 T_{\text{сем}}}{\partial z^2} + Q(z, T_{\text{сем}}) = \rho c_{\varepsilon} \frac{\partial T_{\text{сем}}}{\partial t}, \quad 0 \leq z \leq h_{\text{сем}}, \quad (7)$$

і такі крайові умови:

$$\alpha(T_{\text{оп}}) \frac{\partial T_{\text{оп}}(\ell, t)}{\partial z} = -\alpha_1 [T_{\text{оп}}(\ell, t) - T_0] + q^{(a)}(\ell, t) - q^{(b)}(\ell, t),$$

$$\alpha(T_{\text{оп}}) \frac{\partial T_{\text{оп}}(\ell - h_{\text{оп}}, t)}{\partial z} = \alpha_2 [T_{\text{оп}}(\ell - h_{\text{оп}}, t) - T_0] -$$

$$- q^{(a)}(\ell - h_{\text{оп}}, t) + q^{(b)}(\ell - h_{\text{оп}}, t), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial T_{\text{sem}}(h_{\text{sem}}, t)}{\partial z} &= -\alpha_3 [T_{\text{sem}}(h_{\text{sem}}, t) - T_0], \\ \alpha \frac{\partial T_{\text{sem}}(0, t)}{\partial z} &= \alpha_4 [T_{\text{sem}}(0, t) - T_0], \end{aligned} \quad (9)$$

$$T_{\text{op}}(z, 0) = T_{\text{sem}}(z, 0) = T_0, \quad (10)$$

що описують конвективний теплообмін і теплообмін випромінюванням як із зовнішнім середовищем, так і в середовищі між шарами (температури цих середовищ приймаємо рівними початковій температурі T_0 у тілі). Тут ρ , c_ε , k , α_i (індекс $i = 1, \dots, 4$ стосується поверхонь) – густина, питома теплосмність, коефіцієнти теплопровідності та тепловіддачі (індекси «op» і «sem» опущено). Термочутливість радіаційних ε , a_λ і теплофізичних ρ , c_ε , k , α_i (як і механічних) характеристик непрозорих і частково прозорих матеріалів враховано згідно [2, 8 та ін.].

Система (6), (7) включає нелінійне рівняння для непрозорого шару та інтегро-диференціальне рівняння для частково прозорого шару, в якому вираз для джерел залежить від температури суміжної поверхні непрозорого шару. У нелінійну граничну умову на суміжній поверхні непрозорого шару входить температура частково прозорого шару.

Для розв'язування задачі (6)–(10) використано методіку, розвинуту в [1, 7, 8], що базується на методі скінченних елементів, із застосуванням лінеаризації нелінійних складових варіаційного рівняння при побудові однокрокової рекурентної схеми інтегрування за часом. На відміну від ітераційних схем, така методіка дозволяє урівноважити похибку дискретизації за часом з похибкою лінеаризації та уникнути ітераційних процедур. При цьому дискретизацію за часом проводимо за єдиного розбиття для рівнянь системи (6)–(10).

Термонапружений стан у кожному з розглядуваних механічно незв'язаних шарів визначаємо за наведеними у [8] аналітичними співвідношеннями для відмінних від нуля компонент σ_{xx} , $\sigma_{yy} = \sigma$ тензора напружень:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -\frac{E(T)}{1 - \nu(T)} \varphi(T, T_0) + \frac{E(T)}{1 + \nu(T)} [b_1 z + b_2], \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} \varphi(T, T_0) &= \int_{T_0}^T \alpha_t(T_*) dT_*, & b_1 &= \frac{C_1 B_2 - A_2 C_2}{\Delta}, \\ b_2 &= \frac{A_1 C_2 - C_1 B_1}{\Delta}, & \Delta &= A_1 B_2 - A_2 B_1, \\ A_1 &= \int_0^h \frac{E(T)}{1 + \nu(T)} z dz, & A_2 &= \int_0^h \frac{E(T)}{1 + \nu(T)} dz, \\ B_1 &= \int_0^h \frac{E(T)}{1 + \nu(T)} z \left(z - \frac{h}{2} \right) dz, & B_2 &= \int_0^h \frac{E(T)}{1 + \nu(T)} \left(z - \frac{h}{2} \right) dz, \\ C_1 &= \int_0^h \frac{E(T)}{1 - \nu(T)} \varphi(T, T_0) dz, & C_2 &= \int_0^h \frac{E(T)}{1 - \nu(T)} \left(z - \frac{h}{2} \right) \varphi(T, T_0) dz, \end{aligned}$$

$\alpha_t(T)$ – істинний коефіцієнт лінійного температурного розширення матеріалу [6]; $\nu(T)$, $E(T)$ – коефіцієнт Пуассона та модуль Юнга. При цьому використовуємо числове інтегрування за відомих апроксимацій температурної залежності механічних характеристик [2, 8] та знайденого (чисельно) із задачі (6)–(10) розподілу температури у шарах.

При числових розрахунках за матеріал частково прозорого шару вибрали віконне скло (слабопоглинаюче) та скло С95-3 (сильнопоглинаюче), а непрозорого – сталь Х18Н9Т, характеристики яких наведено в [7]. Розглядали випадки, коли в середовищі між шарами має місце конвективний теплообмін ($\alpha_2 = 6 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, $\alpha_3 = 13 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$), а також, коли середовище приймало в наближенні вакууму: $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

На рис. 2а–2г проілюстровано зміну в часі температури відповідно на поверхнях $z = \ell$, $z = \ell - h_{\text{оп}}$, $z = h_{\text{сем}}$, $z = 0$ шарів з товщинами $h_{\text{оп}} = 4 \text{ см}$, $h_{\text{сем}} = 4 \text{ мм}$ для значень потоку поглинутого випромінювання $q^{(a)}(\ell) = 16.1, 32.3, 67.7 \text{ кВт}/\text{м}^2$ (криві 1–3) і різних умов теплообміну в середовищі між шарами: суцільні криві – конвективний теплообмін, штрихові – вакуумоване середовище. Видно, що для розглядуваного способу опромінення нагрів скляного шару починається після досягнення температури $600 \div 700 \text{ К}$ у металевому шарі. Якщо середовище між шарами є вакуумоване, досягаються вищі температури.

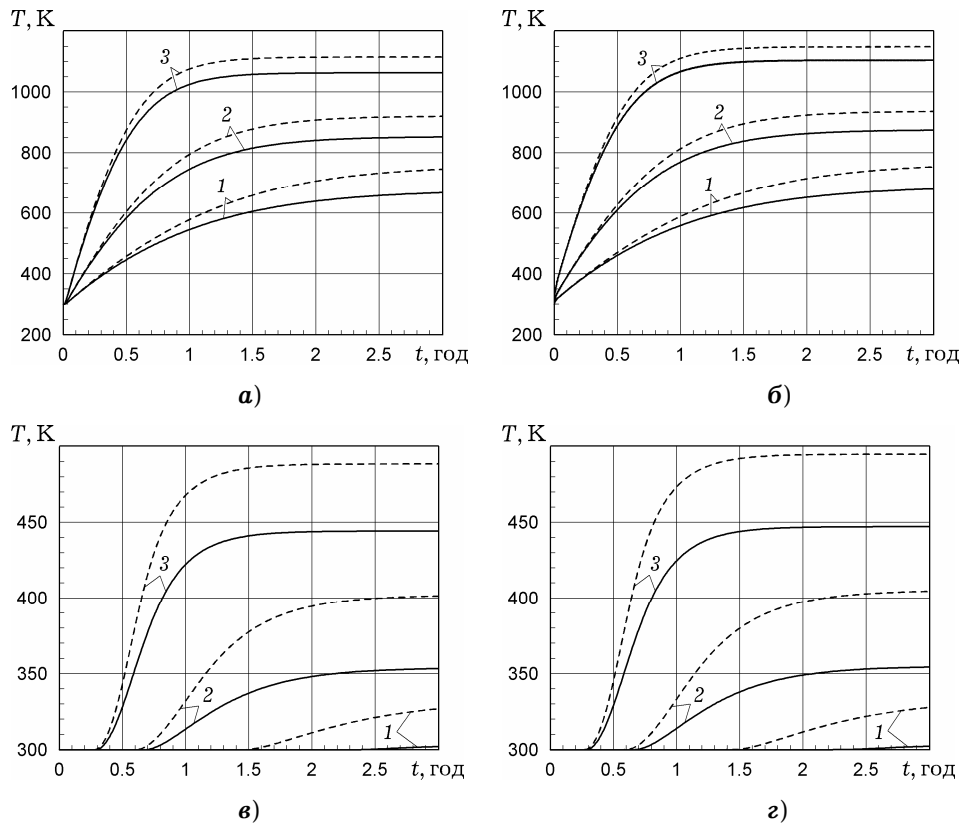


Рис. 2

Результати дослідження впливу випромінювання теплової енергії сильнопоглинаючим скляним шаром на тепловий стан в опромінюваній потоком $q^{(a)}(\ell) = 32.3 \text{ кВт}/\text{м}^2$ системі (температури на поверхнях $z = \ell$, $z = h_{\text{сем}}$,

$z = \ell - h_{\text{op}}$) показано на рис. 3а-3в для товщин $h_{\text{op}} = 1, 2, 4$ см (криві 1-3) металевого шару. Суцільні криві відповідають запропонованому підходу, штрихові – моделі невидпромінюючого матеріалу [2] (згідно з якою нехтуємо власним випромінюванням частково прозорого матеріалу). Середовище між шарами вакуумоване.

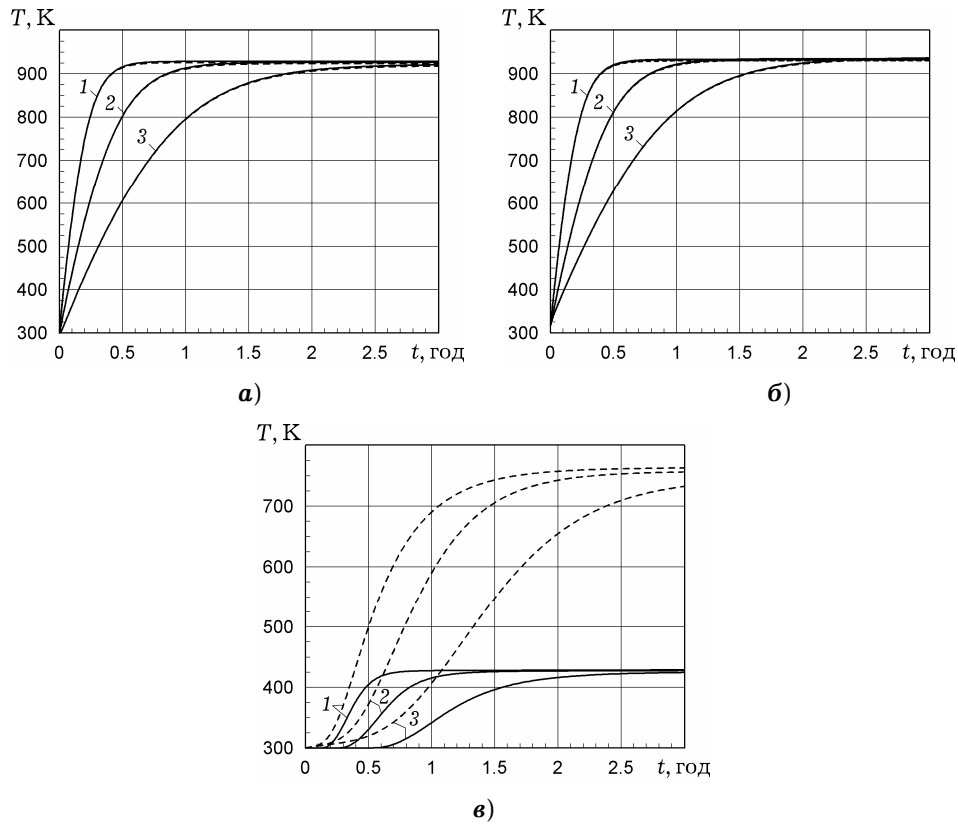
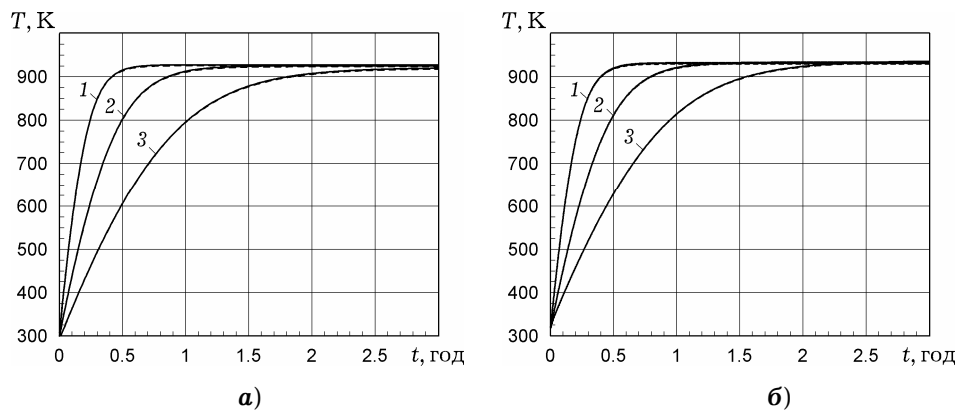


Рис. 3

Аналогічні результати, що відображають вплив випромінювання слабопоглинаючого скляного шару на металевий показано на рис. 4. Видно, що такий вплив на тепловий стан металевого шару є несуттєвим (тобто його можна досліджувати в розглядуваній системі за наближення невидпромінюючого скляного шару). Як і вище, отримано, що при використанні моделі невидпромінюючого матеріалу суттєво завищуються розрахункові значення температури в скляному шарі в усталеному режимі. У слабопоглинаючому скляному шарі досягаються нижчі рівні температури.



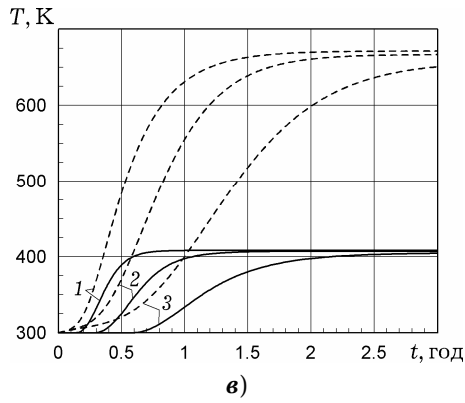


Рис. 4

На рис. 5, рис. 6 показано зміни в часі температури та напружень на поверхнях $z = \ell$ (рис. 5а, рис. 6а), $z = \ell - h_{\text{оп}}$ (рис. 5б, рис. 6б) металевого шару товщини $h_{\text{оп}} = 4$ см (товщина скляного $h_{\text{сем}} = 4$ мм) для різних варіантів урахування термочутливості його теплофізичних і радіаційної характеристик: $c_\varepsilon, \alpha, \varepsilon$ термочутливі – криві 1; c_ε, α термочутливі, ε середньоінтегральне (середнє на проміжку зміни температури) – криві 2; $c_\varepsilon, \alpha, \varepsilon$ середньоінтегральні – криві 3. Середовище між шарами вакуумоване. Отримано, що вплив термочутливості теплофізичних характеристик на рівні температури та напружень залежать від стадії нагріву, а термочутливість ступеня чорноти впливає лише на рівні температур (особливо за її підвищення). Нагрів скляного шару відбувається рівномірно за низьких рівнів напружень.

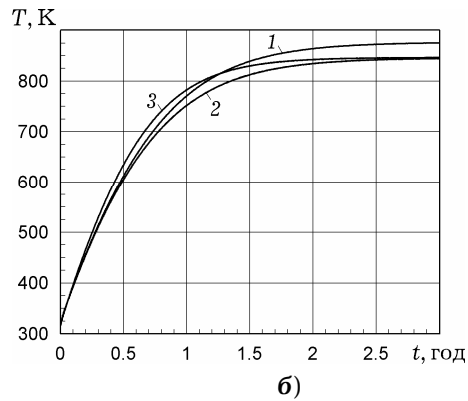
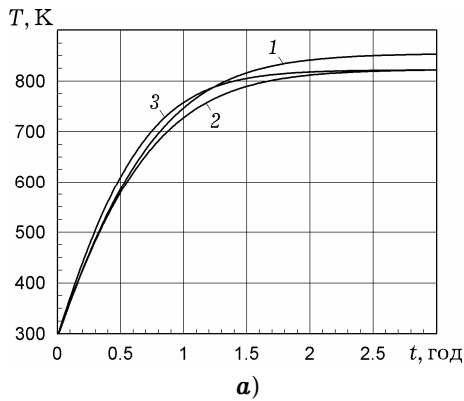


Рис. 5

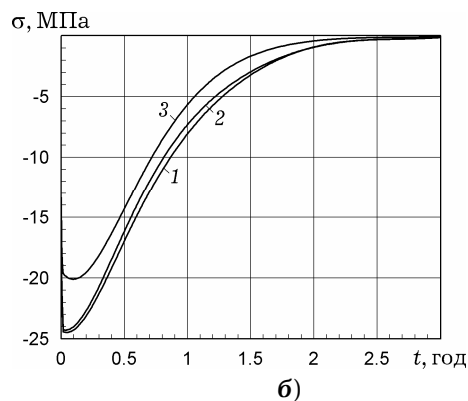
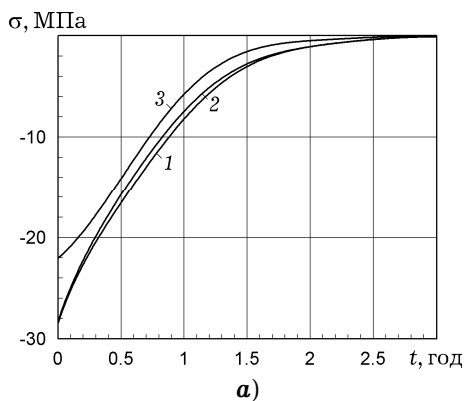


Рис. 6

Розподіл напружень у металевому шарі з товщинами $h_{op} = 2, 4$ см в усталеному тепловому режимі наведено на рис. 7а, рис. 7б. Криві 1–3 (що практично співпадають) отримано відповідно для товщин $h_{sem} = 2, 4, 10$ мм сильнопоглинаючого скляного шару.

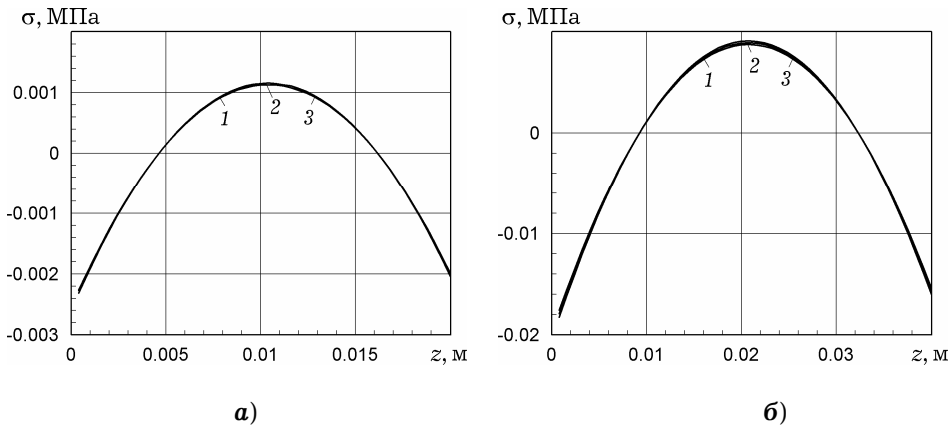


Рис. 7

Аналогічний розподіл напружень у скляному шарі ($h_{sem} = 4, 10$ мм) для значень товщини $h_{op} = 1, 2, 4$ см (криві 1–3) металевого шару подано на рис. 8а, рис. 8б. Середовище між шарами вакуумоване. Видно, що внаслідок слабоградієнтного розподілу температури рівень напружень є низьким.

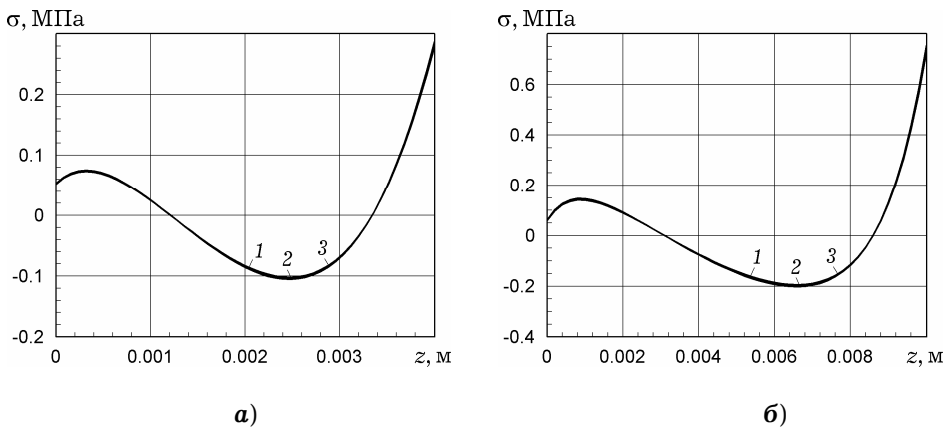


Рис. 8

На рис. 9а і рис. 9б наведено зміну в часі максимальних розтягувальних напружень в металевому ($h_{op} = 4$ см) і сильнопоглинаючому скляному ($h_{sem} = 1$ мм) шарах системи для величин поглинутого потоку зовнішнього опромінення $q^{(a)}(\ell) = 16.1, 32.3, 67.7$ кВт/м² (криві 1–3).

Аналогічні часові залежності в системі для товщин шарів $h_{op} = 4$ см і $h_{sem} = 4$ мм показано відповідно на рис. 10а і рис. 10б.

Видно, що максимальні рівні напружень, за якими можна оцінити напружений стан, можуть досягатися і в неусталеному режимі.

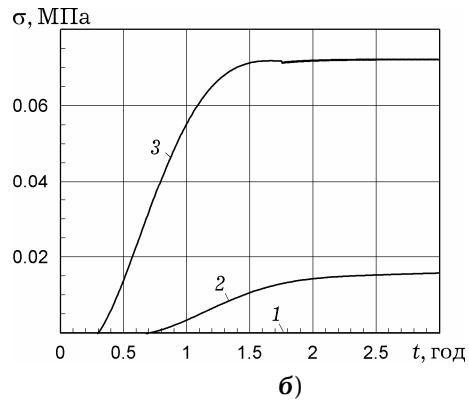
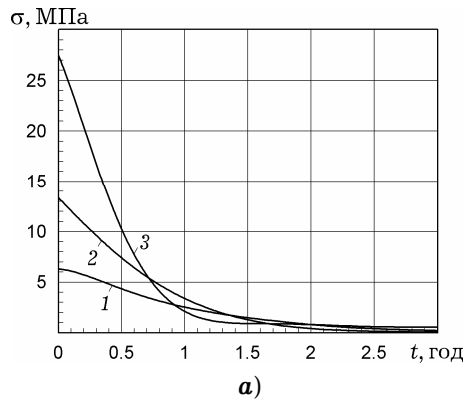


Рис. 9

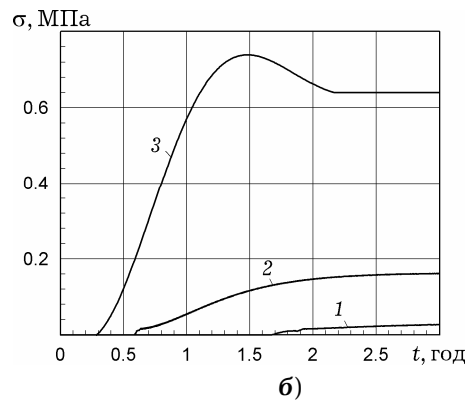
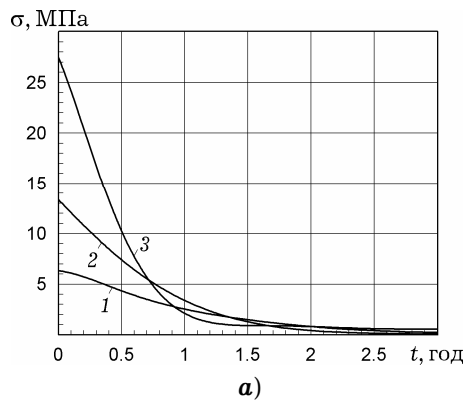


Рис. 10

Висновки. Проведені в цій роботі і в статті [7] дослідження теплового і термонапруженого станів у системах із шарів різної прозорості для теплового випромінювання, розділених непоглинаючим середовищем, дозволили виявити ряд нових закономірностей впливу термочутливості теплофізичних, механічних і радіаційних властивостей матеріалів шарів, їх товщин і температури джерела опромінення, характеру теплообміну випромінюванням на теплову та механічну поведінку складових систем, основними з яких є:

У випадку опромінення зі сторони частково прозорого (скляного) шару [7]:

- на відміну від металевому шару, вихід на ustalений тепловий режим у скляному шарі відбувається поетапно. Спочатку відбувається нагрів до певної температури зовнішнім опроміненням, а далі – повільне зростання температури внаслідок збільшення випромінювання від металевому шару;

- заданої температури на поверхні металевому шару (зокрема, вищої, ніж у скляному) можна досягнути змінюючи температуру джерела опромінення;

- вплив випромінювання скляним шаром на температуру в металевому шарі зростає зі зниженням температури джерела. Неврахування власного випромінювання у скляному шарі приводить до заниження розрахункових температур у металевому шарі;

- вплив власного випромінювання металевим шаром на тепловий стан у скляному шарі за нижчих температур джерела при різних товщинах є несуттєвим. Він проявляється за вищих температур джерела (3000 K) і малих товщинах;

- нерівномірність нагріву і максимальні рівні напружень у скляному шарі зростають зі збільшенням його товщини та температури джерела (на відміну від результатів за моделлю невипромінюючого матеріалу, коли вона, навпаки, зменшується зі збільшенням температури джерела);

- максимальні напруження у скляному шарі досягаються в усталеному режимі, а в металевому – на початковій стадії нагріву;
- вплив теплообміну випромінюванням між шарами на рівні напружень у скляному шарі є більшим при вищих температурах джерела.

У випадку опромінення зі сторони непрозорого (металевого) шару :

- нагрів скляного шару практично починається після досягнення температури $600 \div 700$ К у металевому;
- вплив випромінювання скляним шаром на тепловий стан металевого є несуттєвим;
- максимальні рівні розтягувальних напружень у металевому та скляному шарах можуть досягатися в неусталеному режимі, зокрема, на початковій стадії нагріву в металевому;
- рівень напружень у шарах в усталеному режимі є низьким внаслідок отриманого за такого способу опромінення слабоградієнтного розподілу температури.

Коли проміжок середовища між шарами відсутній (при ідеальному тепловому і механічному їх контакті), за відповідних наближень і характеристик матеріалів шарів отримуються закономірності теплової і механічної поведінки, наведені в [9–12].

Як випливає з отриманих вище результатів, для адекватного опису рівнів температур і напружень у системах з тіл різної прозорості за цільового опромінення чи високотемпературного нагріву необхідно виходити з більш складних порівняно з існуючими математичних моделей теплопровідності та термопружності, що враховують випромінювання тілами теплової енергії (власне випромінювання), термочутливість як теплофізичних і механічних, так і радіаційних характеристик їх матеріалів.

1. Брухаль М., Терлецький Р., Фундак О. Методика числового розв'язування нелінійних задач теплоперенесення в тілах різної прозорості для теплового випромінювання // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2007. – Вип. 13. – С. 59–71.
2. Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф., Брухаль М. Б. Деякі проблеми математичного моделювання в термомеханіці тіл різної прозорості за теплового опромінення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 3. – С. 202–219.
Te same: *Hachkevych O. R., Terlets'kii R. F., Brukhal' M. B.* Some problems of mathematical modeling in thermomechanics of bodies of various transparencies subjected to thermal irradiation // *J. Math. Sci.* – 2010. – **165**, No. 3. – P. 403–425. – <https://doi.org/10.1007/s10958-010-9808-1>.
3. Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф., Курницький Т. Л. Механотермодифузія в частково прозорих тілах. – Львів: Сполом, 2007. – 184 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 2.
4. Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф., Сосновий Ю. Р., Брухаль М. Б. Механічна поведінка охолоджуваних тіл з урахуванням випромінювання теплової енергії // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 1. – С. 42–50.
Te same: *Hachkevych O. R., Terlets'kii R. F., Sosnovyi Yu. R., Brukhal' M. B.* Mechanical behavior of cooled bodies with regard for the emission of heat energy // *Mater. Sci.* – 2010. – **46**, No. 1. – P. 47–55.
<https://doi.org/10.1007/s11003-010-9262-8>.
5. Гачкевич О., Терлецький Р., Турій О. Моделі радіаційної термомеханіки опромінюваних шаруватих тіл // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2014. – Вип. 20. – С. 13–26.
6. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 307 с.
7. Терлецький Р. Ф., Брухаль М. Б. Нестационарный теплообмен та напружений стан в опромінюваній системі зі шарів різної прозорості // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2016. – **52**, № 4. – С. 79–85.
Te same: *Terlets'kii R. F., Brukhal' M. B.* Nonstationary heat exchange and stressed state in the irradiated system of layers with different transparencies // *Mater. Sci.* – 2017. – **52**, No. 4. – P. 533–541.
<https://doi.org/10.1007/s11003-017-9987-8>.

8. Терлецький Р. Ф., Брухаль М. Б., Немировський Ю. В. Моделювання і дослідження термомеханічної поведінки термочутливих тіл за врахування впливу теплового випромінювання // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2013. – **56**, № 2. – С. 212–224.
Te same: *Terlets'kyi R. F., Brukhal' M. B., Nemirovskii Yu. V. Modeling and investigation of the thermomechanical behavior of heat-sensitive bodies with regard for the influence of thermal radiation* // *J. Math. Sci.* – 2014. – **203**, No. 2. – P. 265–278. – <https://doi.org/10.1007/s10958-014-2106-6>.
9. Терлецький Р. Ф., Турій О. П. Моделювання і дослідження теплопереносу у пластинах з тонкими покриттями за врахування впливу випромінювання // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2012. – **55**, № 2. – С. 186–201.
Te same: *Terlets'kyi R. F., Turii O. P. Modeling and investigation of heat transfer in plates with thin coatings with regard for the influence of radiation* // *J. Math. Sci.* – 2013. – **192**, No. 6. – P. 703–722. – <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1427-1>.
10. Терлецький Р. Ф., Турій О. П. Термомеханічна поведінка пластини, складеної зі шарів різної прозорості, під тепловими променями // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2007. – **43**, № 6. – С. 17–26.
Te same: *Terlets'kyi R. F., Turii O. P. Thermomechanical behavior of a plate composed of layers with different transparencies under the action of thermal radiation* // *Mater. Sci.* – 2007. – **43**, No. 6. – P. 769–779. – <https://doi.org/10.1007/s11003-008-9021-2>.
11. Терлецький Р. Ф., Турій О. П. Термонапружений стан частково прозорої шаруватої пластини при тепловому опроміненні // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2006. – **49**, № 3. – С. 177–187.
12. Kournyts'kyi T., Matysiak S., Terletskii R. Heat and mass transfer in two-layer elastic composite subjected to thermal infrared radiation // *Int. J. Eng. Sci.* – 2003. – **41**, No. 17. – P. 1951–1964. – [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(03\)00139-3](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(03)00139-3).
13. Modest M. F. Radiative heat transfer. – New York etc.: Acad. Press, 2003. – 822 p.
14. Siegel R. Transient effects of radiative transfer in semitransparent materials // *Int. J. Eng. Sci.* – 1998. – **36**, No. 12–14. – P. 1701–1739. – [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(98\)00054-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(98)00054-8).

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛООВОГО И НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЙ В ОБЛУЧАЕМОЙ СИСТЕМЕ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ СЛОЕВ РАЗЛИЧНОЙ ПРОЗРАЧНОСТИ, РАЗДЕЛЕННЫХ НЕПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДОЙ

Сформулирована и решена задача об исследовании термоупругого состояния в системе, состоящей из частично прозрачного и непрозрачного термочувствительных слоев, обусловленного тепловым облучением со стороны непрозрачного слоя. На основе полученных числовых решений установлен ряд новых закономерностей о влиянии теплообмена излучением на тепловое и механическое поведение такой системы.

MODELING AND STUDY OF THE THERMAL AND STRESS STATE IN THE IRRADIATED SYSTEM, CONSISTING FROM LAYERS OF DIFFERENT TRANSPARENCY, SEPARATED BY A NON-ABSORBING MEDIUM

The problem on the study of the thermoelastic state in a system consisting from a semitransparent and opaque thermosensitive layers, due to thermal radiation from the opaque layer, is formulated and solved. On the basis of the numerically obtained solutions a number of new peculiarities on an effect of thermal radiation heat transfer on the thermal and mechanical behavior of such system are established.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

Одержано
15.01.18

² Політехніка Опольська, Опольце, Польща