

## ДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ТРЕХМЕРНЫМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ ТЕЧЕНИЕМ ГАЗА

*Для исследования взаимодействия колеблющейся пологой оболочки с трехмерным дозвуковым течением газа получена система гиперсингулярных интегральных уравнений относительно аэродинамических производных перепада давления. Такая система уравнений удобна для решения задач аэроупругости. Система гиперсингулярных интегральных уравнений решена численным методом, который основан на методе дискретных вихрей. Для моделирования колебаний пологой оболочки получена система обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода заданных форм. Численно исследована динамическая неустойчивость состояния равновесия пологой оболочки в дозвуковом газовом течении.*

**Ключевые слова:** гиперсингулярные интегральные уравнения, динамическая неустойчивость оболочек, течение газа.

**Введение.** Многие машины и технические системы содержат пологие оболочки, которые с двух сторон обтекаются газовым течением. Такие системы широко применяются в энергетике, в аэрокосмических системах и морском транспорте. При взаимодействии пологих оболочек с газовым течением может возникать динамическая неустойчивость, которая часто приводит к потере работоспособности конструкции вследствие флаттера. К сожалению, в большинстве публикаций исследуется двухстороннее взаимодействие пластин с газовым потоком. Плогие оболочки, взаимодействующие с газовым потоком, практически не исследовались. Приведем некоторые исследования взаимодействия колеблющихся пластин с газовым потоком. Гиперсингулярные интегральные уравнения для давления, действующего на пластинку, выведены Е. Albano, W. P. Rodden [5]. J. Katz [10] исследовал аэродинамику крыла с помощью метода дискретных вихрей. L. Morino, С.-С. Kuot [13] получили интегро-дифференциальные уравнения, описывающие взаимодействие пластины со сжимаемым газовым потоком. В статье [7] предложена численная процедура для решения сингулярных интегральных уравнений для плотности циркуляции. Подход к численному расчету плотности циркуляции потока при обтекании трехмерного тела представлен в [11]. В [9] рассматривается обтекание крыла под произвольным углом атаки. В статье [12] рассмотрен метод расчета обтекания профиля несжимаемым потоком. В [1] получена система гиперсингулярных интегральных уравнений, описывающая взаимодействие газового течения с колеблющейся пластинкой. В [3] исследованы автоколебания, возникающие при взаимодействии пластинки с газовым течением. В [6] рассмотрены хаотические автоколебания, возникающие при взаимодействии пластинки с потенциальным течением.

В этой статье выведена система гиперсингулярных интегральных уравнений, описывающая взаимодействие пологой оболочки с потенциальным, несжимаемым, идеальным трехмерным газовым потоком. Такая система уравнений чрезвычайно эффективна для решения задач аэроупругости. Для решения полученной системы сингулярных интегральных уравнений предложен численный подход, основанный на методе дискретных вихрей. Исследована динамическая неустойчивость пологих оболочек.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается обтекание дозвуковым газовым течением цилиндрической панели, изображенной на рис. 1. Оболочка имеет

---

\* kvavr@kharkov.ua

постоянную толщину. Так как оболочка тонкая, то сдвигом и инерцией вращения можно пренебречь. Напряжения и деформации удовлетворяют закону Гука. Вдоль криволинейной координаты  $\theta$  длина панели  $a$ , а вдоль оси  $y$  ее длина  $b$ . Радиусы кривизн координатных линий  $\theta$  и  $y$  предполагаются постоянными и равными соответственно  $R_1$  и  $\infty$ . Перемещения точек срединной поверхности оболочки вдоль координатных осей  $\theta$ ,  $y$ ,  $z$  обозначим  $u(\theta, y, t)$ ,  $v(\theta, y, t)$ ,  $w(\theta, y, t)$  соответственно. Перемещения и деформации предполагаются малыми. Они связаны между собой соотношениями

$$\varepsilon_{x,0} = \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_{y,0} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy,0} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta},$$

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \quad k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad k_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial \theta}.$$

Потенциальную энергию деформации оболочки  $U_s$  и кинетическую энергию  $T_s$  представим в виде

$$U_s = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^a \int_0^b \left( \varepsilon_{x,0}^2 + \varepsilon_{y,0}^2 + 2\nu \varepsilon_{x,0} \varepsilon_{y,0} + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy,0}^2 \right) d\theta dy +$$

$$+ \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left( k_x^2 + k_y^2 + 2\nu k_x k_y + \frac{1-\nu}{2} k_{xy}^2 \right) d\theta dy +$$

$$+ \frac{D}{R_1} \int_0^a \int_0^b \left( \varepsilon_{x,0} k_x + \varepsilon_{y,0} k_y + \nu \varepsilon_{x,0} k_y + \nu \varepsilon_{y,0} k_x + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy,0} k_{xy} \right) d\theta dy, \quad (2)$$

$$T_s = \frac{1}{2} \rho_s h \int_0^a \int_0^b (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) d\theta dy, \quad (3)$$

где  $h$  – толщина оболочки;  $E$ ,  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона;  $D$  – цилиндрическая жесткость;  $\rho_s$  – плотность материала оболочки. Для вывода уравнений движений оболочки с конечным числом степеней свободы применим метод заданных форм [11]. Колебания оболочки разложим по собственным формам линейных колебаний:

$$w = \sum_{i=\tilde{N}}^{\tilde{N}+N_w} q_{i-\tilde{N}+1}^{(w)}(t) W_i(\theta, y), \quad u = \sum_{i=\tilde{N}}^{\tilde{N}+N_w} q_{i-\tilde{N}+1}^{(u)}(t) U_i(\theta, y),$$

$$v = \sum_{i=\tilde{N}}^{\tilde{N}+N_w} q_{i-\tilde{N}+1}^{(v)}(t) V_i(\theta, y), \quad (4)$$

где  $U_i$ ,  $V_i$ ,  $W_i$  – собственные формы колебаний оболочки;  $\mathbf{q}^{(v)} = [q_1^{(v)}, \dots, q_{N_w}^{(v)}]$ ,  $v = \{u, v, w\}$ , – векторы обобщенных координат конструкции. Большинство установившихся колебаний тонкостенных конструкций в газовом течении близко к моногармоническому [6]:

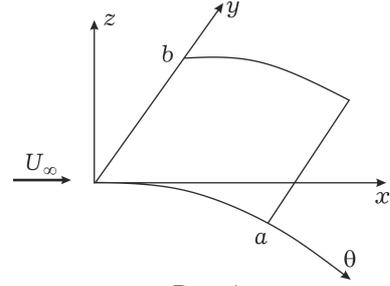


Рис. 1

$$q_j^{(w)}(t) \approx \gamma_j \cos(\omega t) + \delta_j \sin(\omega t), \quad j = 1, \dots, N_w.$$

Пусть оболочку обтекает трехмерный газовый поток. Течение предполагается потенциальным, идеальным и несжимаемым. На значительном удалении от оболочки поток параллелен оси  $x$  и движется с постоянной скоростью  $U_\infty$ . Вблизи оболочки наблюдаются возмущения в потоке, описываемые проекциями скоростей на оси  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ :

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= U_\infty + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \tilde{v} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tilde{w} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned}$$

где  $\varphi$  – потенциал скоростей. Потенциал скоростей  $\varphi$  и давление  $p(x, y, z, t)$  удовлетворяют уравнения Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad \nabla^2 p = 0. \quad (4)$$

На бесконечном удалении от оболочки выполняется условие равенства нулю проекций скоростей возмущенного потока

$$\lim_{x^2+y^2+z^2 \rightarrow \infty} \text{grad } \varphi = 0. \quad (5)$$

Перепад давления  $\Delta p(x, y, t) = p(x, y, 0^+) - p(x, y, 0^-)$  равен нулю на границе оболочки  $\partial S$ :

$$\Delta p|_{\partial S} = 0.$$

Рассмотрим условие непротекания, которое выражает равенство скоростей поверхностей оболочки и скоростей потока, соприкасающегося с оболочкой. Если оболочка находится в состоянии покоя, то ее срединная поверхность описывается функцией  $z = R(x, y)$ . Если оболочка совершает колебания, то уравнение срединной поверхности опишем функцией  $F(x, y, z, t) = z - f(x, y, t) = 0$ . Пусть  $f(x, y, t) = R(x, y) + w(\theta, y, t)$ . Тогда условие непротекания представим в виде

$$(\text{grad } F, \mathbf{V}) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad (6)$$

где  $\mathbf{V}$  – вектор скорости газа на поверхности оболочки;  $(\text{grad } F, \mathbf{V})$  – скалярное произведение. Граничное условие (6) можно представить в виде

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=f(x,y,t)} = U_\infty \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Используя свойства функции  $R(x, y)$ , условие непротекания запишем как

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=R(x,y)} = U_\infty \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (7)$$

Таким образом, определены все граничные условия для решения уравнений (4).

**2. Сингулярные интегральные уравнения.** Выведем систему сингулярных интегральных уравнений, описывающую обтекание пологих оболочек дозвуковым газовым потоком. Аналогичная система сингулярных интегральных уравнений, описывающая обтекание пластинки газовым потоком, получена в статье [1].

Давление и потенциал скоростей удовлетворяют уравнению Бернулли

$$p(x, y, z) = -\rho_\infty \left( \frac{\partial \varphi(x, y, z, t)}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \varphi(x, y, z, t)}{\partial x} \right),$$

где  $\rho_\infty$  – плотность газа. Потенциал скоростей и функцию давления при колебаниях оболочки представим в виде линейной функции относительно обобщенных координат и обобщенных скоростей конструкции. Согласно [4], коэффициенты при обобщенных координатах и скоростях в выражениях

для  $\varphi(x, y, z, t)$ ,  $p(x, y, z, t)$  называют аэродинамическими производными:

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^{N_1} \left( \varphi_j^{(0)}(x, y, z) q_j(t) + \varphi_j^{(1)}(x, y, z) \dot{q}_j(t) \right), \quad (8)$$

$$p(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^{N_1} \left( p_j^{(0)}(x, y, z) q_j(t) + p_j^{(1)}(x, y, z) \dot{q}_j(t) \right). \quad (9)$$

В [4] показано, что аэродинамические производные  $\varphi_j^{(0)}(x, y, z)$ ,  $\varphi_j^{(1)}(x, y, z)$ ,  $p_j^{(0)}(x, y, z)$ ,  $p_j^{(1)}(x, y, z)$  удовлетворяют уравнения Лапласа

$$\nabla^2 \varphi_j^{(k)} = 0, \quad \nabla^2 p_j^{(k)} = 0, \quad k = 0, 1, \quad j = 1, \dots, N_1. \quad (10)$$

Решение уравнения (10) найдем в виде потенциала двойного слоя [8]:

$$p_j^{(k)}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_R \Delta p_j^{(k)}(\xi) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi} \left( \frac{1}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - \xi_3)^2}} \right) dR_\xi. \quad (11)$$

где  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ;  $dR_\xi$  – элемент поверхности оболочки;  $\mathbf{n}_\xi$  – нормаль к поверхности оболочки в точке  $\xi$  и

$$\Delta p_j^{(k)}(x, y, z) = p_j^{(k)}(x, y, R + 0) - p_j^{(k)}(x, y, R - 0)$$

– аэродинамические производные перепада давления, действующего на оболочку. Интегрирование в (11) ведется по поверхности оболочки.

Введем соотношения (8), (9) в уравнения Бернулли. В результате получим следующую систему уравнений в частных производных:

$$U_\infty \frac{\partial \varphi_j^{(0)}}{\partial x} - \omega^2 \varphi_j^{(1)} = -\frac{p_j^{(0)}}{\rho_\infty}, \quad U_\infty \frac{\partial \varphi_j^{(1)}}{\partial x} + \varphi_j^{(0)} = -\frac{p_j^{(1)}}{\rho_\infty}. \quad (12)$$

Для решения системы (12) воспользуемся методом вариаций произвольных постоянных и условием (5). В результате получим

$$\varphi_j^{(1)}(x, y, z) = -\frac{1}{U_\infty \rho_\infty \omega} \int_{-\infty}^x \left( \omega p_j^{(1)}(\zeta, y, z) \cos\left(\frac{\omega}{U_\infty}(\zeta - x)\right) + \right. \\ \left. + p_j^{(0)}(\zeta, y, z) \sin\left(\frac{\omega}{U_\infty}(\zeta - x)\right) \right) d\zeta, \\ \varphi_j^{(0)}(x, y, z) = \frac{1}{U_\infty \rho_\infty} \int_{-\infty}^x \left( -p_j^{(0)}(\zeta, y, z) \cos\left(\frac{\omega}{U_\infty}(\zeta - x)\right) + \right. \\ \left. + \omega p_j^{(1)}(\zeta, y, z) \sin\left(\frac{\omega}{U_\infty}(\zeta - x)\right) \right) d\zeta. \quad (13)$$

Теперь условие непроницаемости (7) запишем относительно аэродинамических производных. Для этого разложения поперечных перемещений по формам собственных колебаний оболочки (3) и выражения для аэродинамических производных (8), (9) введем в (7). В результате получим:

$$\left. \frac{\partial \varphi_j^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=R(x, y)} = U_\infty \frac{\partial W_j}{\partial x}, \quad \left. \frac{\partial \varphi_j^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=R(x, y)} = W_j. \quad (14)$$

Подставим (11) в (13), а полученный результат введем в (14). В итоге получим следующую систему гиперсингулярных интегральных уравнений:

$$4\pi U_\infty \rho_\infty \frac{\partial W_j(x, y)}{\partial x} = \omega \iint_R \Delta p_j^{(1)}(\xi) K_S(x, y, \xi) dR_\xi - \iint_R \Delta p_j^{(0)}(\xi) K_C(x, y, \xi) dR_\xi, \quad (15)$$

$$4\pi U_\infty \rho_\infty \omega W_j(x, y) = -\omega \iint_S \Delta p_j^{(1)}(\xi) K_C(x, y, \xi) dR_\xi - \iint_S \Delta p_j^{(0)}(\xi) K_S(x, y, \xi) dR_\xi, \quad (16)$$

где

$$K_C(x, y, \xi) = \int_{-\infty}^x \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_\xi \partial z} \left( \frac{1}{\sqrt{(\eta - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - \xi_3)^2}} \right) \Big|_{z=R(x, y)} \times \\ \times \cos \frac{\omega}{U_\infty} (\eta - x) d\eta, \\ K_S(x, y, \xi) = \int_{-\infty}^x \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_\xi \partial z} \left( \frac{1}{\sqrt{(\eta - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - \xi_3)^2}} \right) \Big|_{z=R(x, y)} \times \\ \times \sin \frac{\omega}{U_\infty} (\eta - x) d\eta.$$

Для дальнейшего анализа вычислим следующую производную:

$$\frac{\partial K_S}{\partial x} = \int_{-\infty}^x d\eta \left\{ -\frac{\omega}{U_\infty} \cos \frac{\omega}{U_\infty} (\eta - x) \times \right. \\ \times \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_\xi \partial z} \left( \frac{1}{\sqrt{(\eta - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - \xi_3)^2}} \right) \Big|_{z=R(x, y)} + \\ \left. + \sin \frac{\omega}{U_\infty} (\eta - x) \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial^3}{\partial \mathbf{n}_\xi \partial z \partial x} \left( \frac{1}{\sqrt{(\eta - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - \xi_3)^2}} \right) \Big|_{z=R(x, y)} \right\}.$$

Вследствие пологости оболочки, второе слагаемое в последней формуле намного меньше первого. Поэтому эту формулу перепишем в виде

$$\frac{\partial K_S}{\partial x} = -\frac{\omega}{U_\infty} K_C.$$

Аналогично получим

$$\frac{\partial K_C}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_\xi \partial z} \left( \frac{1}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - \xi_3)^2}} \right) \Big|_{z=R(x, y)} + \frac{\omega}{U_\infty} K_S.$$

Продифференцировав по  $x$  уравнение (16) и сложив результат с (15), получим сингулярное интегральное уравнение

$$8\pi U_\infty \rho_\infty \frac{\partial W_j(x, y)}{\partial x} = -\iint_R \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_\xi \partial z} \left( \frac{1}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - \xi_3)^2}} \right) \Big|_{z=R(x, y)} \times \\ \times \Delta p_j^{(1)}(\xi) dR_\xi. \quad (17)$$

Теперь уравнение (15) продифференцируем по  $x$  и сложим с (16). В результате получим следующее гиперсингулярное интегральное уравнение:

$$4\pi U_\infty^2 \rho_\infty \left( \frac{\partial^2 W_j(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\omega^2}{U_\infty^2} W_j(x, y) \right) = \\ = - \iint_R \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_\xi \partial z} \left( \frac{1}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - \xi_3)^2}} \right) \Bigg|_{z=R(x, y)} \times \\ \times \Delta p_j^{(0)}(\xi) dR_\xi. \quad (18)$$

Итак, получена система гиперсингулярных интегральных уравнений (17), (18) относительно аэродинамических производных перепада давления, описывающая обтекание потенциальным потоком тонкостенной пологой оболочки. Запишем эту систему для безразмерных переменных и параметров

$$\bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{y} = \frac{y}{b}, \quad \bar{z} = \frac{z}{b}, \quad r_1 = \frac{a}{b}, \quad r_2 = \frac{R_1}{a}, \\ \Delta \bar{p}_j^{(1)} = \frac{\omega a}{\rho_\infty U_\infty^2} \Delta p_j^{(1)}, \quad \Delta \bar{p}_j^{(0)} = \frac{a}{\rho_\infty U_\infty^2} \Delta p_j^{(0)}, \quad \chi = \frac{\omega a}{U_\infty}. \quad (19)$$

С учетом (19) гиперсингулярные интегральные уравнения (17), (18) примут следующий вид:

$$4\pi \left( \frac{\partial^2 W_j(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}^2} - \chi^2 W_j(\bar{x}, \bar{y}) \right) = \\ - \iint_{\bar{R}} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\mathbf{n}}_\xi \partial \bar{z}} \left( \frac{1}{\sqrt{(\bar{x} - \bar{\xi}_1)^2 + r_1^{-2}(\bar{y} - \bar{\xi}_2)^2 + r_1^{-2}(\bar{z} - \bar{\xi}_3)^2}} \right) \Bigg|_{\bar{z}=\bar{R}(\bar{x}, \bar{y})} \times \\ \times \Delta \bar{p}_j^{(0)}(\bar{\xi}) d\bar{R}_\xi, \quad (20)$$

$$8\pi\chi \frac{\partial W_j(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} = \\ - \iint_{\bar{R}} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\mathbf{n}}_\xi \partial \bar{z}} \left( \frac{1}{\sqrt{(\bar{x} - \bar{\xi}_1)^2 + r_1^{-2}(\bar{y} - \bar{\xi}_2)^2 + r_1^{-2}(\bar{z} - \bar{\xi}_3)^2}} \right) \Bigg|_{\bar{z}=\bar{R}(\bar{x}, \bar{y})} \times \\ \times \Delta \bar{p}_j^{(1)}(\bar{\xi}) d\bar{R}_\xi, \quad (21)$$

где  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{n}}_\xi}$ ;  $\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{n}}_\xi} = \cos \tilde{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + r_1 \cos \tilde{\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} + r_1 \cos \tilde{\gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  – безразмерная производная по нормали к срединной поверхности оболочки;  $\cos \tilde{\alpha}$ ,  $\cos \tilde{\beta}$ ,  $\cos \tilde{\gamma}$  – направляющие косинусы нормали к срединной поверхности оболочки;  $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)$ ;  $\bar{z} = \bar{R}(\bar{x}, \bar{y})$  – уравнение срединной поверхности оболочки в безразмерных координатах;  $d\bar{R}_\xi = \frac{1}{ab} dR_\xi$  – безразмерный бесконечно малый элемент срединной поверхности оболочки.

Для исследования аэроупругих колебаний преобразуем систему сингулярных интегральных уравнений (20), (21) к уравнениям, не зависящим от  $\chi$ . Совершим замену переменных:  $\Delta \bar{p}_j^{(1)} = \chi \Delta \hat{p}_j^{(1)}$ ,  $\Delta \bar{p}_j^{(0)} = \chi^2 \Delta \hat{p}_j^{(0)} + \Delta \tilde{p}_j^{(0)}$ , вследствие чего получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
8\pi \frac{\partial W_j(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} &= \\
&= - \iint_R \frac{\partial^2}{\partial \bar{\mathbf{n}}_\xi \partial \bar{z}} \left( \frac{1}{\sqrt{(\bar{x} - \bar{\xi}_1)^2 + r_1^{-2}(\bar{y} - \bar{\xi}_2)^2 + r_1^{-2}(\bar{z} - \bar{\xi}_3)^2}} \right) \Bigg|_{\bar{z}=\bar{R}(\bar{x}, \bar{y})} \times \\
&\quad \times \Delta \hat{p}_j^{(1)}(\bar{\xi}) d\bar{R}_\xi, \tag{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4\pi \frac{\partial^2 W_j(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}^2} &= \\
&= - \iint_R \frac{\partial^2}{\partial \bar{\mathbf{n}}_\xi \partial \bar{z}} \left( \frac{1}{\sqrt{(\bar{x} - \bar{\xi}_1)^2 + r_1^{-2}(\bar{y} - \bar{\xi}_2)^2 + r_1^{-2}(\bar{z} - \bar{\xi}_3)^2}} \right) \Bigg|_{\bar{z}=\bar{R}(\bar{x}, \bar{y})} \times \\
&\quad \times \Delta \tilde{p}_j^{(0)}(\bar{\xi}) d\bar{R}_\xi, \tag{23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4\pi W_j(\bar{x}, \bar{y}) &= \\
&= \iint_R \frac{\partial^2}{\partial \bar{\mathbf{n}}_\xi \partial \bar{z}} \left( \frac{1}{\sqrt{(\bar{x} - \bar{\xi}_1)^2 + r_1^{-2}(\bar{y} - \bar{\xi}_2)^2 + r_1^{-2}(\bar{z} - \bar{\xi}_3)^2}} \right) \Bigg|_{\bar{z}=\bar{R}(\bar{x}, \bar{y})} \times \\
&\quad \times \Delta \hat{p}_j^{(0)}(\bar{\xi}) d\bar{R}_\xi. \tag{24}
\end{aligned}$$

**3. Уравнения движения оболочки.** В этом разделе выводим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую динамическую неустойчивость оболочки, с использованием метода заданных форм. Эта система уравнений выводится относительно обобщенных координат, участвующих в разложениях (3). Составим виртуальную работу перепада давления, действующего на оболочку, и трения в материале конструкции:

$$\delta A = \iint_R \Delta p \cdot \delta w dR_\xi - \iint_R \beta \dot{w} \cdot \delta w dR_\xi.$$

Тогда вектор обобщенных сил  $\mathbf{Q}^{(w)}$ , соответствующий обобщенным координатам  $\mathbf{q}^{(w)}$ , представим в виде  $\mathbf{Q}^{(w)} = \boldsymbol{\gamma} \mathbf{q}^{(w)} + \boldsymbol{\delta} \dot{\mathbf{q}}^{(w)} - \mathbf{B} \mathbf{q}^{(w)}$ , где  $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N_w}$ ,  $\boldsymbol{\delta} = \{\delta_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N_w}$ ,  $\mathbf{B} = \text{diag}(\beta, \dots, \beta)$ ;  $\gamma_{ij} = \iint_R W_i \Delta p_j^{(0)} dR_\xi$ ,

$\delta_{ij} = \iint_R W_i \Delta p_j^{(1)} dR_\xi$ . Разложения (3) введем в кинетическую и потенциальную энергии (1), (2) и выполним необходимое интегрирование. В результате получим

$$2T = \sum_{i,k=1}^{3N_w} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad 2U_s = \sum_{i,k=1}^{3N_w} c_{ik} q_i q_k. \tag{25}$$

Здесь  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, 3N_w$ , – набор обобщенных координат, в котором присутствуют все координаты векторов  $\mathbf{q}^{(w)}$ ,  $\mathbf{q}^{(v)}$ ,  $\mathbf{q}^{(u)}$ . Соотношения (25) и полученный вектор обобщенных сил введем в уравнения Лагранжа. В результате получим систему уравнений, описывающую движения полой оболочки, в матричной форме:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{(1,1)} \ddot{\mathbf{q}}^{(w)} + \mathbf{C}^{(1,1)} \dot{\mathbf{q}}^{(w)} + \mathbf{C}^{(1,2)} \dot{\mathbf{q}}^{(u)} + \mathbf{C}^{(1,3)} \dot{\mathbf{q}}^{(v)} &= \mathbf{Q}^{(w)}, \\
\mathbf{A}^{(2,2)} \ddot{\mathbf{q}}^{(u)} + \mathbf{C}^{(2,1)} \dot{\mathbf{q}}^{(w)} + \mathbf{C}^{(2,2)} \dot{\mathbf{q}}^{(u)} + \mathbf{C}^{(2,3)} \dot{\mathbf{q}}^{(v)} &= \mathbf{0},
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}^{(3,3)}\ddot{\mathbf{q}}^{(u)} + \mathbf{C}^{(3,1)}\dot{\mathbf{q}}^{(w)} + \mathbf{C}^{(3,2)}\dot{\mathbf{q}}^{(u)} + \mathbf{C}^{(3,3)}\dot{\mathbf{q}}^{(v)} = \mathbf{0}, \quad (26)$$

где  $\mathbf{A}^{(i,i)}$ ,  $\mathbf{C}^{(i,j)}$  – матрицы соответствующих размеров.

Собственные частоты колебаний оболочки с преобладанием движений  $u$ ,  $v$  значительно выше собственных частот с преобладанием движений  $w$ . Поэтому инерционными слагаемыми в направлении  $u$ ,  $v$  пренебрежем:  $\ddot{\mathbf{q}}^{(u)} = \ddot{\mathbf{q}}^{(v)} = 0$ . Тогда второе и третье уравнения из системы (26) можно представить в следующем матричном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{(2,2)}\dot{\mathbf{q}}^{(u)} + \mathbf{C}^{(2,3)}\dot{\mathbf{q}}^{(v)} &= -\mathbf{C}^{(2,1)}\dot{\mathbf{q}}^{(w)}, \\ \mathbf{C}^{(3,2)}\dot{\mathbf{q}}^{(u)} + \mathbf{C}^{(3,3)}\dot{\mathbf{q}}^{(v)} &= -\mathbf{C}^{(3,1)}\dot{\mathbf{q}}^{(w)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Решение системы (27) найдем в виде

$$\dot{\mathbf{q}}^{(u)} = \boldsymbol{\alpha}\dot{\mathbf{q}}^{(w)}, \quad \dot{\mathbf{q}}^{(v)} = \boldsymbol{\beta}\dot{\mathbf{q}}^{(w)}, \quad (28)$$

где  $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N_w}$ ,  $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N_w}$ . Теперь решения (28) введем в первое матричное уравнение из системы (26). В результате получаем следующую линейную динамическую систему в матричной форме:

$$\mathbf{A}^{(1,1)}\ddot{\mathbf{q}}^{(w)} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{q}}^{(w)} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}^{(w)} = \boldsymbol{\gamma}\dot{\mathbf{q}}^{(w)} + \boldsymbol{\delta}\ddot{\mathbf{q}}^{(w)}, \quad (29)$$

где  $\mathbf{K} = \mathbf{C}^{(1,1)} + \mathbf{C}^{(1,2)}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{C}^{(1,3)}\boldsymbol{\beta}$ .

Приведем динамическую систему (29) к безразмерным переменным и параметрам (19) и, дополнительно,  $\tau = \omega t$ ,  $\boldsymbol{\vartheta} = \dot{\mathbf{q}}^{(w)}/h$ , где  $\boldsymbol{\vartheta}$  – вектор безразмерных поперечных колебаний оболочки. Тогда динамическая система (29) примет следующий вид:

$$\chi^2 \tilde{\mathbf{A}}^{(1,1)}\boldsymbol{\vartheta}'' + \chi_1^2 \tilde{\mathbf{K}}\boldsymbol{\vartheta}' = (\chi^2 \boldsymbol{\Pi} + \mathbf{H})\boldsymbol{\vartheta} + \chi \mathbf{Z}\boldsymbol{\vartheta}' - \chi_1 \chi \tilde{\mathbf{B}}\boldsymbol{\vartheta}', \quad (30)$$

где  $\boldsymbol{\vartheta}' = \frac{d\boldsymbol{\vartheta}}{d\tau}$ ,  $\chi_1 = \frac{\omega_1 a}{U_\infty}$ ,  $\tilde{\mathbf{K}} = \frac{1}{\rho_\infty b \omega_1^2 a^2} \mathbf{K}$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}^{(1,1)} = \frac{1}{\rho_\infty b a^2} \mathbf{A}^{(1,1)}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{\rho_\infty b \omega_1 a^2} \mathbf{B}$ ,

$\omega_1$  – первая собственная частота линейных колебаний оболочки в вакууме. Элементы матриц из (30) рассчитываются так:

$$\Pi_{ij} = \iint_{\bar{R}} W_i \Delta \hat{p}_j^{(0)} d\bar{R}_\xi, \quad H_{ij} = \iint_{\bar{R}} W_i \Delta \tilde{p}_j^{(0)} d\bar{R}_\xi, \quad Z_{ij} = \iint_{\bar{R}} W_i \Delta \hat{p}_j^{(1)} d\bar{R}_\xi.$$

Исследуем адекватность описания системой уравнений (30) расчета критических параметров, при которых возбуждаются автоколебания. Для ответа на этот вопрос необходимо знать критическую частоту автоколебаний  $\omega_*$ . В разложении (3) будут выбираться только те собственные формы, которые возбуждаются при колебаниях оболочки с частотой  $\omega_*$ . Предполагаем, что при потере устойчивости возбуждаются формы колебаний, частоты которых ближе к критической частоте автоколебаний. Формы колебаний в разложении (3) выбираются так, чтобы их собственные частоты  $\omega_{\tilde{N}}, \dots, \omega_{\tilde{N}+N_w}$  удовлетворяли условию  $\omega_{\tilde{N}} < \omega_* < \omega_{\tilde{N}+N_w}$ . Более того, формы колебаний в разложении (3) желательно выбрать так, чтобы  $\omega_*$  было как можно ближе к числу  $0.5(\omega_{\tilde{N}} + \omega_{\tilde{N}+N_w})$ .

Расчет динамической неустойчивости осуществляется итерационно. Сначала выбирается разложение (3). В результате расчета динамической неустойчивости определяется частота  $\omega_*$ . Потом по частоте  $\omega_*$  подбираются новые собственные формы для разложения (3) и расчет повторяется, пока  $\omega_*$  не будет близка к  $0.5(\omega_{\tilde{N}} + \omega_{\tilde{N}+N_w})$ . В результате расчета опреде-

ляются два параметра (критическая скорость потока  $U_\infty^*$  и критическая частота автоколебаний  $\omega_*$ ).

#### 4. Численное решение гиперсингулярных интегральных уравнений.

Гиперсингулярные интегральные уравнения (22)–(24) являются независимыми и их решают отдельно. Для описания численного метода их расчета рассмотрим следующее гиперсингулярное интегральное уравнение:

$$-f(x, y) = \iint_{\bar{R}} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\mathbf{n}}_\xi \partial \bar{z}} \left( \frac{1}{\sqrt{(\bar{x} - \bar{\xi}_1)^2 + r_1^{-2}(\bar{y} - \bar{\xi}_2)^2 + r_1^{-2}(\bar{z} - \bar{\xi}_3)^2}} \right) \Big|_{\bar{z}=\bar{R}(\bar{x}, \bar{y})} \times \Delta \bar{p}_j(\bar{\xi}) d\bar{R}_\xi. \quad (31)$$

В дальнейшем рассмотрим численный анализ гиперсингулярных интегральных уравнений для полой оболочки, срединная поверхность которой описывается уравнением:  $\bar{\xi}_3 = \bar{\xi}_3(\bar{\xi}_1) = r_1(\sqrt{r_2^2 - \bar{\xi}_1^2} - r_2)$ . Срединную поверхность оболочки разобьем на маленькие элементы поверхности. Для этого вдоль оси  $\theta$  произведем разбиение на  $M$  полос, а вдоль оси  $y$  на  $N$  полос. Итак, несущая поверхность разбита на  $MN$  элементов поверхности. Рассмотрим элемент поверхности с номером  $(j, v)$ ,  $j = 1, \dots, M$ ,  $v = 1, \dots, N$ , где  $j, v$  – индексы, определяющие порядковые номера элементов поверхности. Поверхность этого элемента обозначим  $\tilde{R}_{jv}$  и определим его четырьмя вершинами  $r_\mu^{(j,v)}$ ,  $\mu = 1, \dots, 4$ , с координатами  $r_\mu^{(j,v)} = [x_\mu^{(j,v)}, y_\mu^{(j,v)}, z_\mu^{(j,v)}]$ . Центры тяжести элементов поверхности обозначим  $(\bar{x}_j, \bar{y}_v)$ . Нормаль к этому элементу поверхности обозначим  $\mathbf{n}_\xi^{(j,v)}$  и определим ее тремя проекциями  $[A^{(j,v)}, B^{(j,v)}, C^{(j,v)}]$ . По величинам этих проекций найдем направляющие косинусы нормали  $\cos \tilde{\alpha}_{jv}$ ,  $\cos \tilde{\beta}_{jv}$ ,  $\cos \tilde{\gamma}_{jv}$ . Поверхность оболочки такова, что  $\cos \tilde{\beta}_{jv} = 0$ .

Представим план оболочки в безразмерных координатах  $\bar{S}_\xi = \{(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \bar{\xi}_1 \leq 1, 0 \leq \bar{\xi}_2 \leq 1\}$  и проекцию элемента поверхности  $\tilde{R}_{jv}$  на  $\bar{S}_\xi$  обозначим через  $\tilde{S}_{jv}$ . Интеграл (31) представим в виде суммы  $M \times N$  интегралов по поверхности элементов  $\tilde{R}_{jv}$ . Удовлетворим тождественно интегральное уравнение (31) в центрах тяжести элементов поверхности  $(\bar{x}_j, \bar{y}_{v_1})$ . Предположим, что величина давления на элементах поверхности постоянна и равна  $\Delta \bar{p}_{jv}$ . Тогда сингулярное интегральное уравнение (31) сводится к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^M \sum_{v=1}^N A_{j_1 v_1 j v} \Delta \bar{p}_{jv} = -f(\bar{x}_{j_1}, \bar{y}_{v_1}), \quad j_1 = 1, \dots, M, \quad v_1 = 1, \dots, N, \quad (32)$$

где

$$A_{j_1 v_1 j v} = \int_{\tilde{R}_{jv}} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_\xi^{(j,v)} \partial \bar{z}} \left( \frac{1}{R_\Sigma} \right) \Big|_{\bar{z}=\bar{R}(\bar{x}_{j_1}, \bar{y}_{v_1})} d\bar{R}_\xi, \quad (33)$$

$R_\Sigma = \sqrt{(\bar{x}_{j_1} - \bar{\xi}_1)^2 + r_1^{-2}(\bar{y}_{v_1} - \bar{\xi}_2)^2 + r_1^{-2}(\bar{z} - \bar{\xi}_3)^2}$ . Итак, для расчета элементов

основной матрицы системы линейных алгебраических уравнений (32) определим поверхностные интегралы (33). Эти поверхностные интегралы сведем к двойным интегралам по элементам плана оболочки  $\tilde{S}_{j\nu}$ :

$$A_{j_1\nu_1j\nu} = \int_{\tilde{S}_{j\nu}} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_\xi^{(j,\nu)} \partial \bar{z}} \left( \frac{1}{R_\Sigma} \right) \Big|_{\substack{\bar{z}=\bar{R}(\bar{x}_{j_1}, \bar{y}_{\nu_1}) \\ \bar{\xi}_3=\bar{\xi}_3(\bar{\xi}_1)}} \mathfrak{x}(\bar{\xi}_1) d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2, \quad (34)$$

где  $\mathfrak{x}(\bar{\xi}_1) = \sqrt{\frac{r_2^2 + (r_1^2 - 1)\bar{\xi}_1^2}{r_2^2 - \bar{\xi}_1^2}}$ . Для численного расчета интегралов (34),

которые не принадлежат диагональным элементам матрицы ( $j_1 \neq j$ ,  $\nu_1 \neq \nu$ ), воспользуемся квадратурными формулами Гаусса для двойных интегралов. Диагональные элементы матрицы (34) содержат сингулярность. Эти сингулярные интегралы определяются так:

$$A_{j\nu j\nu} = \mathfrak{x}(\bar{x}_j) \int_{x_1^{(j,\nu)} - \bar{x}_j}^{x_2^{(j,\nu)} - \bar{x}_j} d\eta_1 \int_{y_1^{(j,\nu)} - \bar{y}_\nu}^{y_4^{(j,\nu)} - \bar{y}_\nu} d\eta_2 \times \\ \times \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_\xi^{(j,\nu)} \partial \bar{z}} \left( \frac{1}{\sqrt{\eta_1^2 + r_1^{-2}\eta_2^2 + r_1^{-2}(\bar{z} - \bar{\xi}_3)^2}} \right) \Big|_{\substack{\bar{z}=\bar{R}(\bar{x}_j, \bar{y}_\nu) \\ \bar{\xi}_3=\bar{\xi}_3(\bar{\xi}_1)}}, \quad (35)$$

где  $\eta_1 = \bar{\xi}_1 - \bar{x}_j$ ,  $\eta_2 = \bar{\xi}_2 - \bar{y}_\nu$ . Аналитическое значение интеграла (35) найдем в виде

$$A_{j\nu j\nu} = \mathfrak{x}(\bar{x}_j) \left\{ \left( 3 \cos \tilde{\alpha}_{j\nu} \frac{\varepsilon_j}{r_1^2} - 3 \cos \tilde{\gamma}_{j\nu} \frac{\varepsilon_j^2}{r_1^3} \right) J_2 + \cos \tilde{\gamma}_{j\nu} \frac{J_1}{r_1} \right\}.$$

Здесь

$$J_1 = \frac{r_1}{\lambda} \left( -Q(y_4^{(j,\nu)} - \bar{y}_\nu, x_2^{(j,\nu)} - \bar{x}_j) + Q(y_4^{(j,\nu)} - \bar{y}_\nu, x_1^{(j,\nu)} - \bar{x}_j) + \right. \\ \left. + Q(y_1^{(j,\nu)} - \bar{y}_\nu, x_2^{(j,\nu)} - \bar{x}_j) - Q(y_1^{(j,\nu)} - \bar{y}_\nu, x_1^{(j,\nu)} - \bar{x}_j) \right),$$

$$J_2 = -\frac{r_1}{3\lambda^4(x_2^{(j,\nu)} - \bar{x}_j)} \left( R(x_2^{(j,\nu)} - \bar{x}_j, y_4^{(j,\nu)} - \bar{y}_\nu) + \right. \\ \left. + P(y_4^{(j,\nu)} - \bar{y}_\nu, x_2^{(j,\nu)} - \bar{x}_j) - R(x_2^{(j,\nu)} - \bar{x}_j; y_1^{(j,\nu)} - \bar{y}_\nu) - \right. \\ \left. - P(y_1^{(j,\nu)} - \bar{y}_\nu, x_2^{(j,\nu)} - \bar{x}_j) \right) + \\ + \frac{r_1}{3\lambda^4(x_1^{(j,\nu)} - \bar{x}_j)} \left( R(x_1^{(j,\nu)} - \bar{x}_j; y_4^{(j,\nu)} - \bar{y}_\nu) + \right. \\ \left. + P(y_4^{(j,\nu)} - \bar{y}_\nu, x_1^{(j,\nu)} - \bar{x}_j) - R(x_1^{(j,\nu)} - \bar{x}_j; y_1^{(j,\nu)} - \bar{y}_\nu) - \right. \\ \left. - P(y_1^{(j,\nu)} - \bar{y}_\nu, x_1^{(j,\nu)} - \bar{x}_j) \right),$$

$$\lambda^2 = 1 + r_2^{-2}\varepsilon_j^2, \quad \varepsilon_j = \frac{r_1\bar{x}_j}{\sqrt{r_2^2 - \bar{x}_j^2}}, \quad R(x, y) = \frac{\sqrt{\lambda^2 x^2 + r_1^{-2}y^2}}{r_1^{-1}y},$$

$$P(x, y) = \frac{x}{r_1\sqrt{\lambda^2 y^2 + r_1^{-2}x^2}}, \quad Q(x, y) = \frac{r_1\sqrt{\lambda^2 y^2 + r_1^{-2}x^2}}{\lambda xy}.$$

Таким образом, получены формулы для расчета всех интегралов (33). В результате решения систем линейных алгебраических уравнений (32) находим численные решения гиперсингулярных интегральных уравнений (22)–(24).

**5. Численный анализ динамической неустойчивости.** Рассмотрим свободные колебания цилиндрической панели со следующими численными значениями параметров:

$$E = 70.56 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad \rho_s = 2.84 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \nu = 0.3, \\ a = 0.27 \text{ м}, \quad b = 0.127 \text{ м}, \quad h = 0.39 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad R_1 = 4 \text{ м}. \quad (36)$$

Исследуем сходимость численного решения систем сингулярных интегральных уравнений. Для этого рассмотрим сингулярное интегральное уравнение (24). Система линейных алгебраических уравнений (32) решалась при различной размерности этой системы  $NM$ . Для расчета коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений (32) вычислялись двойные интегралы (33). Для расчета этих интегралов использовались квадратурные формулы Гаусса. Применялись квадратурные формулы с разным числом точек интегрирования  $N_f$ . Коэффициенты системы (32) определялись с различным

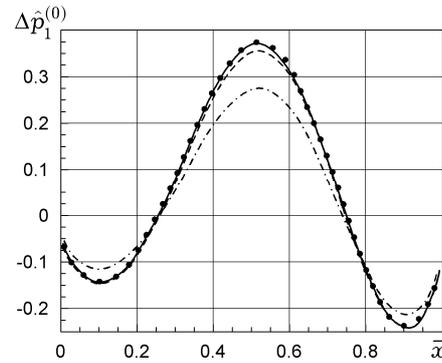


Рис. 2

числом точек интегрирования  $N_f$ . В расчетах выбиралось следующее количество точек: 4, 6, 8, 10. Число разбиений основания пологой оболочки выбиралось  $M = N = 70$ , то есть основание делилось на 4900 равных квадратных элементов. На рис. 2 показаны результаты расчетов  $\Delta \hat{p}_1^{(0)}$  в сечении плана оболочки  $\bar{y} = 0.5071$ . Тонкими штриховой и штрихпунктирной линиями показаны результаты расчетов с  $N_f = 4$  и  $N_f = 6$ . Жирной сплошной линией представлены данные с  $N_f = 8$ . Черными кругами показаны результаты расчета с  $N_f = 10$ .

Как следует из рис. 2, наиболее сильно результаты расчета  $\Delta \hat{p}_1^{(0)}$  отличаются в точке  $\bar{x} = 0.51$ . Значения  $\Delta \hat{p}_1^{(0)}$  в этой точке при различном числе точек интегрирования  $N_f$  квадратурных формул Гаусса представлено в табл. 1. Как следует из табл. 1 и рис. 2, результаты расчетов при  $N_f = 8$  и  $N_f = 10$  практически совпадают, то есть наблюдается сходимость полученных результатов. В дальнейшем будем проводить расчеты с  $N_f = 10$ .

Таблица 1. Значения  $\Delta \hat{p}_1^{(0)}$  в точке  $\bar{x} = 0.51$ ;  $\bar{y} = 0.5071$

$N_f$	$N \times M$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\Delta p_1^{(0)}$
4	70×70	0.51	0.5071	0.28
6	70×70	0.51	0.5071	0.35
8	70×70	0.51	0.5071	0.37
10	70×70	0.51	0.5071	0.37

Исследовалось влияние числа разбиения плана оболочки на прямоугольники на значения решений системы сингулярных интегральных уравнений (22)–(24). Для этого численно решалась система линейных алгебраических уравнений (32) при  $M = N = 50$  и  $M = N = 70$ . Итак, основание пологой оболочки разбивалось на 2500 и 4900 прямоугольников.

Функция  $\Delta \hat{p}_1^{(0)}$  рассчитана в сечении  $\bar{y} = 0.25$ . Результаты расчетов приведены на рис. 3. Здесь сплошной линией представлены данные при разбиении области на 2500 прямоугольников, а кругами – результаты расчетов при 4900 точек дискретизации. Полученные результаты расчетов чрезвычайно близки. В дальнейшем будем использовать данные, полученные при разбиении области на 4900 прямоугольников.

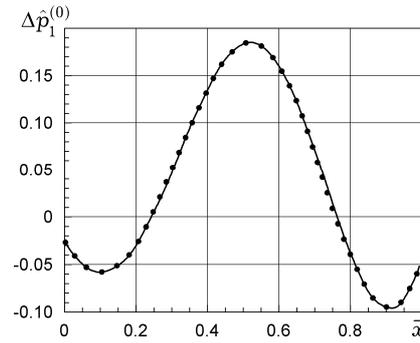


Рис. 3

Исследуем динамическую неустойчивость оболочки в газовом потоке. Найдем значения параметров  $\chi^*$ ,  $\chi_1^*$ ,  $U_\infty^*$ ,  $\omega_*$ , при которых оболочка теряет динамическую устойчивость. При  $U_\infty < U_\infty^*$ ,  $\chi_1 > \chi_1^*$  наблюдается устойчивое состояние равновесия конструкции. При  $U_\infty > U_\infty^*$ ,  $\chi_1 < \chi_1^*$  наблюдается неустойчивое состояние равновесия, а при  $U_\infty = U_\infty^*$ ,  $\chi_1 = \chi_1^*$  оболочка теряет устойчивость; в системе наблюдается бифуркация Хопфа. Итак, численные расчеты динамической неустойчивости сводятся к нахождению величин  $U_\infty^*$ ,  $\chi_1^*$ . Для численного определения этих параметров решались три системы линейных алгебраических уравнений, описывающие уравнения (22)–(24). Для численного анализа динамической неустойчивости тривиального состояния равновесия в системе (30) рассчитывались характеристические показатели. Подходы к их расчету подробно рассматриваются в монографии [2]. Расчеты критических параметров проводились для различного числа базисных функций в разложении (3) и для различного числа степеней свободы в динамической системе (30). Выбор базисных функций в разложении (3) проводился на основании подхода, предложенного в разд. 3. В результате расчетов с различным числом базисных функций исследуется сходимость значений параметров  $U_\infty^*$ ,  $\omega_*$ , при которых в системе наблюдается бифуркация Хопфа.

Таблица 2. Значения критических параметров при различном числе степеней свободы

Учитываемые моды	$N_w$	$U_\infty^*$	$\omega_*$	$U_\infty^{(T)}$	$\omega^{(T)}$
10÷15	6	257.12	2571	—	—
10÷16	7	252.3	2616	—	—
9÷16	8	284.5	2528	313.7	2556.4
9÷17	9	284.5	2528.8	—	—
10÷17	8	247.6	2567.7	—	—

Проводилось определение параметров начала динамической неустойчивости оболочки в потоке с параметрами (36) и при  $\rho_\infty = 1.43 \text{ кг/м}^3$ ,  $R_1 = 4 \text{ м}$ . Результаты расчета приведены в табл. 2. В первом столбце указаны номера мод собственных колебаний оболочки, которые учитываются в разложении (3), а во втором столбце число степеней свободы в модели (30). В третьем столбце показаны критические скорости потока, а в четвертом столбце представлены частоты начала флаттера. Для всех этих расчетов частота автоколебаний  $\omega_*$  лежит между собственными частотами мод, учитываемых в разложении (3). Проводилась проверка полученных результатов с помощью теории газового течения [8]. Результаты расчетов с помощью этого подхода представлены в пятом и шестом столбцах таблицы. Относи-

тельная разница критических скоростей движения газа, полученных двумя методами,  $\Delta = \left| \frac{U_{\infty}^* - U_{\infty}^{(T)}}{U_{\infty}^*} \right|$ , составляет 10%, а относительная разница критических частот колебаний составляет 1.1%.

**Выводы.** Динамическая неустойчивость пологой оболочки в дозвуковом газовом потоке описывается механической моделью с конечным числом степеней свободы. В работе предложен подход, который позволяет вывести эту систему уравнений движения относительно обобщенных координат, описывающих только изгибные колебания оболочки. Обобщенные координаты продольных и крутильных колебаний учитываются из квазистатического расчета. Для выбора форм колебаний, которые учитываются в разложениях перемещений, предложено сравнивать частоту автоколебаний с собственными частотами учитываемых форм колебаний. Формы колебаний выбираются так, чтобы полусумма максимальной и минимальной частоты была как можно ближе к частоте автоколебаний.

В этой работе предложена система гиперсингулярных интегральных уравнений относительно аэродинамических производных перепада давлений. Эта система чрезвычайно удобна для описания поля давлений, действующих на колеблющуюся пологую оболочку. Численное решение этой системы гиперсингулярных интегральных уравнений сводится с помощью метода дискретных вихрей к решению системы линейных алгебраических уравнений большой размерности.

Исследована сходимость численного расчета аэродинамических производных перепада давления. Для взятия двойных интегралов матрицы системы линейных алгебраических уравнений рекомендовано использовать квадратурные формулы Гаусса с 8 точками интегрирования. Для сходимости результатов расчета аэродинамических производных основание пологой оболочки рекомендуется разбивать на 4900 одинаковых прямоугольников.

Численно исследованы критические скорости потоков и критические частоты автоколебаний для пологих оболочек. Результаты расчетов сравнились с данными, полученными по приближенной теории Теодорсена.

Работа выполнена при поддержке Целевой комплексной программы НАН Украины по научным космическим исследованиям на 2012–2016 гг. в рамках договора «Расчетная оценка вибраций элементов аэрокосмических систем при силовых и аэродинамических нагрузениях».

Автор выражает благодарность профессорам Е. А. Стрельниковой и О. К. Морачковскому за обсуждение полученных результатов.

1. Аврамов К. В. К аэроупругому взаимодействию пластин с безвихревым идеальным газовым потоком // Доп. НАН України. – 2013. – № 9. – С. 57–64.
2. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем. – Т. 1. Модели, методы, явления. – Москва –Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. – 704 с.
3. Аврамов К. В., Михлин Ю. В., Романенко В. Н., Киреев А. А. Бифуркации установившихся автоколебаний гибких пластин при взаимодействии с потенциальным газовым течением // Прикл. гідромеханіка. – 2014. – 16, № 1. – С. 3–9.
4. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К. Аэродинамические производные летательного аппарата и крыла при дозвуковых скоростях. – Москва: Наука, 1975. – 424 с.
5. Albano E., Rodden W. P. A doublet-lattice method for calculating lift distributions on oscillating surfaces in subsonic flows // AIAA Journal. – 1969. – 7, No. 2. – P. 279–285. – <https://doi.org/10.2514/3.5086>.
6. Avramov K. V., Strel'nikova E. A., Pierre C. Resonant many-mode periodic and chaotic self-sustained aeroelastic vibrations of cantilever plates with geometrical non-linearities in incompressible flow // Nonlinear Dynam. – 2012. – 70, No. 2. – P. 1335–1354. – <https://doi.org/10.1007/s11071-012-0537-5>.
7. Djojodihardjo R. H., Widnall S. E. A numerical method for the calculation of nonlinear, unsteady lifting potential flow problems // AIAA Journal. – 1969. – 7, No. 10. – P. 2001–2009. – <https://doi.org/10.2514/3.5494>.

8. Dowell E. H., Crawley E. F., Curtiss H. C. (Jr.), Peters D. A., Scanlan R. H., Sisto F. A modern course in aeroelasticity. – New York: Kluwer Acad. Publ., 1995. – xxiii+704 p.
9. Hess J. L. Review of integral-equation techniques for solving potential-flow problems with emphasis of the surface-source method // Comput. Methods Appl. Mech. – 1975. – 5, No. 2. – P. 145–196.  
– [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(75\)90051-1](https://doi.org/10.1016/0045-7825(75)90051-1).
10. Katz J. Calculation of the aerodynamic forces on automotive lifting surfaces // Trans. ASME. J. Fluids Eng. – 1985. – 107, No. 4. – P. 438–443.  
– <https://doi.org/10.1115/1.3242507>.
11. Meirovitch L. Elements of vibration analysis. – New York: McGraw Hill, 1986. – xvi+560 p.
12. Mook D. T., Dong B. Perspective: numerical simulations of wakes and blade-vortex interaction // Trans. ASME. J. Fluids Eng. – 1994. – 116, No. 1. – P. 5–21.  
– <https://doi.org/10.1115/1.2910242>.
13. Morino L., Kuo C. C. Subsonic potential aerodynamic for complex configurations: a general theory // AIAA Journal. – 1974. – 12, No. 2. – P. 191–197.  
– <https://doi.org/10.2514/3.49191>.
14. Strganac T. W., Mook D. T. Numerical model of unsteady subsonic aeroelastic behavior // AIAA Journal. – 1990. – 28, No. 5. – P. 903–909.  
– <https://doi.org/10.2514/3.25137>.

### ДИНАМІЧНА НЕСТІЙКІСТЬ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК ПРИ ЇХ ВЗАЄМОДІЇ З ТРИВИМІРНОЮ ПОТЕНЦІАЛЬНОЮ ТЕЧІЄЮ ГАЗУ

Для дослідження взаємодії коливної пологої оболонки з тривимірною дозвуквою течією газу отримано систему гіперсингулярних інтегральних рівнянь відносно аеродинамічних похідних перепаду тиску. Така система рівнянь є зручною для розв'язання задач аеропружності. Систему гіперсингулярних інтегральних рівнянь розв'язано числовим методом, який ґрунтується на методі дискретних вихорів. Для моделювання коливань пологої оболонки отримано систему звичайних диференціальних рівнянь за допомогою методу заданих форм. Чисельно досліджено динамічну нестійкість рівноваги пологої оболонки у дозвуківій газовій течії.

**Ключові слова:** гіперсингулярні інтегральні рівняння, динамічна нестійкість оболонок, течія газу.

### DYNAMIC INSTABILITY OF SHALLOW SHELLS INTERACTING WITH THREE-DIMENSIONAL POTENTIAL GAS FLOW

A system of hypersingular integral equations for the aerodynamic derivatives of the pressure change is derived in order to analyze the interaction between vibrating shallow shells and three-dimensional subsonic gas flow. This system is convenient for solving the aeroelasticity problems. The system of the hypersingular integral equations is solved numerically by making use of the discrete vortex method. The system of the ordinary differential equations is obtained to model the vibrations of a shallow shell by means of the assumed-mode method. The dynamic instability of a shallow shell in the subsonic gas flow is studied numerically.

**Key words:** hypersingular integral equations, dynamic instability of shells, gas flow.

Ин-т проблем машиностроения  
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Получено  
07.04.15