

РОЗВ'ЯЗОК ТРИВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ НЕОБМЕЖЕНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ТІЛА

Побудовано аналітичний розв'язок тривимірної задачі термопружності для трансверсально-ізотропного простору з внутрішніми стаціонарними джерелами тепла. З використанням методу безпосереднього інтегрування задачу зведено до системи ключових рівнянь для компонент тензора напружень, яку розв'язано з використанням подвійного інтегрального перетворення Фур'є.

Ключові слова: трансверсально-ізотропний пружний простір, тривимірна задача термопружності, аналітичний розв'язок, подвійне інтегральне перетворення Фур'є, метод безпосереднього інтегрування.

Вступ. Розвиток сучасних технологій і широке застосування композитних матеріалів у техніці, будівництві та теплоенергетиці загострюють потребу розробки ефективних методів дослідження термомеханічної поведінки пружних тіл за довільних силових і теплових навантажень з урахуванням анізотропії пружних та теплофізичних властивостей матеріалу [26]. Для окремих типів композитних матеріалів, зокрема, виготовлених з великої кількості тонких пружних шарів [24] або волокнистих композитів з гексагональною укладкою волокон [16], характеристики матеріалу в одному з просторових напрямків (трансверсальному) відрізняються від властивостей в інших напрямках (площина ізоотропії), що є характерним для моделі трансверсально-ізотропного (ТІ) тіла [5, 10].

Внаслідок відмінності модулів ТІ матеріалу розв'язання систем ключових рівнянь відповідних задач термопружності є складнішими порівняно з ізоотропним випадком, особливо в загальній тривимірній постановці [14]. У зв'язку з цим відомі методи побудови розв'язків задач теорії пружності та термопружності для ТІ тіл розвинуто за певних спрощень, що дозволяють знизити розмірність задач [6, 8, 13, 17, 34]. Лехницький узагальнив метод бігармонічних функцій Ері та Лява для випадку дії зосереджених сил на анізотропні тіла для плоскої [3] та осесиметричної [4] задач теорії пружності. У роботах [18, 25] було отримано розв'язки аналогічних задач за допомогою трьох незалежних гармонічних функцій. В [9, 23, 27] ці два підходи були узагальнені для розв'язання окремих тривимірних задач. Методику побудови функцій Гріна з використанням трьох гармонічних функцій розвинуто в [20, 22] для задач термопружності в обмежених та необмежених ТІ тілах зі стаціонарним зосередженим джерелом тепла. Цей підхід був поширений у [21] на випадок ТІ біматеріалів за аналогічного навантаження. Розв'язки задач теорії пружності для анізотропних, у тому числі ТІ, біматеріальних тіл отримано в [28] за допомогою функцій Гріна з використанням формалізму Stroh та двовимірного перетворення Фур'є. Задачу про точкове джерело тепла в напівбезмежному ТІ тілі було розв'язано в [15] за допомогою методу перетворень подібності, який дозволяє звести задачу до набору спряжених звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами для компонент вектора переміщень. За аналогією ізоотропних матеріалів метод функції комплексної змінної поширено на випадок ТІ тіл з використанням потенціальних функцій [1]. Розвиток числових та аналітично-числових методів розв'язування задач теорії пружності та термопружності для ТІ тіл простежено в [11, 29, 30, 36].

Незважаючи на велику кількість напрацьованих розв'язків задач теорії пружності та термопружності для ТІ тіл певної форми за окремих способів

* tokovyy@iapmm.lviv.ua

силового та теплового навантажень, практично відсутні методи побудови точних аналітичних розв'язків тривимірних задач для ТІ тіл довільної форми за загальних умов навантаження. Насамперед ми це пов'язуємо з тим, що застосування гармонічних чи бігармонічних потенціальних функцій, на яких ґрунтується більшість відомих методів, для ТІ тіл часто пов'язане зі складнощами аналітичного та обчислювального характеру. Ці складнощі спричинені, зокрема, підвищенням порядку вихідних систем диференціальних рівнянь, а також тим, що власні значення відповідних спектральних задач для ключових рівнянь виражаються через пружні модулі ТІ матеріалу, що суттєво ускладнює використання таких методів порівняно з ізотропним випадком (див., зокрема, дослідження існування та єдиності розв'язків такого класу задач, отриманих з використанням узагальнених гармонічних і бігармонічних функцій [19, 33, 35]).

У [32] для побудови явного аналітичного розв'язку тривимірної задачі теорії пружності для ТІ шару за довільного силового навантаження обмежувачих площин використано метод безпосереднього інтегрування [31], запропонований В. М. Вігаком [2]. Застосування цього методу дозволяє звести вихідну задачу до системи ключових рівнянь для компонент тензора напружень і послідовно розв'язати ці рівняння з використанням відповідних крайових умов у просторі подвійного інтегрального перетворення Фур'є. У цій статті вказаний підхід поширено для побудови явних аналітичних розв'язків тривимірних задач термопружності для необмежених ТІ тіл з довільним локальним розподілом внутрішніх стаціонарних джерел тепла.

1. Постановка задачі. Розглянемо тривимірну задачу термопружності для ТІ простору, віднесеного до безрозмірної декартової системи координат (x, y, z) так, що площина ізоτροпії є паралельною до площини xOy . За відсутності масових сил задача описується рівняннями рівноваги [5, 32]

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \begin{matrix} y \\ x \leftarrow z \end{matrix}, \quad (1)$$

рівняннями суцільності в деформаціях

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right), \quad \begin{matrix} y \\ x \leftarrow z \end{matrix}, \end{aligned} \quad (2)$$

та фізичними співвідношеннями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) - \frac{\nu'}{E'} \sigma_{zz} + \alpha T, & x \rightleftharpoons y, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E'} \sigma_{zz} - \frac{\nu'}{E'} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \alpha' T, \\ \varepsilon_{jz} &= \frac{1}{G'} \sigma_{jz}, \quad j = \{x, y\}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{G} \sigma_{xy}. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут $\sigma_{jl} = \sigma_{lj}$, $\varepsilon_{jl} = \varepsilon_{lj}$ – компоненти тензорів напружень та деформації, $l, j = \{x, y, z\}$; E , E' та $G = E / (2 + 2\nu)$, G' – модулі пружності та зсуву у площині ізоτροпії та у перпендикулярному до неї напрямку; ν та ν' – коефіцієнти Пуассона, що описують відповідно звуження (розширення) у перпендикулярному до площини ізоτροпії напрямку за розтягу (стиску) у паралельному до неї напрямку та звуження (розширення) у площині ізоτροпії за розтягу (стиску) у перпендикулярному до неї напрямку; α та α' – коефіцієнти лінійного температурного розширення паралельно та перпендикулярно до площини ізоτροпії; T – стаціонарне температурне поле, яке

визначимо з відповідної задачі теплопровідності; символи $\begin{matrix} y \\ x \leftarrow z \end{matrix}$ та $x \rightleftharpoons y$ означають отримання ще відповідно двох та одного рівнянь за допомогою циклічної і взаємної перестановки індексів та змінних.

Розв'язок задачі (1)–(3) будемо у припущенні, що $T \rightarrow 0$ при $x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$.

2. Ключові рівняння задачі. З використанням методу безпосереднього інтегрування [31] у роботі [32] систему рівнянь тривимірної задачі теорії пружності зведено до ключових рівнянь у напруженнях, які для поставленої задачі (1)–(3) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta^+ \Delta^- \sigma_{zz} - \mu^+ \mu^- \Delta_{xy} \Delta_1 \sigma_{zz} &= \\ &= \mu^+ E \Delta_{xy} \left((\alpha + (\alpha + \alpha') \mu^-) \Delta_{xy} T + \alpha(1 + \nu) \mu^- \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \\ \Delta^+ \sigma_{zz} &= \mu^+ \Delta_{xy} (\sigma + \alpha E T), \\ \Delta_{xy} \sigma_{yy} + \mu_1 \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial z^2} &= \left(\frac{\mu_2}{\mu^+} - 1 \right) \Delta \sigma_{zz} + \\ &+ (1 - \mu_2) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + (\mu_1 - \mu_2) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\mu_2}{\mu^-} \sigma + (1 - \mu_3) \sigma_{zz} \right) - \\ &- 2G' \left(\alpha \Delta T + \alpha' \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad x \rightleftharpoons y, \\ 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2}, \quad \begin{matrix} y \\ x \leftarrow z \end{matrix}, \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta_{xy} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta = \Delta_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta^\pm = \Delta_{xy} \pm (1 \pm \nu) \mu^\pm \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\ \Delta_1 &= (\mu_4 - 1) \Delta_{xy} + 2 \frac{\mu^+ - \mu_2}{\mu_2 \mu^+} \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \mu^\pm = \frac{E'}{\nu' E \pm E'}, \\ \mu_1 &= \frac{G'}{G}, \quad \mu_2 = 2 \frac{G'}{E}, \quad \mu_3 = 2G' \frac{1 + \nu'}{E'}, \quad \mu_4 = \frac{E}{E'} \end{aligned}$$

і

$$\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}. \quad (5)$$

Розв'язок задачі (1)–(3) будуватимемо, послідовно розв'язуючи рівняння (4) з урахуванням виразу (5) за умови затухання напружень у безмежно віддалених точках.

3. Розв'язання ключових рівнянь. Для побудови розв'язків ключових рівнянь застосуємо подвійне інтегральне перетворення Фур'є [12]

$$\bar{f}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) \exp(-i(x s_x + y s_y)) dx dy, \quad (6)$$

де s_x, s_y – параметри перетворення за координатами x та y ; $i^2 = -1$.

У просторі зображень перетворення (6) перше рівняння (4) має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \bar{\sigma}_{zz}}{dz^4} - 2a_1 s^2 \frac{d^2 \bar{\sigma}_{zz}}{dz^2} + a_2 s^4 \bar{\sigma}_{zz} &= \\ &= \frac{s^2 E}{1-v^2} \left(\alpha(1+v) \frac{d^2 \bar{T}}{dz^2} - s^2 \left(\alpha' + \alpha v' \frac{E}{E'} \right) \bar{T} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

де $s^2 = s_x^2 + s_y^2$,

$$a_1 = \frac{E}{E'} \frac{E' - 2(1+v)v'G'}{2(1-v^2)G'}, \quad a_2 = \frac{E}{E'} \frac{E' - v'^2 E}{(1-v^2)E'}. \quad (8)$$

Форма розв'язку рівняння (7) залежить від кратності коренів відповідного характеристичного рівняння, які будуть різними при $a_1^2 \neq a_2$ або кратними при $a_1^2 = a_2$.

При $a_1^2 \neq a_2$ обмежений розв'язок рівняння (7) має вигляд

$$\bar{\sigma}_{zz}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T}(\xi) \left(\alpha_2 \exp(-|s\lambda_2||z-\xi|) - \alpha_1 \exp(-|s\lambda_1||z-\xi|) \right) d\xi, \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \frac{G}{(1-v)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left| \frac{s}{\lambda_j} \right| \left(\left((1+v)\lambda_j^2 - v' \frac{E}{E'} \right) \alpha - \alpha' \right), \\ \lambda_j &= \sqrt{a_1 + (-1)^j \sqrt{a_1^2 - a_2}}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Знайшовши розв'язок (9), використаємо його для задоволення другого з рівнянь (4), яке у просторі зображень перетворення (6) набуває вигляду

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\mu^+} \bar{\sigma}_{zz} - \frac{1+v}{s^2} \frac{\partial^2 \bar{\sigma}_{zz}}{\partial z^2} - \alpha E \bar{T}. \quad (10)$$

У такий спосіб отримаємо вираз

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(z) &= -2 \frac{\alpha E}{1-v} \bar{T}(z) + \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T}(\xi) \left(\beta_2 \exp(-|s\lambda_2||z-\xi|) - \right. \\ &\quad \left. - \beta_1 \exp(-|s\lambda_1||z-\xi|) \right) d\xi, \end{aligned} \quad (11)$$

де $\beta_j = \left(1 + v' \frac{E}{E'} - (1+v)\lambda_j^2 \right) \alpha_j$, $j = 1, 2$.

Третє з рівнянь (4) у просторі зображень перетворення (6) має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\sigma}_{yy}}{dz^2} - (sk)^2 \bar{\sigma}_{yy} &= \frac{\mu_2 - \mu^+}{\mu^+ \mu_1} \frac{d^2 \bar{\sigma}_{zz}}{dz^2} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1} \frac{d^2 \bar{\sigma}}{dz^2} - \\ &\quad - \frac{1}{\mu_1} \left(s_y^2 (1 - \mu_3) + s^2 \frac{\mu_2 - \mu^+}{\mu^+} \right) \bar{\sigma}_{zz} - \\ &\quad - \frac{1}{\mu_1} \left(s_x^2 (1 - \mu_2) + s_y^2 \frac{\mu_2}{\mu^-} \right) \bar{\sigma} - \\ &\quad - 2G \left(\alpha \left(\frac{d^2 \bar{T}}{dz^2} - s^2 \bar{T} \right) - \alpha' s_y^2 \bar{T} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

де $k^2 = G / G'$.

З урахуванням виразів (9), (11) обмежений у нескінченно віддалених точках розв'язок рівняння (12) знайдемо у формі

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{yy}(z) = & -\frac{\alpha E}{1-\nu} \bar{T}(z) + \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T}(\xi) \left(\gamma_2 \exp(-|s\lambda_2||z-\xi|) - \right. \\ & \left. - \gamma_1 \exp(-|s\lambda_1||z-\xi|) + \gamma_0 \exp(-|sk||z-\xi|) \right) d\xi, \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$\gamma_j = \frac{2\gamma_j^*}{k^2 - \lambda_j^2} \left| \frac{k}{s} \right|, \quad \gamma_0 = \gamma_3^* + \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{|sk|}{2} + \frac{2\gamma_1^*}{k^2 - \lambda_1^2} \left| \frac{\lambda_1}{s} \right| - \frac{2\gamma_2^*}{k^2 - \lambda_2^2} \left| \frac{\lambda_2}{s} \right|,$$

$$\begin{aligned} \gamma_j^* = & \frac{1}{2|sk|\mu_1} \left(\left(s^2 \left(\frac{\mu_2}{\mu^+} - 1 \right) (1 - \lambda_j^2) + s_y^2 (1 - \mu_3) \right) \alpha_j + \right. \\ & \left. + \left(s^2 (\mu_2 - \mu_1) \lambda_j^2 + s_x^2 (1 - \mu_2) + s_y^2 \frac{\mu_2}{\mu^-} \right) \beta_j \right), \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3^* = & \frac{E}{2|sk|(1-\nu)\mu_1} \left(\left(1 - \frac{\mu_2}{\mu^+} \right) s^2 \alpha + \right. \\ & \left. + s^2 (\mu_2 - \mu_1) \left(\left(1 + 2\nu' \frac{E}{E'} - 2(1+\nu)\alpha_1 \right) \alpha + \alpha' \right) - \right. \\ & \left. - 2\alpha \left(s_x^2 (1 - \mu_2) + s_y^2 \frac{\mu_2}{\mu^-} \right) - \mu_1 \frac{1-\nu}{1+\nu} (s^2 \alpha + s_y^2 \alpha') \right). \end{aligned}$$

Взявши до уваги вирази (5), (9), (11) і (13), нескладно знайти

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx}(z) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T}(\xi) \left((\beta_2 - \alpha_2 - \gamma_2) \exp(-|s\lambda_2||z-\xi|) - \right. \\ & \left. - (\beta_1 - \alpha_1 - \gamma_1) \exp(-|s\lambda_1||z-\xi|) - \right. \\ & \left. - \gamma_0 \exp(-|sk||z-\xi|) \right) d\xi - \frac{\alpha E}{1-\nu} \bar{T}(z). \end{aligned} \quad (14)$$

Четверте з рівнянь (4) у просторі зображень перетворення (6) за циклічної перестановки індексів $\begin{matrix} \nearrow y \\ x \leftarrow z \end{matrix}$ запишемо у вигляді трьох рівнянь:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xy} = & -\frac{1}{2s_x s_y} \left(s_x^2 \bar{\sigma}_{xx} + s_y^2 \bar{\sigma}_{yy} + \frac{d^2 \bar{\sigma}_{zz}}{dz^2} \right), \\ \frac{d\bar{\sigma}_{yz}}{dz} = & \frac{i}{2s_y} \left(s_x^2 \bar{\sigma}_{xx} - s_y^2 \bar{\sigma}_{yy} + \frac{d^2 \bar{\sigma}_{zz}}{dz^2} \right), \quad x \rightleftharpoons y. \end{aligned} \quad (15)$$

Розв'язки рівнянь (15), які нескладно знайти з урахуванням виразів для нормальних напружень (9), (13), (14), наведено у **Додатку 1**.

Знайшовши у такий спосіб розв'язок задачі (1)–(3) у просторі зображень перетворення (6), визначимо напруження у фізичній області за допомогою оберненого перетворення Фур'є

$$f(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(z) \exp(i(xs_x + ys_y)) ds_x ds_y. \quad (16)$$

Якщо коефіцієнти (8) задовольняють співвідношення $a_1^2 = a_2 = a^4$, то обмежений у нескінченно віддалених точках розв'язок рівняння (7) знайдемо у вигляді

$$\bar{\sigma}_{zz}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T}(\xi) (\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 |sa||z-\xi|) \exp(-|sa||z-\xi|) d\xi, \quad (17)$$

де

$$\tilde{\alpha}_j = \frac{G}{2(1-\nu)a^2} \left| \frac{s}{a} \right| \left(\left((-1)^j a^2 (1+\nu) - \nu' \frac{E}{E'} \right) \alpha - \alpha' \right), \quad j = 1, 2.$$

З урахуванням (17) знайдемо сумарні напруження зі співвідношення (10):

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(z) = & -\frac{2\alpha E}{1-\nu} \bar{T}(z) + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T}(\xi) (\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2 |sa||z-\xi|) \exp(-|sa||z-\xi|) d\xi, \end{aligned} \quad (18)$$

де

$$\tilde{\beta}_j = \left(1 + \nu' \frac{E}{E'} - (1+\nu)a^2 \right) \tilde{\alpha}_j + 2(1+\nu)a^2 \tilde{\alpha}_2 \delta_{1j}, \quad j = 1, 2,$$

δ_{1j} – символ Кронекера.

Знайшовши напруження (17), (18), розв'язок рівняння (12) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{yy}(z) = & -\frac{\alpha E}{1-\nu} \bar{T}(z) + \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T}(\xi) \left((\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 |sa||z-\xi|) \times \right. \\ & \left. \times \exp(-|sa||z-\xi|) + \tilde{\gamma}_0 \exp(-|sk||z-\xi|) \right) d\xi, \end{aligned} \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_0 = & \tilde{\gamma}_3^* + \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{|sk|}{2} - \frac{2\tilde{\gamma}_1^*}{k^2 - a^2} \left| \frac{a}{s} \right| + \frac{2|sa|(k^2 + a^2)\tilde{\gamma}_2^*}{s^2(k^2 - a^2)^2}, \\ \tilde{\gamma}_j = & \frac{2}{k^2 - a^2} \left(\tilde{\gamma}_j^* - \frac{2a^2\tilde{\gamma}_2^*}{k^2 - a^2} \delta_{1j} \right) \left| \frac{k}{s} \right|, \\ \tilde{\gamma}_j^* = & \frac{1}{2|sk|\mu_1} \left(\left(s^2 \left(\frac{\mu_2}{\mu^+} - 1 \right) (1 - a^2) + s_y^2 (1 - \mu_3) \right) \tilde{\alpha}_j + \right. \\ & + \left(s^2 (\mu_2 - \mu_1) a^2 + s_x^2 (1 - \mu_2) + s_y^2 \frac{\mu_2}{\mu^-} \right) \tilde{\beta}_j + \\ & \left. + 2s^2 a^2 \left(\tilde{\alpha}_2 \frac{\mu_2 - \mu^+}{\mu^+} + \tilde{\beta}_2 (\mu_1 - \mu_2) \right) \delta_{1j} \right), \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

а вираз для $\tilde{\gamma}_3^*$ отримуємо з γ_3^* заміною a_1 на a^2 . З використанням (5), (17)–(19) знаходимо

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx}(z) = & -\frac{\alpha E}{1-\nu} \bar{T}(z) + \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T}(\xi) \left(\left(\tilde{\beta}_1 - \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\gamma}_1 + \right. \right. \\ & \left. \left. + (\tilde{\beta}_2 - \tilde{\alpha}_2 - \tilde{\gamma}_2) |sa||z-\xi| \right) \exp(-|sa||z-\xi|) - \right. \\ & \left. - \tilde{\gamma}_0 \exp(-|sk||z-\xi|) \right) d\xi. \end{aligned} \quad (20)$$

Розв'язки рівнянь (15) з урахуванням (17), (19), (20) подано у **Додатку 2**.

Знайшовши розв'язок задачі (1)–(3) у просторі зображень перетворення Фур'є (6), коли коефіцієнти (8) задовольняють умову $a_1^2 = a_2$, визначимо напруження у фізичній області за допомогою оберненого перетворення (16).

Стационарне температурне поле, яке спричинює термонапружений стан ТІ простору, визначимо з рівняння теплопровідності

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \lambda' \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -Q \quad (21)$$

за умови згасання густини локального розподілу внутрішніх джерел тепла $Q(x, y, z)$ та шуканої температури $T(x, y, z)$ у безмежно віддалених точках. Тут λ , λ' – коефіцієнти теплопровідності відповідно у площині ізотропії та у перпендикулярному до неї напрямку. Розв'язок рівняння (21) у просторі інтегрального перетворення (6) нескладно знайти у вигляді

$$\bar{T}(z) = \frac{1}{2|s\alpha|} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{q}(\zeta) \exp(-|s\alpha||z - \zeta|) d\zeta, \quad (22)$$

де $\alpha^2 = \lambda/\lambda'$, $\bar{q} = \bar{Q}/\lambda'$. Як і для напружень, розподіл температури у фізичній області знайдемо, застосувавши до (22) обернене перетворення (16).

3. Числовий приклад та обговорення. Визначимо розподіли температури та термонапружень у ТІ просторі за дії зосередженого джерела тепла $Q = q_0 \delta(x) \delta(y) \delta(z)$, де $q_0 = \text{const}$, $[q_0] = \text{Вт/м}$, $\delta(\xi)$ – дельта-функція Дірака, $\xi = \{x, y, z\}$. У цьому випадку розв'язок (22) має вигляд

$$\bar{T}(z) = \frac{q_0}{2|s|\sqrt{\lambda\lambda'}} \exp(-|s\alpha z|). \quad (23)$$

Застосувавши до (23) обернене перетворення (16), знайдемо

$$T(x, y, z) = \frac{q_0}{4\pi\sqrt{\lambda\lambda'}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + \alpha^2 z^2}}. \quad (24)$$

Температурне поле (24) є симетричним відносно осі Oz , необмеженим у початку координат і в площині $z = 0$ на осях Ox та Oy визначається виразами $T(x, 0, 0) = q_0/(4\pi|x|\sqrt{\lambda\lambda'})$ та $T(0, y, 0) = q_0/(4\pi|y|\sqrt{\lambda\lambda'})$, які залежать від коефіцієнтів λ , λ' . При $x = y = 0$ температурне поле визначається виразом $T(0, 0, z) = q_0/(4\pi\lambda|z|)$, який залежить лише від λ . У випадку ізотропного матеріалу з (24) впливає класичний центрально-симетричний розв'язок Новацького [7]:

$$T(x, y, z) = q_0 / (4\pi\lambda\sqrt{R}), \quad R = x^2 + y^2 + z^2.$$

Для розрахунку термонапружень слід підставити (23) у вирази для нормальних напружень (9), (13), (14) або (17), (19), (20) та дотичних напружень, наведених у **Додатках 1, 2**. Після цього потрібно застосувати до отриманих виразів обернене перетворення (16). У результаті, наприклад, на основі формули (9), напруження σ_{zz} знайдемо у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(x, y, z) = & \frac{q_0}{2\pi\lambda'} \left(\frac{\alpha_{20}}{(\alpha^2 - \lambda_2^2)\sqrt{x^2 + y^2 + \lambda_2^2 z^2}} - \right. \\ & \left. - \frac{\alpha_{10}}{(\alpha^2 - \lambda_1^2)\sqrt{x^2 + y^2 + \lambda_1^2 z^2}} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{|\alpha|} \left(\frac{\alpha_{10}|\lambda_1|}{\alpha^2 - \lambda_1^2} - \frac{\alpha_{20}|\lambda_2|}{\alpha^2 - \lambda_2^2} \right) \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + \alpha^2 z^2}} \right), \quad (25) \end{aligned}$$

де

$$\alpha_{j0} = \frac{G}{(1 - \nu)|\lambda_j|(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left(\left((1 + \nu)\lambda_j^2 - \nu' \frac{E}{E'} \right) \alpha - \alpha' \right), \quad j = 1, 2.$$

Таблиця 1. Характеристики гексагонального цинку [20].

Модулі пружності та зсуву ($\times 10^{11}$ Нм $^{-2}$)				Коефіцієнти Пуассона	
E	E'	G	G'	ν	ν'
13.56	5.04	5.60	3.85	0.21	0.17
Коефіцієнти лінійного температурного розширення ($\times 10^{-6}$ К $^{-1}$)			Коефіцієнти теплопровідності (ВтК $^{-1}$ м $^{-1}$)		
α	α'		λ	λ'	
5.818	15.350		124	124	

Вплив трансверсальної ізотропії на безрозмірні термонапруження $\tilde{\sigma}_{zz} = (1 - \nu)\lambda\sigma_{zz} / (\alpha E q_0)$, розраховані за формулою (25) у півпросторі з властивостями гексагонального цинку (табл. 1) за розподілу температурного поля (24), проілюстровано на рис. 1. На рис. 1а наведено розподіли цих напружень за координатою z , де крива 1 відповідає напруженням при $x = y = 0$; крива 2 – при $x = 0, y = 0.1$; крива 3 – при $x = y = 0.1$. Внаслідок симетрії напружень (25) за координатами x, y крива 2 також відповідає випадку $x = 0.1, y = 0$. На рис. 1б наведено розподіли $\tilde{\sigma}_{zz}$ за координатою y , де крива 1 відповідає напруженням при $x = z = 0$; крива 2 – при $x = 0, z = 0.1$; крива 3 – при $x = 0.1, z = 0$; крива 4 – при $x = z = 0.1$. Напруження $\tilde{\sigma}_{zz}$ є стискувальними і мають локальний розподіл, що швидко згасає з віддаленням від джерела тепла, причому, порівнюючи криві 1 на рис. 1а та 1б, робимо висновок, що згасання на осі Oz є повільнішим, ніж уздовж осей Ox та Oy у площині ізотропії.

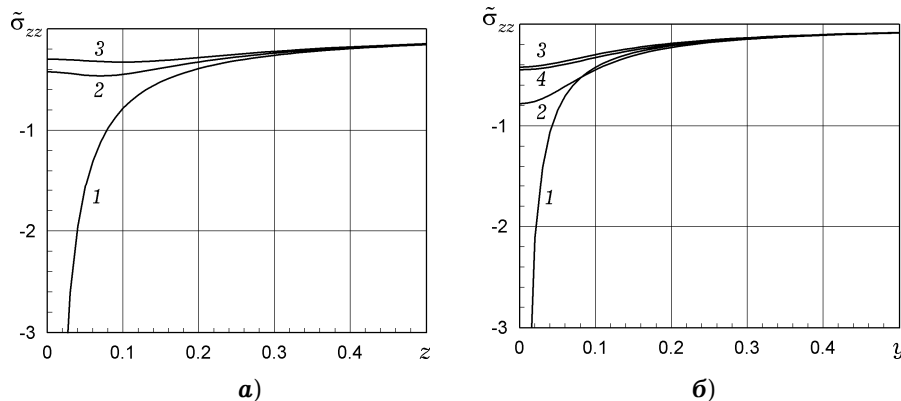


Рис. 1

Висновки. Побудовано аналітичні розв'язки тривимірних задач теплопровідності та термопружності для ТІ простору з внутрішніми стаціонарними локально розподіленими джерелами тепла. За допомогою методу безпосереднього інтегрування задачу термопружності зведено до розв'язання ключових рівнянь для окремих компонент тензора напружень. Отримані рівняння розв'язано за допомогою подвійного інтегрального перетворення Фур'є. Проаналізовано різні форми розв'язків ключових рівнянь залежно від співвідношення між пружними модулями. Побудовані розв'язки є зручними для аналізу та числової реалізації, а також є потенційно привабливими для перевірки аналітичних або чисельних методів, розроблених для аналізу ТІ твердих тіл.

Додаток 1. Дотичні напруження у просторі інтегрального перетворення (6), визначені з рівнянь (15):

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{xy}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T}(\xi) \left(\gamma_2^{xy} \exp(-|s\lambda_2||z-\xi|) - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_1^{xy} \exp(-|s\lambda_1||z-\xi|) + \frac{s_x^2 - s_y^2}{2s_x s_y} \gamma_0 \exp(-|sk||z-\xi|) \right) d\xi, \\ \bar{\sigma}_{yz}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T}(\xi) \left(\gamma_1^{yz} \exp(-|s\lambda_1||z-\xi|) - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_2^{yz} \exp(-|s\lambda_2||z-\xi|) + \frac{i\gamma_0}{2s_y} \left| \frac{s}{k} \right| \exp(-|sk||z-\xi|) + \gamma_0^{yz} \right) \operatorname{sgn}(z-\xi) d\xi, \\ \bar{\sigma}_{xz}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T}(\xi) \left(\gamma_1^{xz} \exp(-|s\lambda_1||z-\xi|) - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_2^{xz} \exp(-|s\lambda_2||z-\xi|) - \frac{i\gamma_0}{2s_x} \left| \frac{s}{k} \right| \exp(-|sk||z-\xi|) + \gamma_0^{xz} \right) \operatorname{sgn}(z-\xi) d\xi.\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}\gamma_j^{xy} &= \frac{1}{2s_x s_y} \left((s_x^2 - s^2 \lambda_j^2) \alpha_j + (s_x^2 - s_y^2) \gamma_j - s_x^2 \beta_j \right), \\ \gamma_j^{yz} &= \frac{i}{2s_y |s\lambda_j|} \left(s_x^2 \beta_j - s^2 \gamma_j - (s_x^2 - s^2 \lambda_j^2) \alpha_j \right), \\ \gamma_j^{xz} &= \frac{i}{2s_x |s\lambda_j|} \left(-s_x^2 \beta_j + s^2 \gamma_j + (s_x^2 + s^2 \lambda_j^2) \alpha_j \right), \quad j = 1, 2, \\ \gamma_0^{yz} &= \frac{\gamma_2^{yz}}{|s\lambda_2|} - \frac{\gamma_1^{yz}}{|s\lambda_1|} + \frac{is_y}{2} \frac{\alpha E}{1-\nu} - \frac{i\gamma_0}{2s_y} \left| \frac{s}{k} \right|, \\ \gamma_0^{xz} &= \frac{\gamma_2^{xz}}{|s\lambda_2|} - \frac{\gamma_1^{xz}}{|s\lambda_1|} + \frac{is_x}{2} \frac{\alpha E}{1-\nu} + \frac{i\gamma_0}{2s_x} \left| \frac{s}{k} \right|.\end{aligned}$$

Додаток 2. Дотичні напруження у просторі інтегрального перетворення (6), визначені з рівнянь (15) у випадку $a_1^2 = a_2^2$:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{xy}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T}(\xi) \left((\tilde{\gamma}_1^{xy} + \tilde{\gamma}_2^{xy} |sa||z-\xi|) \exp(-|sa||z-\xi|) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s_x^2 - s_y^2}{2s_x s_y} \tilde{\gamma}_0 \exp(-|sk||z-\xi|) \right) d\xi, \\ \bar{\sigma}_{yz}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T}(\xi) \left(\left(\tilde{\gamma}_0^{yz} - (\tilde{\gamma}_1^{yz} + \tilde{\gamma}_2^{yz}) \exp(-|sa||z-\xi|) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{i}{2s_y} \left| \frac{s}{k} \right| \tilde{\gamma}_0 \exp(-|sk||z-\xi|) \right) \operatorname{sgn}(z-\xi) - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\gamma}_2^{yz} |sa||z-\xi| \exp(-|sa||z-\xi|) \right) d\xi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xz}(z) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{T}(\xi) \left(\left(\tilde{\gamma}_0^{xz} - (\tilde{\gamma}_1^{xz} + \tilde{\gamma}_2^{xz}) \exp(-|sa||z - \xi|) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{i}{2s_x} \left| \frac{s}{k} \right| \tilde{\gamma}_0 \exp(-|sk||z - \xi|) \right) \operatorname{sgn}(z - \xi) - \right. \\ & \left. - \tilde{\gamma}_2^{xz} |sa||z - \xi| \exp(-|sa||z - \xi|) \right) d\xi. \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_j^{xy} &= \frac{1}{2s_x s_y} \left((s_x^2 - s^2 a^2) \tilde{\alpha}_j + (s_x^2 - s_y^2) \tilde{\gamma}_j - s_x^2 \tilde{\beta}_j + 2s^2 a^2 \tilde{\alpha}_2 \delta_{1j} \right), \\ \tilde{\gamma}_j^{yz} &= \frac{1}{2s_y |sa|} \left(s_x^2 \tilde{\beta}_j - s^2 \tilde{\gamma}_j - (s_x^2 - s^2 a^2) \tilde{\alpha}_j - 2s^2 a^2 \tilde{\alpha}_2 \delta_{1j} \right), \\ \tilde{\gamma}_j^{xz} &= \frac{1}{2s_x |sa|} \left(-s_x^2 \tilde{\beta}_j + s^2 \tilde{\gamma}_j + (s_x^2 + s^2 a^2) \tilde{\alpha}_j - 2s^2 a^2 \tilde{\alpha}_2 \delta_{1j} \right), \quad j = 1, 2, \\ \tilde{\gamma}_0^{yz} &= \frac{\tilde{\gamma}_2^{yz} + \tilde{\gamma}_1^{yz}}{|sa|} + \frac{is_y}{2} \frac{\alpha E}{1 - \nu} - \frac{i\tilde{\gamma}_0}{2s_y} \left| \frac{s}{k} \right|, \\ \tilde{\gamma}_0^{xz} &= \frac{\tilde{\gamma}_2^{xz} + \tilde{\gamma}_1^{xz}}{|sa|} + \frac{is_x}{2} \frac{\alpha E}{1 - \nu} + \frac{i\tilde{\gamma}_0}{2s_x} \left| \frac{s}{k} \right|. \end{aligned}$$

1. Александров А. Я., Вольперт В. С. Решение пространственных задач теории упругости для трансверсально-изотропного тела вращения при помощи аналитических функций // Инж. журн. Механика твердого тела. – 1967. – № 5. – С. 84–91.
2. Калиняк Б. М., Токовий Ю. В., Ясинський А. В. Прямі та обернені задачі термомеханіки стосовно оптимізації та ідентифікації термонапруженого стану деформованих твердих тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – № 3. – С. 28–42.
Te same: Kalynyak B. M., Tokovyy Yu. V., Yasinskyi A. V. Direct and inverse problems of thermomechanics concerning the optimization and identification of the thermal stressed state of deformed solids // J. Math. Sci. – 2019. – **236**, No. 1. – P. 21–34. – <https://doi.org/10.1007/s10958-018-4095-3>.
3. Лехницький С. Г. К вопросу о влиянии сосредоточенных сил на распределение напряжений в анизотропной упругой среде // Прикл. математика и механика. – 1936. – **3**, № 1. – С. 56–69.
4. Лехницький С. Г. Симметричная деформация и кручение тела вращения с анизотропией частного вида // Прикл. математика и механика. – 1940. – **4**, № 3. – С. 43–60.
5. Лехницький С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
6. Неміш Ю. Н. Развитие аналитических методов в трехмерных задачах статики анизотропных тел (обзор) // Прикл. механика. – 2000. – **36**, № 2. – С. 3–38.
Te same: Nemish Yu. N. Development of analytical methods in three-dimensional problems of the statics of anisotropic bodies (Review) // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, No. 2. – P. 135–172. – <https://doi.org/10.1007/BF02681992>.
7. Новацкий В. Вопросы термоупругости. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
8. Подільчук Ю. Н. Точные аналитические решения пространственных граничных задач статики трансверсально-изотропного тела канонической формы (обзор) // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 10. – С. 3–30.
Te same: Podil'chuk Yu. N. Exact analytic solutions of three-dimensional boundary-value problems of the statics of a transversely isotropic body of canonical form (Survey) // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, No. 10. – P. 763–787. – <https://doi.org/10.1007/BF02719255>.

9. *Подильчук Ю. Н., Ткаченко В. Ф.* Напряженное состояние трансверсально-изотропного полупространства в случае плоского эллиптического штампа, находящегося под действием силы и моментов // Прикл. механика. – 1995. – **31**, № 10. – С. 34–40.
Te same: *Podil'chuk Yu. N., Tkachenko V. F.* Stressed state of a transversally isotropic half-space in the case of a flat elliptical die with forces and moments acting on it // Int. Appl. Mech. – 1995. – **31**, No. 10. – P. 806–811.
– <https://doi.org/10.1007/BF00846880>.
10. *Черных К. Ф.* Введение в анизотропную упругость. – Москва: Наука, 1988. – 192 с.
11. *Шалдырван В. А.* Некоторые результаты и проблемы трехмерной теории пластин (Обзор) // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 2. – С. 45–69.
Te same: *Shaldyrvan V. A.* Some results and problems in the three-dimensional theory of plates (Review) // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No. 2. – P. 160–181.
– <https://doi.org/10.1007/s10778-007-0014-x>.
12. *Brigham E. O.* The fast Fourier transform and its applications. – New York: Prentice-Hall Inc., 1988. – 448 p.
13. *Chen W. Q.* Some recent advances in 3D crack and contact analysis of elastic solids with transverse isotropy and multifield coupling // Acta Mech. Sin. – 2015. – **31**, No. 5. – P. 601–626.
– <https://doi.org/10.1007/s10409-015-0509-3>.
14. *Chen W. Q., Zhu J., Li X. Y.* General solutions for elasticity of transversely isotropic materials with thermal and other effects: A review // J. Therm. Stresses. – 2019. – **42**, No. 1. – P. 90–106. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2018.1527736>.
15. *Chowdhury K. L.* Axisymmetric temperature distributions in transversely isotropic semi-infinite solid // J. Therm. Stresses. – 2000. – **23**, No. 4. – P. 353–370.
– <https://doi.org/10.1080/014957300280362>.
16. *Christensen R. M., Zywicz E.* A three-dimensional constitutive theory for fiber composite laminated media // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1990. – **57**, No. 4. – P. 948–955. – <https://doi.org/10.1115/1.2897666>.
17. *Ding H., Chen W., Zhang L.* Elasticity of transversely isotropic materials. – Dordrecht: Springer, 2006. – xii+435 p.
18. *Elliott H. A.* Three-dimensional stress distributions in hexagonal aeolotropic crystals // Math. Proc. Cambridge. – 1948. – **44**, No. 4. – P. 522–533.
– <https://doi.org/10.1017/S0305004100024531>.
19. *Eubanks R. A., Sternberg E.* On the axisymmetric problems elasticity theory for a medium with transverse isotropy // J. Rational Mech. Anal. – 1954. – **3**, No. 1. – P. 89–101. – <https://doi.org/10.1512/iumj.1954.3.53006>.
20. *Hou P.-F., Leung A. Y. T., Chen C.-P.* Fundamental solution for transversely isotropic thermoelastic materials // Int. J. Solids Struct. – 2008. – **45**, No. 2. – P. 392–408. – <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.08.024>.
21. *Hou P.-F., Leung A. Y. T., He Y.-J.* Three-dimensional Green's functions for transversely isotropic thermoelastic bimetals // Int. J. Solids Struct. – 2008. – **45**, No 24. – P. 6100–6113.
– <http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.07.022>.
22. *Hou P.-F., Luo W., Leung A. Y. T.* A point heat source on the surface of a semi-infinite transversely isotropic piezothermoelastic material // Trans ASME. J. Appl. Mech. – 2008. – **75**, No. 1. – P. 011013 (8 pages).
– <https://doi.org/10.1115/1.2745402>.
23. *Hu H. C.* On the three-dimensional problems of the theory of elasticity of a transversely isotropic body // Acta Phys. Sin. – 1953. – **9**, No. 2. – P. 130–148.
24. *Liu G. R., Tani J., Watanabe K., Ohyoshi T.* Lamb wave propagation in anisotropic laminates // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1990. – **57**, No. 4. – P. 923–929.
– <https://doi.org/10.1115/1.2897662>.
25. *Lodge A. S.* The transformation to isotropic form of the equilibrium equations for a class of anisotropic elastic solids // Quart. J. Mech. Appl. Math. – 1955. – **8**, No. 2. – P. 211–225. – <https://doi.org/10.1093/qjmam/8.2.211>.
26. *Mantič V.* Mathematical methods and models in composites. – London: Imperial College Press, 2014. –xiv+506 p. – Ser. Computational and experimental methods in structures / Aliabadi F. M. H. (ed.): In 11 vol. – Vol. 5.
27. *Nowacki W.* The stress function in three-dimensional problems concerning an elastic body characterized by transverse isotropy // Bull. Pol. Acad. Sci. Sér. Sci. Tech. – 1954. – **2**. – P. 21–25.

28. Pan E., Yuan F. G. Three-dimensional Green's functions in anisotropic bimetals // *Int. J. Solids Struct.* – 2000. – **37**, No. 38. – P. 5329–5351. – [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(99\)00216-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00216-4).
29. Pasternak I., Pasternak R., Sulym H. A comprehensive study on Green's functions and boundary integral equations for 3D anisotropic thermomagnetoelasticity // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2016. – **64**. – P. 222–229. – <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.12.004>.
30. Távara L., Mantič V., Ortiz J. E., París F. Unique real-variable expressions of the integral kernels in the Somigliana stress identity covering all transversely isotropic elastic materials for 3D BEM // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* – 2012. – **225-228**. – P. 128–141. – <https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.03.014>.
31. Tokovyy Yu. V. Direct integration method // In: *Encyclopedia of Thermal Stresses* / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 951–960. – https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_621.
32. Tokovyy Yu. V., Ma C.-C. Three-dimensional elastic analysis of transversely-isotropic composites // *Journal of Mechanics.* – 2017. – **33**, No. 6. – P. 821–830. – <https://doi.org/10.1017/jmech.2017.91>.
33. Wang M. Z., Wang W. Completeness and nonuniqueness of general solutions of transversely isotropic elasticity // *Int. J. Solids Struct.* – 1995. – **32**, No. 3–4. – P. 501–513. – [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(94\)00114-C](https://doi.org/10.1016/0020-7683(94)00114-C).
34. Wang M. Z., Xu B. X., Gao C. F. Recent general solutions in linear elasticity and their applications // *Appl. Mech. Rev.* – 2008. – **61**, No. 3. – P. 030803-1–20. – <https://doi.org/10.1115/1.2909607>.
35. Wang W., Shi M. X. On the general solutions of transversely isotropic elasticity // *Int. J. Solids Struct.* – 1998. – **35**, No. 25– P. 3283–3297. – [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00229-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00229-1).
36. Xie L., Zhang C., Sladek J., Sladek V. Unified analytical expressions of the three-dimensional fundamental solutions and their derivatives for linear elastic anisotropic materials // *Proc. Royal Soc. A.* – 2016. – **472**, No. 2186. – Article ID: 20150272. – <https://doi.org/10.1098/rspa.2015.0272>.

РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

Построено аналитическое решение трехмерной задачи термоупругости для трансверсально-изотропного пространства с внутренними стационарными источниками тепла. С использованием метода непосредственного интегрирования задача сведена к системе ключевых уравнений для компонент тензора напряжений, которая решена при помощи двойного интегрального преобразования Фурье.

Ключевые слова: трансверсально-изотропное упругое пространство, трехмерная задача термоупругости, аналитическое решение, двойное интегральное преобразование Фурье, метод непосредственного интегрирования.

SOLUTION OF A THREE-DIMENSIONAL THERMOELASTICITY PROBLEM FOR AN UNBOUNDED TRANSVERSELY ISOTROPIC SOLID

An analytical solution is constructed to a three-dimensional thermoelasticity problem for a transversely isotropic space with internal steady-state heat sources. By making use of the direct integration method, the problem is reduced to a system of governing equations for the components of the stress tensor, which then is solved by means of the double-integral Fourier transform.

Key words: transversely isotropic elastic space, three-dimensional thermoelasticity problem, analytical solution, double-integral Fourier transform, direct integration method.