

КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНОЇ ПАНЕЛІ ПОДВІЙНОЇ КРИВИНИ З МНОЖИНОЮ ОТВОРІВ ДОВІЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ І ЗМІШАНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

У рамках уточненої моделі, яка враховує деформацію поперечного зсуву та інерційні компоненти, побудовано розв'язок задачі про усталені коливання ортотропної панелі подвійної кривини з отворами довільної форми, орієнтації та розташування і довільною зовнішньою границею за змішаних гармонічних граничних умов на зовнішній границі і контурах отворів. Розв'язок знайдено за допомогою непрямого методу граничних елементів з використанням послідовнісного підходу до побудови зображення функцій Гріна. Отримані при цьому інтегральні рівняння розв'язано методом колокацій.

Ключові слова: ортотропна панель подвійної кривини, отвори, коливання, непрямий метод граничних елементів, метод колокацій.

Вступ. Анізотропні оболонкові елементи з отворами різної форми та розташування є елементами багатьох інженерних конструкцій, які функціонують за змінних у часі навантажень. Наявність отворів, їхня форма та розташування пов'язані з низкою технологічних та експлуатаційних факторів, зокрема зниженням ваги конструкції, забезпеченням доступу при інспекції чи експлуатації, регулюванням вібраційних характеристик конструкції тощо. Тому проблема розвитку числових методів дослідження динамічної поведінки таких тонкостінних елементів конструкцій з підвищеною точністю є актуальною проблемою механіки.

Колівання пологих ортотропних і ламінованих панелей із зовнішньою границею складної форми досліджено в [5, 11, 12] методом R -функцій з використанням варіаційного підходу в рамках уточнених теорій. В [19] з використанням класичної теорії методом скінченних елементів досліджено вільні коливання підкріпленої в поздовжньому напрямку циліндричної ізотропної панелі з центральним прямокутним отвором та різними типами граничних умов на зовнішній границі панелі. В [13] експериментально та чисельно (методом скінченних елементів з використанням класичної теорії) досліджено вплив ексцентрично розташованого прямокутного отвору на частоти та форми коливань композитної циліндричної панелі. В [6] методом скінченних елементів досліджено вільні коливання композитної циліндричної панелі з одним і двома круглими симетрично розташованими отворами за різних крайових умов на зовнішньому контурі з урахуванням слабкого демпфування. В [7] використано модифікований метод скінченних елементів дослідження коливання ізотропної циліндричної панелі з прямокутним отвором. Колівання панелі подвійної кривини з супереліптичною зовнішньою границею і супереліптичним отвором проаналізовано в [15] методом Рітца. Динамічну концентрацію напружень в ізотропній циліндричній панелі з круглим отвором досліджено методом граничних інтегральних рівнянь [14]. Методом скінченних елементів з використанням уточненої теорії, яка враховує поперечні зсуви та інерцію обертання, вивчено динамічну стійкість ізотропної та ламінованої композитної панелі подвійної кривини з прямокутним отвором і різними типами граничних умов [17, 18], а також динамічну стійкість ламінованої панелі подвійної кривини з круглим отвором [8–10]. Поперечні коливання трансверсально ізотропної панелі з отворами, а також з вирізами на зовнішній границі, досліджено з використанням теорії Тимошенка та спрощеної класичної теорії оболонок за допомогою непрямого методу граничних елементів і знайдених функцій Гріна [1]. Аналогічно

[✉] tetyana.sh@gmail.com

розв'язано задачу про поперечні коливання ортотропної шарнірно опертої прямокутної в плані панелі з множиною отворів довільної конфігурації в рамках уточненої теорії, яка враховує поперечні зсуви, але не враховує інерцію обертання [3]. Тим самим способом знайдено розв'язок задачі про коливання ортотропної панелі подвійної кривини з множиною отворів довільної конфігурації та зовнішньою границею довільної форми в рамках уточненої теорії, у якій враховують поперечні зсуви та всі інерційні компоненти, включно з інерцією обертання [4, 20]. Розглянуто два випадки крайових умов, коли на контурах отворів та зовнішній границі задано переміщення або зусилля.

Метою цієї роботи є побудова розв'язку задачі про усталені коливання ортотропної панелі подвійної кривини з отворами довільної форми, орієнтації та розташування за змішаних гармонічних у часі граничних умов на контурах отворів та зовнішній границі панелі непрямим методом граничних елементів в рамках уточненої теорії, яка враховує поперечні зсуви і всі інерційні компоненти, включно з інерцією обертання.

1. Постановка задачі. Розглянемо задачу про усталені коливання ортотропної панелі подвійної кривини, що містить N отворів довільної форми та розміщення, обмежених контурами $L^{(j)}$, $j = 1, \dots, N$. Нехай на контурах N_1 -го отворів задано компоненти вектора переміщень, на контурах N_2 -х отворів – напруження, а на контурах N_3 -х отворів – комбінації переміщень і напружень. Зовнішню границю панелі задамо контуром довільної форми, складеним з трьох взаємодоповнюючих кривих $L^{(N+1)}$, $L^{(N+2)}$ та $L^{(N+3)}$. Позначимо через \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ нормальний і дотичний вектори уздовж деякого напрямку, E_i – модулі Юнга, G_{12} , G_{13} , G_{23} – модулі зсуву матеріалу, ν_{12} , ν_{21} – коефіцієнти Пуассона, ρ – густину матеріалу, k_1 , k_2 – головні кривини панелі, R_1 , R_2 – головні радіуси кривини, $2h$ – товщину панелі, φ_1 , φ_2 – кути розхилу панелі, q_i , m_i – компоненти зовнішнього навантаження, w – прогин, u_n , u_τ – нормальні та тангенціальні переміщення точок серединної поверхні, γ_n , γ_τ – нормальні й тангенціальні компоненти кутів повороту нормалі до серединної поверхні, Q_n – нормальну компоненту перерізувальних сил, M_n , N_n і M_τ , N_τ – нормальні і тангенціальні компоненти моментів і мембранних сил.

Нехай на контурах отворів задано умови:

$$w = w_0^{(j)}(\alpha) \sin \omega t, \quad u_n = u_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin \omega t, \quad \gamma_n = \gamma_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin \omega t, \\ u_\tau = u_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin \omega t, \quad \gamma_\tau = \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin \omega t, \quad \alpha \in L^{(j)}, \quad j = 1, \dots, N_1, \quad (1)$$

$$Q_n = Q_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin \omega t, \quad M_n = M_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin \omega t, \quad N_n = N_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin \omega t, \\ N_\tau = N_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin \omega t, \quad M_\tau = M_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin \omega t, \\ \alpha \in L^{(j)}, \quad j = N_1 + 1, \dots, N_1 + N_2, \quad (2)$$

$$w = w_0^{(j)}(\alpha) \sin \omega t, \quad M_n = M_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin \omega t, \quad N_n = N_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin \omega t, \\ u_\tau = u_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin \omega t, \quad \gamma_\tau = \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin \omega t, \\ \alpha \in L^{(j)}, \quad j = N_1 + N_2 + 1, \dots, N. \quad (3)$$

Нехай на частині границі $L^{(N+1)}$ задано переміщення

$$\begin{aligned}
w &= w_0^{(N+1)}(\alpha) \sin \omega t, & u_n &= u_{n0}^{(N+1)}(\alpha) \sin \omega t, \\
\gamma_n &= \gamma_{n0}^{(N+1)}(\alpha) \sin \omega t, & u_\tau &= u_{\tau 0}^{(N+1)}(\alpha) \sin \omega t, \\
\gamma_\tau &= \gamma_{\tau 0}^{(N+1)}(\alpha) \sin \omega t, & \alpha &\in L^{(N+1)},
\end{aligned} \tag{4}$$

на частині $L^{(N+2)}$ задано зусилля

$$\begin{aligned}
Q_n &= Q_{n0}^{(N+2)}(\alpha) \sin \omega t, & M_n &= M_{n0}^{(N+2)}(\alpha) \sin \omega t, \\
N_n &= N_{n0}^{(N+2)}(\alpha) \sin \omega t, & N_\tau &= N_{\tau 0}^{(N+2)}(\alpha) \sin \omega t, \\
M_\tau &= M_{\tau 0}^{(N+2)}(\alpha) \sin \omega t, & \alpha &\in L^{(N+2)},
\end{aligned} \tag{5}$$

а на $L^{(N+3)}$ – компоненти зусиль і переміщень

$$\begin{aligned}
w &= w^{(N+3)}(\alpha) \sin \omega t, & M_n &= M_{n0}^{(N+3)}(\alpha) \sin \omega t, \\
N_n &= N_{n0}^{(N+3)}(\alpha) \sin \omega t, & u_\tau &= u_{\tau 0}^{(N+3)}(\alpha) \sin \omega t, \\
\gamma_\tau &= \gamma_{\tau 0}^{(N+3)}(\alpha) \sin \omega t, & \alpha &\in L^{(N+3)}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Для дослідження такого коливного процесу використаємо рівняння теорії оболонки, які враховують поперечні зсуви та інерційні компоненти, включно з інерцією обертання [4]:

$$\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{0}, \tag{7}$$

де $\mathbf{U} = (u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2)^\top$, $\mathbf{0}$ – нульовий вектор, $\mathbf{L} = \{L_{ij}\}_{i,j=1,\dots,5}$ – матричний диференціальний оператор, компоненти якого наведено в *Додатку 1*. Індексом « \top » тут і надалі позначаємо операцію транспонування.

2. Побудова розв'язку. Розв'язок крайової задачі (1)–(7) шукаємо з використанням непрямого методу граничних елементів. Для побудови інтегральних рівнянь крайової задачі вводимо узагальнений контур

$$L = L^{(1)} \cup L^{(2)} \cup \dots \cup L^{(N)} \cup L^{(N+1)} \cup L^{(N+2)} \cup L^{(N+3)}$$

і функції

$$\mathbf{T}(\xi) = \begin{pmatrix} T_1(\xi) \\ \vdots \\ T_5(\xi) \end{pmatrix} = \begin{cases} (T_1^{(1)}(\xi), \dots, T_5^{(1)}(\xi))^\top, & \xi \in L^{(1)}, \\ (T_1^{(2)}(\xi), \dots, T_5^{(2)}(\xi))^\top, & \xi \in L^{(2)}, \\ \vdots & \vdots \\ (T_1^{(N+3)}(\xi), \dots, T_5^{(N+3)}(\xi))^\top, & \xi \in L^{(N+3)}, \end{cases}$$

на ньому.

Подамо розв'язок через потенціал простого шару з функціями Гріна, побудованими в роботі [4] з використанням наближення дельта-функції Дірака послідовностями дельтоподібних функцій [1, 2, 16]:

$$\mathbf{U}(\alpha, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) \mathbf{E}_{km}(\alpha) \mathbf{U}_{km} \mathbf{E}_{km}(\xi) \mathbf{T}(\xi) d\ell(\xi) \sin \omega t, \tag{8}$$

де матрицю \mathbf{U}_{km} наведено в *Додатку 2*, $\mathbf{E}_{km}(\alpha)$ – діагональна матриця [4]

з елементами $\Phi_{km}^{cs}(\alpha)$, $\Phi_{km}^{sc}(\alpha)$, $\Phi_{km}^{ss}(\alpha)$, $\Phi_{km}^{cs}(\alpha)$, $\Phi_{km}^{sc}(\alpha)$:

$$\begin{aligned}
\Phi_{km}^{cs}(\alpha) &= \cos \lambda_{1k} \alpha_1 \sin \lambda_{2m} \alpha_2, & \Phi_{km}^{sc}(\alpha) &= \sin \lambda_{1k} \alpha_1 \cos \lambda_{2m} \alpha_2, \\
\Phi_{km}^{ss}(\alpha) &= \sin \lambda_{1k} \alpha_1 \sin \lambda_{2m} \alpha_2, & \Phi_{km}^{cc}(\alpha) &= \cos \lambda_{1k} \alpha_1 \cos \lambda_{2m} \alpha_2,
\end{aligned}$$

$$C_{km}(\varepsilon) = \frac{4\mu_{km}}{\ell_1 \ell_2} \varphi(\lambda_{1k} \varepsilon_1) \varphi(\lambda_{2m} \varepsilon_2), \quad \lambda_{1k} = \frac{k\pi}{\ell_1}, \quad \lambda_{2m} = \frac{m\pi}{\ell_2},$$

$$\ell_1 = R_1 \Phi_1, \quad \ell_2 = R_2 \Phi_2, \quad \mu_{km} = \begin{cases} 1, & k \neq 0, m \neq 0, \\ 1/2, & k = 0, m \neq 0, \quad k \neq 0, m = 0, \\ 1/4, & k = 0, m = 0, \end{cases}$$

а $\varphi(\lambda_{1k} \varepsilon_1)$, $\varphi(\lambda_{2m} \varepsilon_2)$ – вагові функції.

Інтегральні рівняння крайової задачі будують з використанням подання (8) та крайових умов (1)–(6). У випадку умов у термінах зусиль використовуємо метод фіктивного контуру для уникнення стрибка похідної від потенціалу простого шару на границі. Цей метод полягає в тому, що крайові умови задовольняють не на реальній границі, а на границі, фіктивно зміщеній всередину розглядуваної області на деяку малу відстань ε . Криві зміщених контурів позначатимемо $L^{\varepsilon(j)}$. Тоді система $5(N+3)$ інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій густин $\mathbf{T}(\xi)$ набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \left(u_{n0}^{(j)}(\alpha), u_{\tau 0}^{(j)}(\alpha), w_0^{(j)}(\alpha), \gamma_{n0}^{(j)}(\alpha), \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \right)^\top = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) \mathbf{\Omega}_{km}^{(U)}(\alpha) \mathbf{E}_{km}(\xi) \mathbf{T}(\xi) d\ell(\xi), \\ & \alpha \in L^{(j)}, \quad j = 1, \dots, N_1, \quad j = N+1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(N_{n0}^{(j)}(\alpha), N_{\tau 0}^{(j)}(\alpha), Q_{n0}^{(j)}(\alpha), M_{n0}^{(j)}(\alpha), M_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \right)^\top = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) \mathbf{\Omega}_{km}^{(P)}(\alpha) \mathbf{E}_{km}(\xi) \mathbf{T}(\xi) d\ell(\xi), \\ & \alpha \in L^{\varepsilon(j)}, \quad j = N_1 + 1, \dots, N_1 + N_2, \quad j = N+2, \end{aligned}$$

$$w_0^{(j)}(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^5 C_{km}(\varepsilon) w_i(\alpha) \Phi_{km}^i(\xi) T_i(\xi) d\ell(\xi),$$

$$u_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^5 C_{km}(\varepsilon) u_{i\tau}(\alpha) \Phi_{km}^i(\xi) T_i(\xi) d\ell(\xi),$$

$$\gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^5 C_{km}(\varepsilon) \gamma_{i\tau}(\alpha) \Phi_{km}^i(\xi) T_i(\xi) d\ell(\xi),$$

$$\alpha \in L^{(j)}, \quad j = N_1 + N_2 + 1, \dots, N, \quad j = N+3,$$

$$M_{n0}^{(j)}(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^5 C_{km}(\varepsilon) M_{in}(\alpha) \Phi_{km}^i(\xi) T_i(\xi) d\ell(\xi),$$

$$N_{n0}^{(j)}(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^5 C_{km}(\varepsilon) N_{in}(\alpha) \Phi_{km}^i(\xi) T_i(\xi) d\ell(\xi)$$

$$\alpha \in L^{\varepsilon(j)}, \quad j = N_1 + N_2 + 1, \dots, N, \quad j = N+3, \quad (9)$$

де $\Phi_{km}^1(\xi) = \Phi_{km}^4(\xi) = \Phi_{km}^{cs}(\xi)$, $\Phi_{km}^3(\xi) = \Phi_{km}^{ss}(\xi)$, $\Phi_{km}^2(\xi) = \Phi_{km}^5(\xi) = \Phi_{km}^{sc}(\xi)$, а вирази елементів матриць $\mathbf{\Omega}_{km}^{(U)}(\alpha)$ і $\mathbf{\Omega}_{km}^{(P)}(\alpha)$ наведено в **Додатку 3**.

Розв'язок системи інтегральних рівнянь (9) знайдемо чисельно з використанням методу колокацій, коли контури узагальненої кривої L замінимо ламаними, позначаючи через $S^{(j)}$ кількість відрізків розбиття j -го контуру, через $\alpha^{(j)r}$ – середини відрізків розбиття j -го контуру, $r = 1, \dots, S^{(j)}$, а на кожному з прямолінійних відрізків контурів задаємо розподіл невідомих густин $\mathbf{T}^{(j)r}(\xi) = \mathbf{T}^{(j)r} \delta(\alpha^{(j)r}, \xi)$. Мінімізуємо нев'язку в контрольних точках колокацій α^q , за які вибираємо середини відрізків розбиття. У такий спосіб отримаємо систему $5 \sum_{j=1}^{N+3} S^{(j)}$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно дискретних значень невідомих густин $\mathbf{T}^{(j)r}$, $j = 1, \dots, N+3$, $r = 1, \dots, S^{(j)}$:

$$\begin{aligned} & \left(u_{n_0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), u_{\tau_0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), w_0^{(j)}(\alpha^{(j)q}), \gamma_{n_0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), \gamma_{\tau_0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) \right)^\top = \\ & = \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) \mathbf{\Omega}_{km}^{(U)}(\alpha^{(j)q}) \mathbf{E}_{km}(\alpha^{(f)r}) \mathbf{T}^{(f)r}, \\ & \alpha^{(j)q} \in L^{(j)}, \quad j = 1, \dots, N_1, \quad j = N+1, \quad q = 1, \dots, S^{(j)}, \\ & \left(N_{n_0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), N_{\tau_0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), Q_{n_0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), M_{n_0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), M_{\tau_0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) \right)^\top = \\ & = \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) \mathbf{\Omega}_{km}^{(P)}(\alpha^{(j)q}) \mathbf{E}_{km}(\alpha^{(f)r}) \mathbf{T}^{(f)r}, \\ & \alpha^{(j)q} \in L^{\varepsilon(j)}, \quad j = N_1 + 1, \dots, N_1 + N_2, \quad j = N+2, \quad q = 1, \dots, S^{(j)}, \\ & w_0^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^5 C_{km}(\varepsilon) w_i(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r}, \\ & u_{\tau_0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^5 C_{km}(\varepsilon) u_{i\tau}(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r}, \\ & \gamma_{\tau_0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^5 C_{km}(\varepsilon) \gamma_{i\tau}(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r}, \\ & \alpha^{(j)q} \in L^{(j)}, \quad j = N_1 + N_2 + 1, \dots, N, \quad j = N+3, \quad q = 1, \dots, S^{(j)}, \\ & M_{n_0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^5 C_{km}(\varepsilon) M_{in}(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r}, \\ & N_{n_0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^5 C_{km}(\varepsilon) N_{in}(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r}, \\ & \alpha^{(j)q} \in L^{\varepsilon(j)}, \quad j = N_1 + N_2 + 1, \dots, N, \quad j = N+3, \quad q = 1, \dots, S^{(j)}. \end{aligned}$$

Власні частоти знаходимо з умови існування нетривіального розв'язку

відповідної системи однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь, прирівнюючи визначник системи до нуля. Характеристики напружено-деформованого стану вздовж довільного напрямку з вектором нормалі $\mathbf{n}(\alpha)$ та дотичним вектором $\boldsymbol{\tau}(\alpha)$ отримуємо на основі знайдених дискретних значень густин потенціалів простого шару за формулами:

$$\begin{aligned} & \left(u_n(\alpha, t), u_\tau(\alpha, t), w(\alpha, t), \gamma_n(\alpha, t), \gamma_\tau(\alpha, t) \right)^\top = \\ & = \sum_{j=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(j)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) \boldsymbol{\Omega}_{km}^{(U)}(\alpha) \mathbf{E}_{km}(\alpha^{(j)r}) \mathbf{T}^{(j)r} \sin \omega t, \quad \alpha^{(j)r} \in L, \\ & \left(N_n(\alpha, t), N_\tau(\alpha, t), Q_n(\alpha, t), M_n(\alpha, t), M_\tau(\alpha, t) \right)^\top = \\ & = \sum_{j=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(j)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) \boldsymbol{\Omega}_{km}^{(P)}(\alpha) \mathbf{E}_{km}(\alpha^{(j)r}) \mathbf{T}^{(j)r} \sin \omega t, \quad \alpha^{(j)r} \in L. \end{aligned}$$

3. Аналіз числових результатів. Розглянемо часткові випадки задачі, коли задано довільні комбінації амплітуд $w(\alpha)$, $u_n(\alpha)$, $\gamma_n(\alpha)$, $u_\tau(\alpha)$, $\gamma_\tau(\alpha)$, $Q_n(\alpha)$, $M_n(\alpha)$, $N_n(\alpha)$, $M_\tau(\alpha)$, $N_\tau(\alpha)$ на контурах зовнішньої границі і кожного з отворів. Крім того, розглянемо різні змішані крайові умови на частинах зовнішньої границі і контурах отворів.

Розглянемо циліндричну шарнірно оперту прямокутну в плані панель з двома підкріпленими круглими отворами з геометричними параметрами $\ell_1 = 2$ м, $\ell_2 = 1$ м, $k_1 = 0$ м⁻¹, $k_2 = 0.5$ м⁻¹, $h = 3 \cdot 10^{-3}$ м і фізичними параметрами $E_1 = E_2 = 210$ ГПа, $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.3$, $G_{12} = G_{23} = G_{13} = E_2 / (2 + 2\nu_{12})$. Виберемо частоту усталених коливань $\omega = 5$ Гц. Крайові умови на контурах отворів задамо у вигляді

$$\begin{aligned} w_0^{(1)} &= 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}, & u_{0n}^{(1)} &= u_{0\tau}^{(1)} = \gamma_{0n}^{(1)} = \gamma_{0\tau}^{(1)} = 0, \\ w_0^{(2)} &= -4 \cdot 10^{-3} \text{ м}, & u_{0n}^{(2)} &= u_{0\tau}^{(2)} = \gamma_{0n}^{(2)} = \gamma_{0\tau}^{(2)} = 0. \end{aligned}$$

На зовнішній межі покладемо

$$w_0^{(3)} = u_{0\tau}^{(3)} = \gamma_{0\tau}^{(3)} = M_{0n}^{(3)} = N_{0n}^{(3)} = 0.$$

За параметри апроксимації виберемо $K = 50$, $S^{(1)} = S^{(2)} = 20$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.02$ м. З використанням методу узагальненого підсумовування обчислимо

$$C_{km}(\varepsilon) = \frac{64\mu_{km}}{\ell_1 \ell_2 \lambda_{1k}^2 \lambda_{2m}^2 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2} \sin^2 \frac{\lambda_{1k} \varepsilon_1}{2} \sin^2 \frac{\lambda_{2m} \varepsilon_2}{2}.$$

Радіуси і центри отворів вибираємо такими: $b_1 = 0.1$ м, $\alpha_1^{*(1)} = 0.5$ м, $\alpha_2^{*(1)} = 0.5$ м, $b_2 = 0.1$ м, $\alpha_1^{*(2)} = 1.5$ м, $\alpha_2^{*(2)} = 0.5$ м. Контури отворів задаємо параметрично з урахуванням правила обходу та орієнтації нормалі:

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(j)q} &= \alpha_1^{*(j)} + b_j \cos \frac{2\pi q}{S^{(j)}}, & \alpha_2^{(j)q} &= \alpha_2^{*(j)} - b_j \sin \frac{2\pi q}{S^{(j)}}, \\ n_1^{(j)q} &= -\cos \frac{2\pi q}{S^{(j)}}, & n_2^{(j)q} &= \sin \frac{2\pi q}{S^{(j)}}, & \tau_1^{(j)q} &= -n_2^{(j)q}, & \tau_2^{(j)q} &= n_1^{(j)q}, \\ \alpha_1^{(j)r} &= \alpha_1^{*(j)} + b_j \cos \frac{2\pi r}{S^{(j)}}, & \alpha_2^{(j)r} &= \alpha_2^{*(j)} - b_j \sin \frac{2\pi r}{S^{(j)}}, & j &= 1, 2. \end{aligned}$$

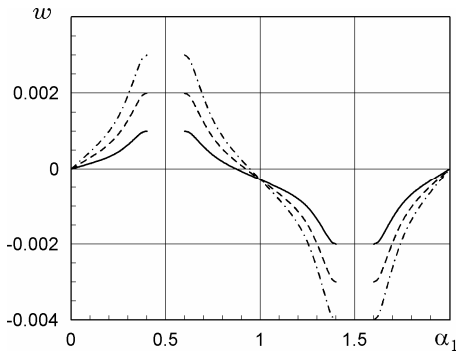


Рис. 1

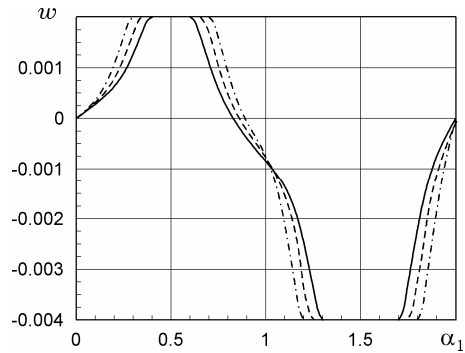


Рис. 2

На рис. 1 зображено амплітуду прогину панелі на лінії $\alpha_2 = 0.5$ м для різних крайових умов на контурах отворів (суцільна лінія – для $w_0^{(1)} = 10^{-3}$ м, $u_{0n}^{(1)} = u_{0\tau}^{(1)} = \gamma_{0n}^{(1)} = \gamma_{0\tau}^{(1)} = 0$, $w_0^{(2)} = -2 \cdot 10^{-3}$ м, $u_{0n}^{(2)} = u_{0\tau}^{(2)} = \gamma_{0n}^{(2)} = \gamma_{0\tau}^{(2)} = 0$; штрихова лінія – для $w_0^{(1)} = 2 \cdot 10^{-3}$ м, $u_{0n}^{(1)} = u_{0\tau}^{(1)} = \gamma_{0n}^{(1)} = \gamma_{0\tau}^{(1)} = 0$, $w_0^{(2)} = -3 \cdot 10^{-3}$ м, $u_{0n}^{(2)} = u_{0\tau}^{(2)} = \gamma_{0n}^{(2)} = \gamma_{0\tau}^{(2)} = 0$; штрихпунктирна лінія – для $w_0^{(1)} = 3 \cdot 10^{-3}$ м, $u_{0n}^{(1)} = u_{0\tau}^{(1)} = \gamma_{0n}^{(1)} = \gamma_{0\tau}^{(1)} = 0$, $w_0^{(2)} = -4 \cdot 10^{-3}$ м, $u_{0n}^{(2)} = u_{0\tau}^{(2)} = \gamma_{0n}^{(2)} = \gamma_{0\tau}^{(2)} = 0$). Бачимо, що значення амплітуди прогину панелі узгоджується з крайовими умовами на зовнішній границі і на контурах отворів. Збільшення амплітуди прогину на контурах отворів спричинює збільшення амплітуди прогину загалом у всіх точках панелі. Форма графіків відповідає найпростішій формі коливальних при заданій частоті.

На рис. 2 зображено амплітуду прогину панелі на лінії $\alpha_2 = 0.5$ м для різних значень радіусів отворів (суцільна лінія – $b_1 = 0.1$ м, $b_2 = 0.2$ м; штрихова лінія – $b_1 = 0.15$ м, $b_2 = 0.25$ м; штрихпунктирна лінія – $b_1 = 0.2$ м, $b_2 = 0.3$ м). У точках на контурах отворів амплітуда прогину на рис. 2 дорівнює заданим крайовими умовами значенням, що підтверджує правильність числових розрахунків.

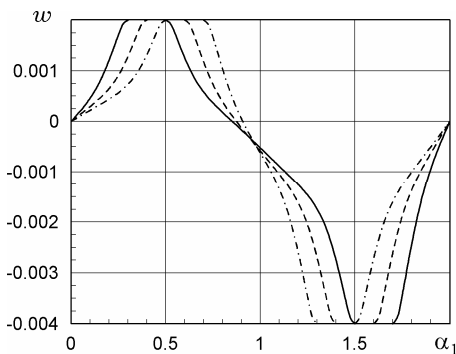


Рис. 3

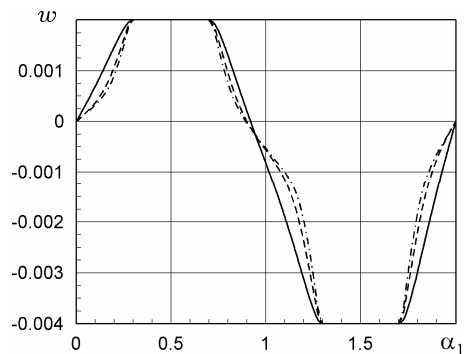


Рис. 4

На рис. 3 зображено амплітуду прогину панелі на лінії $\alpha_2 = 0.5$ м при різному розташуванні отворів (суцільна лінія – $\alpha_1^{*(1)} = 0.4$ м, $\alpha_2^{*(1)} = 0.5$ м, $\alpha_1^{*(2)} = 1.6$ м, $\alpha_2^{*(2)} = 0.5$ м; штрихова лінія – $\alpha_1^{*(1)} = 0.5$ м, $\alpha_2^{*(1)} = 0.5$ м, $\alpha_1^{*(2)} = 1.5$ м, $\alpha_2^{*(2)} = 0.5$ м; штрихпунктирна лінія – $\alpha_1^{*(1)} = 0.6$ м, $\alpha_2^{*(1)} = 0.5$ м, $\alpha_1^{*(2)} = 1.4$ м, $\alpha_2^{*(2)} = 0.5$ м). При зближенні отворів їхній сумарний вплив на амплітуду прогину панелі в зоні між ними істотно зростає.

На рис. 4 зображено амплітуду прогину панелі на лінії $\alpha_2 = 0.5$ м для різних значень кривини панелі за частоти коливань $\omega = 50$ Гц (суцільна лінія – $k_2 = 0.2 \text{ м}^{-1}$, штрихова лінія – $k_2 = 0.5 \text{ м}^{-1}$, штрихпунктирна лінія – $k_2 = 0.8 \text{ м}^{-1}$). Бачимо, що зі збільшенням кривини жорсткість панелі зростає.

На рис. 5 – рис. 8 зображено амплітуду прогину панелі на лінії $\alpha_2 = 0.5$ м для різних значень частот коливань (на рис. 5: суцільна лінія – $\omega = 50$ Гц, штрихова лінія – $\omega = 100$ Гц, штрихпунктирна лінія – $\omega = 150$ Гц; на рис. 6: суцільна лінія – $\omega = 200$ Гц, штрихова лінія – $\omega = 250$ Гц, штрихпунктирна лінія – $\omega = 295$ Гц; на рис. 7: суцільна лінія – $\omega = 345$ Гц, штрихова лінія – $\omega = 400$ Гц, штрихпунктирна лінія – $\omega = 445$ Гц; рис. 8: суцільна лінія – $\omega = 500$ Гц, штрихова лінія – $\omega = 550$ Гц, штрихпунктирна лінія – $\omega = 600$ Гц). Зі збільшенням частоти форма коливань ускладнюється і появляється більше хвиль у графічних залежностях. Також можна стверджувати, що частота коливань впливає не лише на форму, але й на амплітуду коливань.

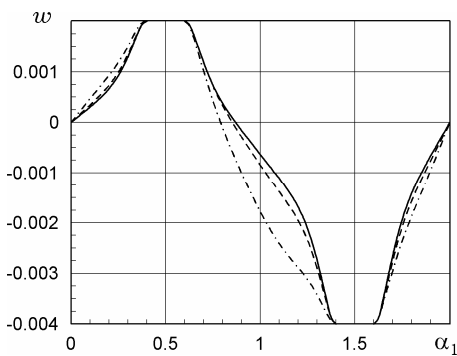


Рис. 5

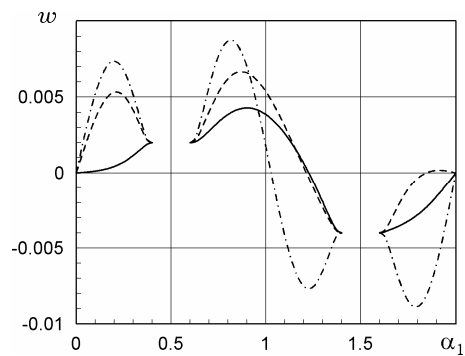


Рис. 6

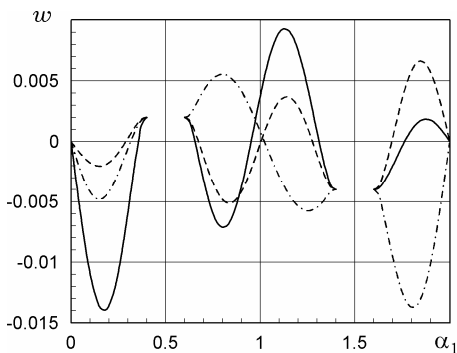


Рис. 7

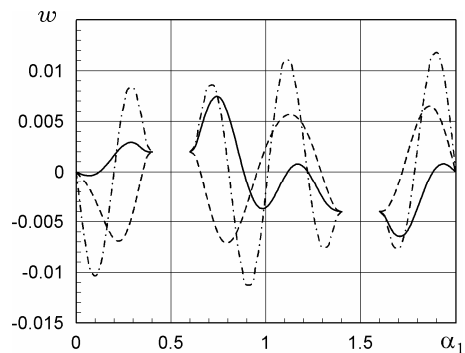


Рис. 8

Рис. 9 демонструє вплив модуля Юнга на амплітуду прогину панелі з кривинами $k_1 = 0$, $k_2 = 0.4 \text{ м}^{-1}$ при $\omega = 225$ Гц, $\alpha_2 = 0.5$ м (суцільна лінія – $E_1 = 210$ ГПа, $E_2 = 210$ ГПа, $\nu_{12} = 0.3$; штрихова лінія – $E_1 = 110$ ГПа, $E_2 = 210$ ГПа, $\nu_{12} = 0.3$, штрихпунктирна лінія – $E_1 = 10$ ГПа, $E_2 = 210$ ГПа, $\nu_{12} = 0.3$). Бачимо, що зміна модуля Юнга в поздовжньому напрямку істот-

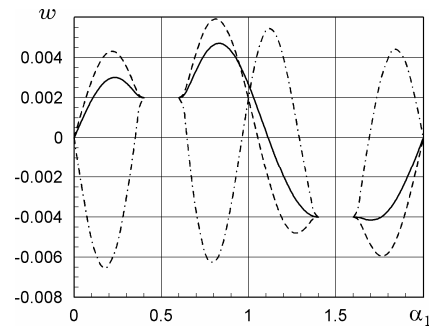


Рис. 9

но впливає на значення прогину і форму коливань. У цьому випадку суцільна та штрихова лінії відповідають амплітуді прогину панелі з тією ж формою коливань, і амплітуда зростає зі зменшенням модуля Юнга. При подальшому зменшенні модуля Юнга починає змінюватись форма коливань, що відображає штрихпунктирна лінія.

Висновки. У рамках уточненої моделі, яка враховує поперечні зсуви та інерційні компоненти, розв'язано задачу про усталені коливання ортотропної панелі подвійної кривини з системою отворів довільної геометричної форми, орієнтації та розташування. Розглянуто змішані гармонічні в часі граничні умови на контурах отворів та зовнішній границі панелі, яка також є довільної геометричної форми. Розв'язок побудовано непрямым методом граничних елементів за використання специфічного подання функцій Гріна. Систему інтегральних рівнянь розв'язано методом колокацій. Використовуючи побудовані в роботі алгебраїчні рівняння, можна отримати розв'язки для часткових випадків, коли задано довільні комбінації амплітуд переміщень, кутів повороту, зусиль і моментів на контурах зовнішньої границі та отворів. У рамках сформульованої задачі також розглянуто різні крайові умови на різних частинах зовнішньої границі і контурів отворів. Оскільки ключові рівняння враховують деформацію поперечного зсуву та всі інерційні компоненти, включно з інерцією обертання, це дозволяє з високою точністю дослідити різні типи коливань, спричинених збуреннями границі анізотропних елементів конструкцій. Для верифікації запропонованої числової схеми досліджено випадок циліндричної шарнірно опертої панелі, прямокутної в плані з двома круглими підкріпченими отворами. На основі числових результатів можна стверджувати, що значення динамічного прогину істотно залежить від частоти, крайових умов, взаємного розміщення отворів, а також їхніх розмірів. Отримані розв'язки дозволяють оптимально підбирати форму отворів, їхнє розташування та інші параметри, за допомогою яких можна оптимізувати співвідношення вага-міцність, підвищити надійність за певного спектру частот зовнішніх факторів. Запропонована числова схема залишається аналогічною і для інших часткових випадків задачі.

Додаток 1

$$L_{11} = B_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + B_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - k_1^2 \Lambda_1 - 2h\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$L_{22} = B_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + B_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - k_2^2 \Lambda_2 - 2h\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$L_{33} = \Lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \Lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - (k_1 B_1 (k_1 + \nu_{12} k_2) + k_2 B_2 (k_2 + \nu_{21} k_1)) - 2h\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$L_{44} = D_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_1 - \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$L_{55} = D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_2 - \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$L_{14} = L_{41} = k_1 \Lambda_1, \quad L_{12} = (B_1 \nu_{12} + B_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2},$$

$$L_{21} = (B_{12} + B_2 \nu_{21}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad L_{25} = L_{52} = k_2 \Lambda_2, \quad L_{24} = L_{42} = 0,$$

$$\begin{aligned}
L_{45} &= (D_1 v_{12} + D_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, & L_{54} &= (D_{12} + D_2 v_{21}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \\
L_{34} &= -L_{43} = \Lambda_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, & L_{35} &= -L_{53} = \Lambda_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, & L_{15} &= L_{51} = 0, \\
L_{13} &= (k_1 \Lambda_1 + B_1 k_1 + B_1 k_2 v_{12}) \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, & L_{31} &= -(k_1 \Lambda_1 + B_1 k_1 + B_2 k_2 v_{21}) \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \\
L_{23} &= (k_2 \Lambda_2 + B_2 k_2 + B_2 k_2 v_{21}) \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, & L_{32} &= -(k_2 \Lambda_2 + B_2 k_2 + B_1 k_1 v_{12}) \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \\
D_i &= \frac{2h^3 E_i}{3(1 - v_{ij} v_{ji})}, & D_{ij} &= \frac{2h^3}{3} G_{ij}, & B_i &= \frac{2h E_i}{1 - v_{ij} v_{ji}}, \\
B_{ij} &= 2h G_{ij}, & \Lambda_i &= 2h G_{i3}, & i, j &= 1, 2, \quad i \neq j.
\end{aligned}$$

Додаток 2

$$\mathbf{U}_{km} = \begin{pmatrix} u_{1km}^1 & u_{1km}^2 & u_{1km}^3 & u_{1km}^4 & u_{1km}^5 \\ u_{2km}^1 & u_{2km}^2 & u_{2km}^3 & u_{2km}^4 & u_{2km}^5 \\ w_{km}^1 & w_{km}^2 & w_{km}^3 & w_{km}^4 & w_{km}^5 \\ \gamma_{1km}^1 & \gamma_{1km}^2 & \gamma_{1km}^3 & \gamma_{1km}^4 & \gamma_{1km}^5 \\ \gamma_{2km}^1 & \gamma_{2km}^2 & \gamma_{2km}^3 & \gamma_{2km}^4 & \gamma_{2km}^5 \end{pmatrix},$$

де $u_{ikm}^j = \frac{\mathbf{u}_{ikm}^j}{|\mathbf{L}^{km}|}$, $w_{km}^j = \frac{\mathbf{w}_{km}^j}{|\mathbf{L}^{km}|}$, $\gamma_{ikm}^j = \frac{\boldsymbol{\gamma}_{ikm}^j}{|\mathbf{L}^{km}|}$, $i = 1, 2$, а \mathbf{u}_{1km}^j , \mathbf{u}_{2km}^j , \mathbf{w}_{km}^j , $\boldsymbol{\gamma}_{1km}^j$, $\boldsymbol{\gamma}_{2km}^j$, $j = 1, \dots, 5$, – алгебраїчні доповнення до j -го елемента відповідно з першої до п'ятої стрічок визначника $|\mathbf{L}^{km}| = \det \left((L_{ij}^{km})_{i,j=1,\dots,5} \right)$,

$$\begin{aligned}
L_{11}^{km} &= -B_1 \lambda_{1k}^2 - B_{12} \lambda_{2m}^2 - k_1^2 \Lambda_1 + 2\rho h \omega^2, \\
L_{22}^{km} &= -B_{12} \lambda_{1k}^2 - B_2 \lambda_{2m}^2 - k_2^2 \Lambda_2 + 2\rho h \omega^2, \\
L_{33}^{km} &= -\Lambda_1 \lambda_{1k}^2 - \Lambda_2 \lambda_{2m}^2 - (k_1 B_1 (k_1 + v_{12} k_2) + k_2 B_2 (k_2 + v_{21} k_1)) + 2\rho h \omega^2, \\
L_{44}^{km} &= -D_1 \lambda_{1k}^2 - D_{12} \lambda_{2m}^2 - \Lambda_1 + \frac{2h^3}{3} \rho \omega^2, \\
L_{55}^{km} &= -D_{12} \lambda_{1k}^2 - D_2 \lambda_{2m}^2 - \Lambda_2 + \frac{2h^3}{3} \rho \omega^2, \\
L_{14}^{km} &= L_{41}^{km} = k_1 \Lambda_1, & L_{25}^{km} &= L_{52}^{km} = k_2 \Lambda_2, & L_{15}^{km} &= L_{51}^{km} = L_{24}^{km} = L_{42}^{km} = 0, \\
L_{12}^{km} &= -(B_1 v_{12} + B_{12}) \lambda_{1k} \lambda_{2m}, & L_{21}^{km} &= -(B_2 v_{21} + B_{12}) \lambda_{1k} \lambda_{2m}, \\
L_{34}^{km} &= L_{43}^{km} = -\Lambda_1 \lambda_{1k}, & L_{35}^{km} &= L_{53}^{km} = -\Lambda_2 \lambda_{2m}, \\
L_{54}^{km} &= -(D_2 v_{21} + D_{12}) \lambda_{1k} \lambda_{2m}, & L_{45}^{km} &= -(D_1 v_{12} + D_{12}) \lambda_{1k} \lambda_{2m}, \\
L_{13}^{km} &= (k_1 \Lambda_1 + B_1 k_1 + B_1 k_2 v_{12}) \lambda_{1k}, & L_{31}^{km} &= (k_1 \Lambda_1 + B_1 k_1 + B_2 k_2 v_{21}) \lambda_{1k}, \\
L_{23}^{km} &= (k_2 \Lambda_2 + B_2 k_2 + B_2 k_2 v_{21}) \lambda_{2m}, & L_{32}^{km} &= (k_2 \Lambda_2 + B_2 k_2 + B_1 k_1 v_{12}) \lambda_{2m}.
\end{aligned}$$

Додаток 3

$$\mathbf{\Omega}_{km}^{(U)}(\alpha) = \begin{pmatrix} u_{1n}(\alpha) & u_{2n}(\alpha) & u_{3n}(\alpha) & u_{4n}(\alpha) & u_{5n}(\alpha) \\ u_{1\tau}(\alpha) & u_{2\tau}(\alpha) & u_{3\tau}(\alpha) & u_{4\tau}(\alpha) & u_{5\tau}(\alpha) \\ w_1(\alpha) & w_2(\alpha) & w_3(\alpha) & w_4(\alpha) & w_5(\alpha) \\ \gamma_{1n}(\alpha) & \gamma_{2n}(\alpha) & \gamma_{3n}(\alpha) & \gamma_{4n}(\alpha) & \gamma_{5n}(\alpha) \\ \gamma_{1\tau}(\alpha) & \gamma_{2\tau}(\alpha) & \gamma_{3\tau}(\alpha) & \gamma_{4\tau}(\alpha) & \gamma_{5\tau}(\alpha) \end{pmatrix},$$

де

$$u_{jn}(\alpha) = n_1(\alpha)u_{1km}^j \Phi_{km}^{cs}(\alpha) + n_2(\alpha)u_{2km}^j \Phi_{km}^{sc}(\alpha),$$

$$u_{j\tau}(\alpha) = \tau_1(\alpha)u_{1km}^j \Phi_{km}^{cs}(\alpha) + \tau_2(\alpha)u_{2km}^j \Phi_{km}^{sc}(\alpha),$$

$$\gamma_{jn}(\alpha) = n_1(\alpha)\gamma_{1km}^j \Phi_{km}^{cs}(\alpha) + n_2(\alpha)\gamma_{2km}^j \Phi_{km}^{sc}(\alpha),$$

$$\gamma_{j\tau}(\alpha) = \tau_1(\alpha)\gamma_{1km}^j \Phi_{km}^{cs}(\alpha) + \tau_2(\alpha)\gamma_{2km}^j \Phi_{km}^{sc}(\alpha),$$

$$w_j(\alpha) = w_{km}^j \Phi_{km}^{ss}(\alpha), \quad j = 1, \dots, 5;$$

$$\mathbf{\Omega}_{km}^{(P)}(\alpha) = \begin{pmatrix} N_{1n}(\alpha) & N_{2n}(\alpha) & N_{3n}(\alpha) & N_{4n}(\alpha) & N_{5n}(\alpha) \\ N_{1\tau}(\alpha) & N_{2\tau}(\alpha) & N_{3\tau}(\alpha) & N_{4\tau}(\alpha) & N_{5\tau}(\alpha) \\ Q_{1n}(\alpha) & Q_{2n}(\alpha) & Q_{3n}(\alpha) & Q_{4n}(\alpha) & Q_{5n}(\alpha) \\ M_{1n}(\alpha) & M_{2n}(\alpha) & M_{3n}(\alpha) & M_{4n}(\alpha) & M_{5n}(\alpha) \\ M_{1\tau}(\alpha) & M_{2\tau}(\alpha) & M_{3\tau}(\alpha) & M_{4\tau}(\alpha) & M_{5\tau}(\alpha) \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{aligned} N_{jn} &= B_1 n_1^2(\alpha) \Phi_{km}^{ss}(\alpha) ((k_1 + v_{12} k_2) w_{km}^j - \lambda_{1k} u_{1km}^j - v_{12} \lambda_{2m} u_{2km}^j) + \\ &\quad + 2B_{12} n_1(\alpha) n_2(\alpha) \Phi_{km}^{cc}(\alpha) (\lambda_{2m} u_{1km}^j + \lambda_{1k} u_{2km}^j) + \\ &\quad + B_2 n_2^2(\alpha) \Phi_{km}^{ss}(\alpha) ((k_2 + v_{21} k_1) w_{km}^j - \lambda_{2m} u_{2km}^j - v_{21} \lambda_{1k} u_{1km}^j), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{j\tau} &= B_1 n_1(\alpha) \tau_1(\alpha) \Phi_{km}^{ss}(\alpha) ((k_1 + v_{12} k_2) w_{km}^j - \lambda_{1k} u_{1km}^j - v_{12} \lambda_{2m} u_{2km}^j) + \\ &\quad + B_{12} (n_1(\alpha) \tau_2(\alpha) + n_2(\alpha) \tau_1(\alpha)) \Phi_{km}^{cc}(\alpha) (\lambda_{2m} u_{1km}^j + \lambda_{1k} u_{2km}^j) + \\ &\quad + B_2 n_2(\alpha) \tau_2(\alpha) \Phi_{km}^{ss}(\alpha) ((k_2 + v_{21} k_1) w_{km}^j - \\ &\quad - \lambda_{2m} u_{2km}^j - v_{21} \lambda_{1k} u_{1km}^j), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{jn} &= -D_1 n_1^2(\alpha) \Phi_{km}^{ss}(\alpha) (\lambda_{1k} \gamma_{1km}^j + v_{12} \lambda_{2m} \gamma_{2km}^j) + \\ &\quad + 2D_{12} n_1(\alpha) n_2(\alpha) \Phi_{km}^{cc}(\alpha) (\lambda_{2m} \gamma_{1km}^j + \lambda_{1k} \gamma_{2km}^j) - \\ &\quad - D_2 n_2^2(\alpha) \Phi_{km}^{ss}(\alpha) (\lambda_{2m} \gamma_{2km}^j + v_{21} \lambda_{1k} \gamma_{1km}^j), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{j\tau} &= -D_1 n_1(\alpha) \tau_1(\alpha) \Phi_{km}^{ss}(\alpha) (\lambda_{1k} \gamma_{1km}^j + v_{12} \lambda_{2m} \gamma_{2km}^j) + \\ &\quad + D_{12} (n_1(\alpha) \tau_2(\alpha) + n_2(\alpha) \tau_1(\alpha)) \Phi_{km}^{cc}(\alpha) (\lambda_{2m} \gamma_{1km}^j + \lambda_{1k} \gamma_{2km}^j) - \\ &\quad - D_2 n_2(\alpha) \tau_2(\alpha) \Phi_{km}^{ss}(\alpha) (\lambda_{2m} \gamma_{2km}^j + v_{21} \lambda_{1k} \gamma_{1km}^j), \end{aligned}$$

$$Q_{jn} = \Lambda_1 n_1(\alpha) \Phi_{km}^{cs}(\alpha) (\gamma_{1km}^j + \lambda_{1k} w_{km}^j - k_1 u_{1km}^j) + \\ + \Lambda_2 n_2(\alpha) \Phi_{km}^{sc}(\alpha) (\gamma_{2km}^j + \lambda_{2m} w_{km}^j - k_2 u_{2km}^j), \quad j = 1, \dots, 5.$$

1. Бурак Я. Й., Рудавський Ю. К., Сухорольський М. А. Аналітична механіка локально навантажених оболонок. – Львів: Інтеллект-Захід, 2007. – 240 с.
2. Сухорольський М. А. Функціональні послідовності та ряди. – Львів: Растр-7, 2010. – 340 с.
3. Шона Т. До побудови розв'язку задачі про коливання ортотропної непологої циліндричної панелі з множиною отворів довільної форми та розташування // *Машинознавство*. – 2011. – № 11-12. – С. 36–41.
4. Шона Т. Коливання ортотропної панелі подвійної кривини з множиною отворів довільної конфігурації // *Вісн. Терноп. нац. техн. ун-ту*. . – 2012. – **67**, № 3. – С. 63–74.
5. *Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T.* Large amplitude free vibration of orthotropic shallow shells of complex shapes with variable thickness // *Lat. Am. J. Solids Struct.* – 2013. – **10**, No. 1. – P. 140–162.
– <http://dx.doi.org/10.1590/S1679-78252013000100015>.
6. *Bicos A. S., Springer G. S.* Vibrational characteristics of composite panels with cutouts // *AIAA Journal*. – 1989. – **27**, No. 8. – P. 1116–1122.
– <https://doi.org/10.2514/3.10230>.
7. *Djoudi M. S., Bahai H.* Strain based finite element for the vibration of cylindrical panels with openings // *Thin Wall. Struct.* – 2004. – **42**, No. 4. – P. 575–588.
– <https://doi.org/10.1016/j.tws.2003.09.003>.
8. *Kumar L. R., Datta P. K., Prabhakara D. L.* Vibration and stability behavior of laminated composite curved panels with cutout under partial in-plane loads // *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* – 2005. – **5**, No 1. – P. 75–94.
– <https://doi.org/10.1142/S0219455405001507>.
9. *Kumar L. R., Datta P. K., Prabhakara D. L.* Tension buckling and parametric instability characteristics of doubly curved panels with circular cutout subjected to nonuniform tensile edge loading // *Thin Wall. Struct.* – 2004. – **42**, No 7. – P. 947–962. – <https://doi.org/10.1016/j.tws.2004.03.009>.
10. *Kumar L. R., Datta P. K., Prabhakara D. L.* Dynamic stability characteristics of doubly curved panels with circular cutout subjected to follower edge load // *Aircr. Eng. Aerosp. Technol.* – 2005. – **77**, No 1. – P. 52–61.
– <https://doi.org/10.1108/00022660510576046>.
11. *Kurpa L. V., Lyubitska K. I., Shmatko A. V.* Solution of vibration problems for shallow shells of arbitrary form by the *R*-function method // *J. Sound Vib.* – 2005. – **279**, No. 3-5. – P. 1071–1084. – <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.01.002>.
12. *Kurpa L. V., Shmatko T., Timchenko G.* Free vibration analysis of laminated shallow shells with complex shape using the *R*-functions method // *Compos. Struct.* – 2010. – **93**, No 1. – P. 225–233.
– <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.016>.
13. *Levraea V. J. (Jr.), Palazotto A. N., Maddux G. E.* The effect of cutout positioning on the dynamic characteristics of a curved composite panel // *Compos. Struct.* – 1993. – **23**, No. 4. – P. 263–272.
– [https://doi.org/10.1016/0263-8223\(93\)90227-H](https://doi.org/10.1016/0263-8223(93)90227-H).
14. *Li F. M., Hu C., Huang W. H.* Elastic wave scattering and dynamic stress concentrations in cylindrical shells with a circular cutout // *J. Sound Vib.* – 2003. – **259**, No. 5. – P. 1209–1223. – <https://doi.org/10.1006/jsvi.2002.5222>.
15. *Liew K. M., Lim C. W.* Vibration of perforated doubly-curved shallow shells with rounded corners // *Int. J. Solids Struct.* – 1994. – **31**, No. 11. – P. 1519–1536.
– [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(94\)90012-4](https://doi.org/10.1016/0020-7683(94)90012-4).
16. *Lighthill M. J.* An introduction to Fourier analysis and generalised functions. – London – New York: Cambridge University Press, 1958. – vi+79 p.
17. *Sahu S. K., Datta P. K.* Dynamic stability of laminated composite curved panels with cutouts // *J. Eng. Mech.* – 2003. – **129**, No. 11. – P. 1245–1253.
– [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2003\)129:11\(1245\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2003)129:11(1245)).
18. *Sahu S. K., Datta P. K.* Dynamic stability of curved panels with cutouts // *J. Sound Vib.* – 2002. – **251**, No. 4. – P. 683–696.
– <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3961>.

19. Sivasubramonian B., Rao G. V., Krishnan A. Free vibration of longitudinally stiffened curved panels with cutout // J. Sound Vib. – 1999. – 226, No 1. – P. 41–55. – <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2281>.
20. Shopa T. Vibration of orthotropic double curvature panel with a set of cutouts of arbitrary configuration // In: Proc. of 19th Int. Congr. on Sound and Vibration 2012 (ICSV 19). – Red Hook: Curran Associates, Inc., 2013. – Vol. 2. – P. 1171–1179.

КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНОЙ ПАНЕЛИ ДВОЙНОЙ КРИВИЗНЫ С МНОЖЕСТВОМ ОТВЕРСТИЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ И СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В рамках уточненной модели, учитывающей деформацию поперечного сдвига и инерционные компоненты, построено решение задачи об установившихся колебаниях ортотропной панели двойной кривизны с отверстиями произвольной формы, ориентации и размещения и произвольной внешней границей при смешанных гармонических граничных условиях на внешней границе и контурах отверстий. Решение получено при помощи непрямого метода граничных элементов с использованием последовательностного подхода к построению функции Грина. Полученные при этом интегральные уравнения решены методом коллокаций.

Ключевые слова: ортотропная панель двойной кривизны, отверстия, колебания, не прямой метод граничных элементов, метод коллокаций.

VIBRATIONS OF AN ORTHOTROPIC DOUBLY-CURVED PANEL WITH A SET OF CUTOUTS OF ARBITRARY CONFIGURATION UNDER MIXED-TYPE BOUNDARY CONDITIONS

Within the framework of a refined theory accounting for transverse shear deformation and inertial components, a solution to the problem on steady-state vibrations of an orthotropic doubly-curved panel with cutouts of arbitrary shape, orientation, and location and arbitrary external boundary is constructed under mixed-type boundary conditions on the contours of the external boundary and on the contours of cutouts. The solution is constructed by using the indirect boundary element method and with the sequential approach to the representation of the Green function. The thereby obtained integral equations are solved by means of the collocation method.

Key words: orthotropic doubly curved panel, cutouts, vibration, indirect boundary element method, collocation method.

Ин-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
31.10.17