УДК 517.929

**А.С. БЫЧКОВ, Е.В. ИВАНОВ, В.С. КАСЬЯНЮК**

# ТЕОРЕТИКО-ВОЗМОЖНОСТНЫЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ СИСТЕМ НЕЧЁТКОЙ СТРУКТУРЫ

***Анотація.*** *У даній статті на основі теорії можливостей вводиться поняття нечіткого стрибкоподібного марківського процесу. З використанням цього поняття для моделювання неперервно-дискретних систем невизначеної структури будується нечіткий аналог систем випадкової структури – системи нечіткої структури.*
***Ключові слова:*** *ланцюг Маркова, випадкова структура, нечітка структура, теорія можливостей, простір станів, нечіткий елемент, нечіткий процес, процес нечіткого блукання.*

***Аннотация.*** *В статье на основе теории возможностей вводится понятие нечеткого скачкообразного марковского процесса. С использованием этого понятия для моделирования непрерывно-дискретных систем неопределенной структуры строится нечеткий аналог систем случайной структуры – системы нечеткой структуры.*
***Ключевые слова:*** *цепь Маркова, случайная структура, нечеткая структура, теория возможностей, пространство состояний, нечеткий элемент, нечеткий процесс, процесс нечеткого блуждания.*

***Abstract.*** *On the basis ofpossibility theory a concept of fuzzy Markov jump-type process is introduced in this article.Using this concept for modeling continuous-discrete systems of uncertain structure, a fuzzy analog system of random structure (a system with fuzzy structure) is constructed.*
***Keywords:*** *Markov's chain, random structure, fuzzy structure, possibilities theory, problem space, fuzzy element, fuzzy process, fuzzy walk process.*

## 1. Введение

Теоретико-вероятностные методы [1] широко используются в научных исследованиях для моделирования в терминах случайности разных аспектов неопределенности, которая отображает неполноту знаний и их недостоверность. Вместе с тем вероятностные методы оказались неэффективными при моделировании широкого класса экономических, сложных технических и др. систем [3, 4]. Неопределенность в этих системах неадекватно моделируется вероятностными методами, поскольку не наблюдается многократного повторения событий в одинаковых условиях. В связи с этим, начиная с 1960-х годов, были разработаны невероятностные модели неопределенности: субъективная вероятность Северджа, нечеткие множества Заде и др. [1,4] Одним из перспективных подходов к построению невероятностных моделей неопределённости является теория возможностей, основы которой заложил в 1974 году М. Сугено, введя понятие возможности события, и которую впоследствии развивали разные авторы [2–4]. Особенность теории возможностей состоит в том, что ее построение формально параллельно построению теории вероятностей, что позволяет переносить в неё по аналогии теоретико-вероятностные результаты, и одновременно в ней можно легко выразить все понятия теории нечетких множеств Заде. Таким образом, понятия нечётких математических объектов (множеств, функций и т.п.) могут вводиться как в смысле теории нечётких множеств Заде, так и в смысле теории возможностей. В этой статье будем использовать понятия нечётких объектов в смысле теории возможностей.

Для применения невероятностных подходов к моделированию реальных процессов используются нечеткие дифференциальные уравнения (в смысле теории нечётких множеств Заде или в смысле теории возможностей). Существующие подходы рассматривают такие уравнения, как дифференциальные уравнения с нечеткими параметрами [4, 5]. Главным недостатком этого подхода является то, что нечеткость моделирует погрешности в вычислении параметров, в то время как для приложений важным является моделирование неопределенности в возмущении правой части уравнения. В связи с этим обращаются к применению стохастических моделей, в частности, к системам случайной структуры [7] на основе марковских процессов, описывающих такие системы, с которыми в каждый момент времени связаны дискретное состояние (текущая структура или режим) и непрерывное состояние (параметры). Дискретное состояние определяет закон изменения непрерывного состояния. Изменение дискретных состояний подчинено случайному процессу (как, правило, скачкообразному марковскому). Такие модели соответствуют случаю, когда для системы можно указать режимы ее функционирования, но не известно точно, когда и какие изменения режимов произойдут. Однако полезными стохастические модели становятся лишь тогда, когда можно определить распределения входящих в них случайных элементов, что нередко не представляется возможным из-за невозможности получить статистическую информацию путем многократных наблюдений объекта в одинаковых условиях. Нечеткие модели основываются на экспертных оценках, а не на статистической информации, поэтому являются актуальными нечеткие аналоги систем случайной структуры. Однако построение таких аналогов сталкивается с недостаточной развитостью аппарата нечетких процессов (нечеткие марковские цепи исследовались для дискретного времени [6], но не известны исследования нечетких марковских процессов с непрерывным временем [3, 6]).

Цель данной статьи состоит в построении на базе теории возможностей основ теории нечетких аналогов систем случайной структуры, для чего, как указывалось выше, необходимо построение основ теории нечетких марковских процессов с непрерывным временем.

## 2. Теория возможностей

В теории возможностей для события вместо вероятности предоставляется относительная оценка возможности (в шкале $[0,1]$) ее появления. На основе числового значения возможности происходит сравнение событий (более возможное, менее возможное, равновозможное). Свойство множества событий считается теоретико-возможностным в случае его инвариантности относительно произвольного (непрерывного) преобразования шкалы возможности, сохраняющего порядок на её элементах. Лишь таким свойствам предоставляется содержательное толкование.

Пусть $X$ – непустое множество (элементарные события), $\mathbf{A}$ – алгебра подмножеств, элементы которых интерпретируются как составные события.

Будем употреблять термин отображение в смысле всюду определенная (тотальная) функция.

**Определение 1** ([3]). Шкалой возможности $L$ называется отрезок $[0,1]$, рассматриваемый как полная дистрибутивная решетка с обычным порядком на вещественных числах. Операции минимума и максимума двух элементов в $L$ будем обозначать соответственно $\wedge$ и $\vee$, а операции взятия точной нижней и верхней граней соответственно $\inf$ и $\sup$.

Для назначения значения возможности событию используется мера возможности.

**Определение 2** ([3]). Мерой возможности на $\mathbf{A}$ называется отображение $P:\mathbf{A}\to L$, которое удовлетворяет условию $P\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right)=\sup_{t\in T} P(A_t)$ для произвольного непустого семейства множеств $\{A_t \mid t\in T\}$ из $\mathbf{A}$, такого, что $\bigcup_{t\in T} A_t \in \mathbf{A}$.

Мера возможности $P$ называется нормированной, если $P(\varnothing)=0$ и $P(X)=1$. В дальнейшем все меры возможности будут считаться нормированными.

**Определение 3** ([3]). Пространством возможностей называется тройка $(X,\mathbf{A},P)$, где $P$ является мерой возможности на $\mathbf{A}$.

По теореме о продолжении меры возможности ([3]), мера возможности на алгебре множеств **A** может быть продолжена до меры возможности на булеане множества элементарных событий $2^X$ (доказательство существования такого продолжения является в определенном смысле конструктивным), поэтому без ограничения общности будем рассматривать пространства возможностей вида $(X,2^X,P)$. Для таких пространств мера возможности может быть представлена в виде $P(A)=\sup_{x\in A} f(x)$, $A\subseteq X$, где $f:X\to L$ – отображение ($f(x)=P\{x\}$ для всех $x\in X$). Для каждого числа $\varepsilon>0$ введем обозначение $X_\varepsilon=\{x\in X : P\{x\}>\varepsilon\}$ – множество элементарных событий возможности больше $\varepsilon$. Будем использовать запись $P\{E(x)\}$, где $E$ – некоторый предикат на $X$ как сокращение для выражения $P(\{x\in X \mid E(x)\})$.

В данной статье мы ограничимся рассмотрением пространств возможности вида $(X,2^X,P)$. Данные ниже определения касаются именно таких пространств.

Пусть $Y$ – некоторое (непустое) множество.

**Определение 4** ([3]). Нечеткой величиной называется частичная функция $\xi:X\to Y$, определенная на всех элементарных событиях ненулевой возможности.

**Определение 5** ([3]). Индексированное семейство $(\xi_t)_{t\in T}$ нечетких величин называется независимым в совокупности (по другой терминологии, невзаимодействующим [1]), если

$$P\{\forall t\in T\; \xi_t=y_t\}=\inf_{t\in T} P\{\xi_t=y_t\}$$

для произвольного индексированного семейства $(y_t)_{t\in T}$ элементов $Y$. В частности, $\xi_1$ и $\xi_2$ независимы, если $P\{\xi=y_1,\xi_2=y_2\}=P\{\xi_1=y_1\}\wedge P\{\xi_2=y_2\}$ для всех $y_1,y_2\in Y$.

**Определение 6** ([3]). Частичная функция $p:T\times X\to Y$, определённая на $T\times X_0$, где $T=[0,+\infty)$ – временная полуось, называется нечетким процессом. Обозначим $Tr^+(p)$ – множество траекторий нечеткого процесса $p$ положительной возможности, то есть отображений $q:T\to Y$, таких, что $P(\{x\in X \mid \forall t\in T\; p(t,x)=q(t)\})>0$. Иногда в записи второй аргумент нечеткого процесса опускается.

## 3. Нечеткие марковские процессы

Зафиксируем некоторое пространство возможностей $(X,2^X,P)$.

Будем считать, что переменные с названием $t$ (возможно, индексированные) принимают значения из $T$, поэтому выражение вида $P\{\forall t\; p(t)=q(t)\}$, где $p:T\times X\to Y$ – нечеткий процесс, а $q:T\to Y$ – функция, следует понимать как $P(\{x\in X \mid \forall t\in T\; p(t,x)=q(t)\})$.

Обозначим $Tot(T,Y)$ – множество всюду определенных функций $q:T\to Y$.

**Определение 7**. Нечеткий процесс $p:T\times X\to Y$ называется марковским, если для произвольной функции $q\in Tot(T,Y)$ выполняется равенство

$$P\{\forall t\; p(t)=q(t)\}=P\{\forall t\le t_0\; p(t)=q(t)\}\wedge P\{\forall t\ge t_0\; p(t)=q(t)\}.$$

Учитывая данное выше определение независимости, это определение означает независимость прошлой и будущей (относительно произвольного момента $t_0$) эволюции процесса при условии $p(t_0)=q(t_0)$, то есть при данном текущем состоянии.

**Определение 8**. Нечеткий процесс называется финитарным, если $\lim\limits_{t_0 \to +\infty} P\{\forall t \le t_0 \; p(t) = q(t)\} = P\{\forall t \; p(t) = q(t)\}$ для произвольной функции $q \in Tot(T, I)$.

Заметим, что для произвольного нечеткого процесса $p$ выполняется неравенство $\lim\limits_{t_0 \to +\infty} P\{\forall t \le t_0 \; p(t) = q(t)\} \le P\{\forall t \; p(t) = q(t)\}$. Финитарность содержательно означает, что возможности конченых фрагментов траектории определяют возможность всей траектории, и таким образом является обычным предположением для процессов, которые могут иметь физическую реализацию.

Для применения в системах нечеткой структуры нас будут интересовать процессы с кусочно-постоянными траекториями, поэтому рассмотрим именно такой случай.

Положим $I$ – непустое множество состояний, которое будем рассматривать как пространство с дискретной топологией.

Обозначим $Pw(T, I)$ – класс непрерывных слева функций $f : T \to I$, множество точек разрыва которых не имеет предельных точек. Заметим, что функции из $Pw(T, I)$ являются кусочно-постоянными.

**Определение 9**. Нечеткий процесс $p : T \times X \to I$ называется нечетким скачкообразным марковским процессом (НСМП), если

1) $p$ является финитарным нечетким марковским процессом;

2) $Tr^{+}(p) \subseteq Pw(T, I)$, то есть произвольная траектория положительной возможности процесса $p$ осуществляет переходы между состояниями в изолированные моменты времени, и на каждом ограниченном временном промежутке количество таких переходов конечно.

Исследуем класс нечетких скачкообразных марковских процессов.

Пусть $p : T \to I$ – нечеткий скачкообразный марковский процесс.

**Определение 10**. Переходным распределением процесса $p$ называется индексированное семейство функций $(\varphi_{i,j})_{i,j \in I}$, где $\varphi_{i,j} \in Tot(T, L)$, определенное равенствами $\varphi_{i,j}(t) = P\{p(t) = i, p(t+) = j\}$, $i, j \in I$, $t \in T$.

**Теорема 1**. Если $(\varphi_{i,j})_{i,j \in I}$ – переходное распределение НСМП $p : T \to I$, то $P\{\forall t \; p(t) = q(t)\} = \inf\limits_{t \in T} \varphi_{q(t),q(t+)}(t)$ для произвольной функции $q \in Pw(T, I)$.

Доказательство.

Выберем некоторую функцию $q \in Pw(T, I)$. Пусть для некоторого $\delta \in L$ и каждого $t_0 \in T$ выполняется $\varphi_{q(t_0),q(t_0+)}(t_0) > \delta$. Тогда для каждого $t_0 \in T$ существует траектория $r_{t_0}$ процесса $p$, такая, что $P\{\forall t \; p(t) = r_{t_0}(t)\} > \delta$, $r_{t_0}(t_0) = q(t_0)$ и $r_{t_0}(t_0+) = q(t_0+)$. Так как $\{r_{t_0}, q\} \subset Pw(T, I)$, то существует непустой интервал $(a_{t_0}, b_{t_0})$, такой, что $t_0 \in (a_{t_0}, b_{t_0})$ и $r_{t_0}(t) = q(t)$ для каждого $t \in (a_{t_0}, b_{t_0}) \cap T$.

Пусть $K_n = [0, n]$ для некоторого натурального $n$. Семья множеств $\{(a_{t_0}, b_{t_0}) \,|\, t_0 \in K\}$ является открытым покрытием $K_n$. Поскольку $K_n$ является компактом, то существует конечное подпокрытие $\{(a_{t_k}, b_{t_k}) \,|\, k \in \{1,2,...,s\}\}$, такое, что $a_{t_0} \le 0$ и $b_{t_k} < a_{t_{k+1}}$ при $k < s$. Обозначим $(a^k, b^k) = (a_{t_k}, b_{t_k})$. Выберем элементы $\tau_k$, $k \in \{1,2,...,s\}$ так, что $\tau_k \in (b^{k-1}, a^k)$ для $1 < k < s$ и $\tau_1 = 0$, $\tau_s = n$. Тогда

$$P\{\forall t \in [\tau_k, \tau_{k+1}] \; p(t) = q(t)\} \ge P\{\forall t \in (a^k, b^k) \cap K_n \; p(t) = q(t)\} =$$

$$= P\{\forall t \in (a^k, b^k) \cap K_n \;\; p(t) = r_{t_k}(t)\} > \delta .$$

Поскольку $p$ является нечетким марковским процессом, то

$$P\{\forall t \in K_n \;\; p(t) = q(t)\} = \min_{1 \le k < n} P\{\forall t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]\, p(t) = q(t)\} > \delta .$$

Тогда устремим $n \to \infty$ и, используя финитарность процесса $p$, получим, что $P\{p(t) \equiv q(t)\} \ge \delta$. Таким образом,

$$P\{\forall t\, p(t) = q(t)\} \ge \sup\{\delta \,|\, \inf_{t \in T} \varphi_{q(t),q(t+)}(t) > \delta\} = \inf_{t \in T} \varphi_{q(t),q(t+)}(t) .$$

С другой стороны, $P\{\forall t\, p(t) = q(t)\} \le P\{p(t_0) = q(t_0), p(t_0+) = q(t_0+)\} = \varphi_{q(t_0),q(t_0+)}(t_0)$, для каждого $t_0 \in T$. Таким образом, $P\{\forall t\, p(t) = q(t)\} = \inf_{t \in T} \varphi_{q(t),q(t+)}(t)$.

Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что знание переходного распределения достаточно для того, чтобы восстановить распределение нечеткого скачкообразного марковского процесса, то есть определить уровень возможности каждой траектории.

Определим общий вид переходного распределения нечеткого скачкообразного марковского процесса. Для каждого индексированного семейства функций $(\varphi_{i,j})_{i,j \in I}$, $\varphi_{i,j} \in Tot(T, L)$ рассмотрим условия:

M1) $\sup_{i,j \in I} \varphi_{i,j}(t) = 1$ для каждого $t \in T$;

M2) $\varphi_{i,j}(t_0) = \sup\left\{\inf_{t \in T} \varphi_{q(t),q(t+)}(t) \,|\, q \in Pw(T, I) \wedge q(t_0) = i \wedge q(t_0+) = j\right\}$, $i, j \in I$, $t_0 \in T$.

**Теорема 2**. Переходное распределение $(\varphi_{i,j})_{i,j \in I}$ каждого скачкообразного нечеткого марковского процесса $p : T \to I$ удовлетворяет условиям M1, M2.

Доказательство.

По теореме 1, $P\{p(t) \equiv q(t)\} = \inf_{t \in T} \varphi_{q(t),q(t+)}(t)$ для произвольной $q \in Pw(T, I)$. Проверим выполнение условия M1. Для каждого $t_0 \in T$ выполняется

$$\sup_{i,j \in I} \varphi_{i,j}(t_0) = \sup\left\{\inf_{t \in T} \varphi_{q(t),q(t+)}(t) \,|\, q \in Pw(T, I)\right\} = \sup\{P\{p(t) \equiv q(t)\} \,|\, q \in Pw(T, I)\} = 1 .$$

Проверим выполнение условия M2. Для произвольных $i, j \in I, t_0 \in T$ выполняется

$$\varphi_{i,j}(t_0) = P\{p(t_0) = i, p(t_0+) = j\} =$$

$$= \sup\left\{P\{p(t) \equiv q(t)\} \,|\, q \in Pw(T, I), q(t_0) = i, q(t_0+) = j\right\} =$$

$$= \sup\left\{\inf_{t \in T} \varphi_{q(t),q(t+)}(t) \,|\, q \in Pw(T, I), q(t_0) = i, q(t_0+) = j\right\} .$$

Теорема доказана.

**Теорема 3.** Пусть $(\varphi_{i,j})_{i,j \in I}$ – индексированное семейство функций $\varphi_{i,j} \in Tot(T, L)$, для которых выполняются условия M1, M2. Тогда существует пространство возможностей $(X_1, 2^{X_1}, P_1)$, и нечеткий скачкообразный марковский процесс $p : T \times X_1 \to I$ на нем такой, что $(\varphi_{i,j})_{i,j \in I}$ является переходным распределением $p$.

Доказательство.

Определим отображение $\Phi : Tot(T, I) \to L$ равенством

$$\Phi(q)=\begin{cases}\inf\limits_{t\in T}\varphi_{q(t),q(t+)}(t),\ q\in Pw(T,I)\\ 0,\quad q\notin Pw(T,I)\end{cases}.$$

Поскольку по свойству M1 при произвольном $t_0\in T$ $\sup\limits_{i,j\in I}\varphi_{i,j}(t_0)=1$, то

$$\sup_{q\in Tot(T,I)}\Phi(q)=\sup\left\{\inf_{t\in T}\varphi_{q(t),q(t+)}(t)\mid q\in Pw(T,I)\right\}=\sup_{i,j\in I}\varphi_{i,j}(t_0)=1.$$

Положим $X_1=Tot(T,I)$ и определим на $X_1$ меру возможности $P_1$ равенством $P_1(A)=\sup\limits_{x_1\in A}\Phi(x_1)$ для всех $A\subseteq X_1$. Тогда для каждой индексированной семьи множеств $(A_s)_{s\in S}$, $P_1(\bigcup_{s\in S}A_s)=\bigcup_{s\in S}P_1(A_s)$ и $P_1(X_1)=1$. Тогда тройка $(X_1,2^{X_1},P_1)$ является пространством возможностей с нормированной мерой возможности $p:T\times X_1\to I$. Положим, $p:T\times X_1\to I$ – отображение (нечеткий процесс), определенное равенством $p(t,x_1)=x_1(t)$ для всех $x_1\in X_1$ и $t\in T$. Тогда

$$P_1\{\forall t\ p(t)=q(t)\}=P(\{x_1\in X_1\mid\forall t\ x_1(t)=q(t)\})=\Phi(q)=\inf_{t\in T}\varphi_{q(t),q(t+)}(t)$$

для каждого $q\in Pw(T,I)$ и $Tr^+(p)\subseteq Pw(T,I)$.

Докажем, что $p$ является нечетким марковским процессом.

Зафиксируем $q\in Tot(T,I)$ и $t_0\in T$. Рассмотрим два случая:

1) $P_1\{\forall t\le t_0\ p(t)=q(t)\}>0$ и $P_1\{\forall t\ge t_0\ p(t)=q(t)\}>0$. Тогда существуют функции $q_1,q_2\in Pw(T,I)$, такие, что $P_1\{\forall t\ p(t)=q_1(t)\}\wedge P_1\{\forall t\ p(t)=q_2(t)\}>0$ и $q_1(t)=q(t)$ при $t\le t_0$, и $q_2(t)=q(t)$ при $t\ge t_0$. Поскольку $q_1,q_2$ непрерывны слева, то функция $q$ непрерывна слева. Обозначим $D$, $D_1$, $D_2$ – соответственно множества точек разрыва функций $q$, $q_1$, $q_2$. Если $t_0\in D$, то $t_0\in D_2$ в силу непрерывности слева $q_2$. Кроме того, произвольная точка $t\in T\setminus t_0$ разрыва $q$ является точкой разрыва $q_1$ или $q_2$. Поэтому $D\subseteq D_1\cup D_2$, а, следовательно, множество предельных точек $D$ пустое, поскольку множества предельных точек $D_1$ и $D_2$ пустые. Тогда $q\in Pw(T,I)$ по определению. Тогда

$$P_1\{\forall t\ p(t)=q(t)\}=\inf_{t\in T}\varphi_{q(t),q(t+)}(t)=\inf_{t\in T}P_1\{p(t)=q(t),p(t+)=q(t+)\}=$$

$$=\inf_{t<t_0}P_1\{p(t)=q(t),p(t+)=q(t+)\}\wedge\inf_{t\ge t_0}P_1\{p(t)=q(t),p(t+)=q(t+)\}\ge$$

$$\ge P_1\{\forall t\le t_0\ p(t)=q(t)\}\wedge P_1\{\forall t\ge t_0\ p(t)=q(t)\}.$$

2) $P_1\{\forall t\le t_0\ p(t)=q(t)\}=0$ или $P_1\{\forall t\ge t_0\ p(t)=q(t)\}=0$. Тогда неравенство

$$P_1\{\forall t\ p(t)=q(t)\}\ge P_1\{\forall t\le t_0\ p(t)=q(t)\}\wedge P_1\{\forall t\ge t_0\ p(t)=q(t)\}$$

тривиально выполняется.

Поскольку в обоих случаях с монотонности меры возможности следует, что

$$P_1\{\forall t\ p(t)=q(t)\}\le P_1\{\forall t\le t_0\ p(t)=q(t)\}\wedge P_1\{\forall t\ge t_0\ p(t)=q(t)\},$$

то в обоих случаях

$$P_1\{\forall t\ p(t)=q(t)\}=P_1\{\forall t\le t_0\ p(t)=q(t)\}\wedge P_1\{\forall t\ge t_0\ p(t)=q(t)\}.$$

Таким образом, $q$ является нечетким марковским процессом.

Докажем, что нечеткий процесс $p$ финитарный. Для произвольной функции $q \in Pw(T,I)$ выполняется равенство

$$P_1\{\forall t\, p(t)=q(t)\} = \inf_{t_0 \in T} \varphi_{q(t_0),q(t_0+)}(t_0) = \inf_{t_0 \in T} P_1\{p(t_0)=q(t_0), p(t_0+)=q(t_0+)\}.$$

Выберем произвольную функцию $q \in Tot(T,I)$ и докажем, что $\lim\limits_{t_0 \to +\infty} P_1\{\forall t \le t_0\, p(t)=q(t)\} = P_1\{\forall t\, p(t)=q(t)\}$. Рассмотрим два случая:

1) $q \in Pw(T,I)$. Тогда для произвольных $t_0 \in T$ и $\bar{t} \in [0,t_0)$,

$$P_1\{\forall t < t_0\, p(t)=q(t)\} \le P_1\{p(\bar{t})=q(\bar{t}), p(\bar{t}+)=q(\bar{t}+)\},$$

поэтому

$$P_1\{\forall t < t_0\, p(t)=q(t)\} \le \inf_{\bar{t}<t_0} P_1\{p(\bar{t})=q(\bar{t}), p(\bar{t}+)=q(\bar{t}+)\}.$$

Устремляя $t_0 \to +\infty$, получаем

$$\lim_{t_0 \to +\infty} P_1\{\forall t \le t_0\, p(t)=q(t)\} = \lim_{t_0 \to +\infty} P_1\{\forall t < t_0\, p(t)=q(t)\} \le$$

$$\le \inf_{\bar{t} \in T} P_1\{p(\bar{t})=q(\bar{t}), p(\bar{t}+)=q(\bar{t}+)\} = P_1\{\forall t\, p(t)=q(t)\}.$$

С другой стороны,

$$P_1\{\forall t \le t_0\, p(t)=q(t)\} \ge P_1\{\forall t\, p(t)=q(t)\}$$

для каждого $t_0 \in T$ из-за монотонности меры возможности, поэтому

$$\lim_{t_0 \to +\infty} P_1\{\forall t \le t_0\, p(t)=q(t)\} = P_1\{\forall t\, p(t)=q(t)\}.$$

2) $q \notin Pw(T,I)$. Тогда либо множество точек разрыва $q$ имеет некоторую предельную точку $t^* \in T$, либо функция $q$ не является непрерывной слева в некоторой точке $t^* \in T$. В обоих случаях для каждого $t_0 > t^*$ функция $q|_{[0,t_0]}$ не может быть продолжена до функции класса $Pw(T,I)$, поэтому

$$P_1\{\forall t \le t_0\, p(t)=q(t)\} = \sup\{P_1\{p(t)=r(t)\} \mid r \in Tot(T,I), r|_{[0,t_0]} = q|_{[0,t_0]}\} \le$$

$$\le \sup\{P_1\{p(t)=r(t)\} \mid r \in Tot(T,I) \setminus Pw(T,I)\} = 0,$$

а, значит,

$$\lim_{t_0 \to +\infty} P_1\{\forall t \le t_0\, p(t)=q(t)\} = P_1\{\forall t\, p(t)=q(t)\} = 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{t_0 \to +\infty} P_1\{\forall t \le t_0\, p(t)=q(t)\} = P_1\{\forall t\, p(t)=q(t)\}$$

для всех $q \in Tot(T,I)$, т.е. процесс $p$ финитарный.

Докажем, что $(\varphi_{i,j})_{i,j \in I}$ является переходным распределением $p$. По свойству М2, для всех $i,j \in I$ и $t_0 \in T$ выполняется равенство

$$P_1\{p(t_0)=i, p(t_0+)=j\} = \sup\left\{\Phi(q) \mid q \in Pw(T,I), q(t_0)=i, q(t_0+)=j\right\} =$$

$$= \sup\left\{\inf_{t\in T} \varphi_{q(t),q(t+)}(t) \mid q\in Pw(T,I), q(t_0)=i, q(t_0+)=j\right\} = \varphi_{i,j}(t_0).$$

Таким образом, $(\varphi_{i,j})_{i,j\in I}$ является переходным распределением $p$.

Теорема доказана.

Из теорем 2, 3 следует, что условия М1, М2 являются необходимыми и достаточными для того, чтобы индексированное семейство $(\varphi_{i,j})_{i,j\in I}$ было переходным распределением НСМП.

## 4. Системы нечеткой структуры

Пусть, как и раньше, $I$ – непустое множество состояний (не обязательно конечное), которое рассматривается как пространство с дискретной топологией, и $p: T\times X \to I$ – нечеткий скачкообразный марковский процесс. Пусть $f_i: T\times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $i\in I$ – семейство функций.

Рассмотрим дифференциальное уравнение относительно функции $y: T\times X \to \mathbf{R}^n$, зависящее от параметра $x\in X_0$:

$$\dot{y}(t,x) = f_{p(t,x)}(t, y(t,x)). \tag{1}$$

**Определение 11**. Системой нечеткой структуры называется уравнение вида (1).

Для того, чтобы задать систему нечеткой структуры, нужно задать правую часть уравнения (1) и процесс $p$. Для задания процесса $p$ с точностью до распределения, согласно теоремам 2, 3, достаточно задать его переходное распределение (удовлетворяющее условиям М1, М2).

**Теорема 4**. (О существовании и единственности решения).

Предположим, что выполняются условия:

1) для каждых $t\in T$ и $i\in I$ функция $y\mapsto f_i(t,y)$ определена и непрерывна на $\mathbf{R}^n$, и для каждых $i\in I$ и $y\in \mathbf{R}^n$ функция $t\mapsto f_i(t,y)$ измерима;

2) существует функция $h: T\to[0,+\infty)$, которая ограничена на каждом ограниченном подмножестве $T$, такая, что $\| f_i(t,y)\| \le h(t)$ для всех $i\in I$, $t\in T$, $y\in \mathbf{R}^n$;

3) существует функция (константа Липшица, зависящая от времени) $L: T\to[0,+\infty)$, которая ограничена на каждом ограниченном подмножестве $T$, такая, что $\| f_i(t,y_1) - f_i(t,y_2)\| \le L(t)\|y_1 - y_2\|$ для всех $i\in I$, $t\in T$ и $y_1, y_2\in \mathbf{R}^n$.

Тогда для каждого $y_0\in \mathbf{R}^n$ существует единственный нечеткий процесс $y: T\times X_0 \to \mathbf{R}^n$, такой, что $y(0,x)=y_0$, и для каждого $x\in X_0$, функция $t\mapsto y(t,x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет уравнению (1) почти всюду (то есть удовлетворяет уравнению (1) в смысле Каратеодори).

Доказательство.

Зафиксируем элемент $x\in X_0$, точку $y_0\in \mathbf{R}^n$ и докажем, что уравнение (1) с условием $y(0,x)=y_0$ имеет единственное решение в смысле Каратеодори.

Определим функцию $g: T\times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ как функцию, что задает правую часть уравнения (1) для зафиксированного x: $g(t,y) = f_{p(t,x)}(t,y)$ для всех $(t,y)\in T\times \mathbf{R}^n$. По условию 1 теоремы функция $y\mapsto g(t,y)$ непрерывна на $\mathbf{R}^n$ для каждого фиксированного $t\in T$.

Поскольку функция $t\mapsto p(t,x)$ принадлежит классу $Pw(T,I)$ (кусочно-постоянная), то существует монотонно возрастающая последовательность чисел $a_k$, $k\ge 1$, такая, что $\bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k, a_{k+1}) = T$, и функция $t \mapsto p(t,x)$ принимает постоянное значение на $[a_k, a_{k+1})$ для каждого $k \geq 1$. Обозначим это постоянное значение на $[a_k, a_{k+1})$ как $i_k$. Тогда

$$\{t \in T \mid g(t, y_1) \in A\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{t \in [a_k, a_{k+1}) \mid f_{i_k}(t, y_1) \in A\}$$

для произвольного $y_1 \in \mathbf{R}^n$ и борелевского множества $A \subseteq \mathbf{R}^d$. Поскольку функции $t \mapsto f_i(t, y_1)$ измеримы для всех $i \in I$ по условию 1 теоремы, то $\{t \in T \mid g(t, y_1) \in A\}$ измеримо (в смысле меры Лебега) как счетное объединение измеримых множеств. Таким образом, функция $t \mapsto g(t, y_1)$ измерима для каждого $y_1 \in \mathbf{R}^n$.

Из условия 2 теоремы следует, что $\|g(t, y_1)\| \leq h(t)$ для всех $t \in T$. Также из условия 3 следует, что $\|g(t, y_1) - g(t, y_2)\| \leq L(t)\|y_1 - y_2\|$ для всех $y_1, y_2 \in \mathbf{R}^n$. Следовательно, для уравнения $\dot{y} = g(t, y)$, $y(0, x) = y_0$ выполнены условия теоремы Каратеодори о существовании и единстве решений дифференциальных уравнений [9]. В силу произвольности элемента $x \in X_0$ получается, что существует единственный нечеткий процесс $y : T \times X_0 \to \mathbf{R}^n$, удовлетворяющий уравнению (1) в смысле Каратеодори, и начальное условие $y(0, x) = y_0$.

Теорема доказана.

Неформально, функционирование системы нечеткой структуры (1) можно описать на основе теоремы 1 таким образом. Пусть $(\varphi_{i,j})_{i,j \in I}$ – переходное распределение процесса $p$. Система в каждый момент времени $t \in T$ имеет определенную структуру $i \in I$ и параметры $y(t)$. В каждый момент времени $t \in T$ структура системы может либо измениться на $j \in I \setminus \{i\}$ с возможностью $\varphi_{i,j}(t)$, либо остаться той же с возможностью $\varphi_{i,i}(t)$. При этом система может изменить структуру конечное число раз на каждом ограниченном промежутке времени. На каждом промежутке времени, на котором структура $i$ системы постоянна, параметры системы $y(t)$ изменяются согласно уравнению $\dot{y}(t) = f_i(t, y(t))$. При изменении структуры параметры не могут скачкообразно изменяться.

Заметим, что основные свойства процесса решения уравнения (1) могут быть найдены методами теории управления (рассматривая траектории процесса как возможные управления системой (1), стоимости которых соответствуют уровням возможности).

## 5. Выводы

В статье на базе теории возможностей построен нечеткий аналог системы случайной структуры, для чего построены основы теории нечетких скачкообразных марковских процессов с непрерывным временем (НСМП). Основные результаты, полученные в статье для НСМП, включают формальное определение НСМП в терминах теории возможностей и понятия переходного распределения НСМП, интерпретацию и взаимосвязь переходного распределения НСМП и распределения процесса (теорема 1), общий вид переходного распределения НСМП (теоремы 2, 3). Эти результаты использованы для построения систем нечеткой структуры. В частности, дано формальное определение системы нечеткой структуры, аналогичное системе случайной структуры, и предложено использовать переходные распределения НСМП для практического задания систем нечеткой структуры с точностью до распределения. Также доказаны условия, при которых система нечеткой структуры имеет единственное решение (теорема 4).

Полученные результаты могут быть полезными при моделировании экономических, сложных технических и прочих систем с изменчивой или неопределенной структурой, для которых вероятностные модели не могут быть применены, например, из-за отсутствия или недостаточности статистической информации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Zadeh L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility / L.A. Zadeh // Fuzzy Sets and Systems. – 1978. – N 1. – P. 3 – 28.
2. Дюбуа Д. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике / Д. Дюбуа, А. Прад. – М.: Радио и связь, 1990. – 288 с.
3. Пытьев Ю.П. Возможность как альтернатива вероятности. Математические и эмпирические основы, применение / Пытьев Ю.П.– М.: Физматлит, 2007. – 464 с.
4. De Cooman G. Possibility theory. Part I: Measure- and integral-theoretic groundwork / G. de Cooman // Int. J. of General Systems. – 1997. – N 25. – P. 291 – 371.
5. Yeoul Park J. Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations / Park J. Yeoul, Han H. Keun // Internat.J.Math.&Math.Sci. – 1999. – Vol. 22 (2). – P. 115 – 131.
6. Avrachenkov K. Fuzzy Markov Chains and Decision-Making / K. Avrachenkov, E. Sanchez // Fuzzy Optimization and Decision Making. – 2002. – Vol.1, N 2. – P. 143 – 159.
7. Kats I.Y. Stability and Stabilization on Nonlinear Systems with Random Structure / I.Y. Kats, A.A. Martynyuk. – Taylor and Francis, London and New York, 2002. – 236 p.
8. Белоконов И.В. Статистический анализ динамических систем (анализ движения летательных аппаратов) / Белоконов И.В. – Самара: СГАУ им. Королева, 2001. – 64 с.
9. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / Филиппов А.Ф. — М.: Наука, 1985. – 225 с.


*Стаття надійшла до редакції 02.04.2012*