

ПЛАНЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ВЫСОКОЙ ТОЧНОСТИ

*Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт", Киев, Украина

Анотація. Досліджені статистичні властивості $ЛП_\tau$ послідовностей. Проведено їх ранжування за критерієм мінімального коефіцієнта парної кореляції. Наведено плани експериментів з можливістю послідовного планування. Отримані результати підтверджують висунуту гіпотезу про перевагу $ЛП_\tau$ планів експериментів при апроксимації вихідних даних та одержанні структур моделей, відповідних структурам істинних моделей.

Ключові слова: $ЛП_\tau$ рівномірно розподілені послідовності, планування експерименту, кореляція, апроксимація.

Аннотация. Исследованы статистические свойства $ЛП_\tau$ последовательностей. Проведено их ранжирование по критерию минимального коэффициента парной корреляции. Приведены планы экспериментов с возможностью последовательного планирования. Полученные результаты подтверждают выдвинутую гипотезу о преимуществе $ЛП_\tau$ планов экспериментов при аппроксимации исходных данных и получении структур моделей, соответствующих структурам истинных моделей.

Ключевые слова: $ЛП_\tau$ равномерно распределенные последовательности, планирование эксперимента, корреляция, аппроксимация.

Abstract. Statistic features of the LP_τ sequences are examined in the article. They are ranged according to the criterion of minimum coefficient of pair correlation. The plans of experiments with the ability of consistent planning are presented as well. Received results confirm the advanced hypothesis about advantage of the LP_τ plans of experiments in approximation of the initial data and receiving the architectures of models corresponding to the architectures of the true models.

Keywords: LP_τ uniformly distributed sequences, experiment designs, correlation, approximation.

1. Введение. Постановка проблемы

Планы экспериментов должны соответствовать различным критериям качества. Критерии, позволяющие выбрать структуру математической модели, практически не используются. Статистические свойства планов, в которых точки размещены квазислучайно в многофакторном пространстве (по известным публикациям), исследованы слабо.

При выборе структуры математической модели главные эффекты и эффекты взаимодействий должны быть ортогональными или слабо коррелированными. Это требование достигается путем равномерного распределения точек плана эксперимента в многофакторном пространстве. $ЛП_\tau$ последовательности являются наиболее равномерно распределенными в настоящее время последовательностями.

Применение $ЛП_\tau$ последовательностей не ограничивается вычислением многомерных интегралов, случайным поиском ($ЛП_\tau$ поиск), задачами многокритериальной оптимизации. В [1] приведены статистические свойства некоторых планов на основе $ЛП_\tau$ равномерно распределенных последовательностей. О возможности их использования в качестве планов экспериментов упоминается в [2].

2. Анализ публикаций по теме исследования

В [1] изложено оптимальное планирование эксперимента в системе «план эксперимента – структура модели». Предложены рекомендации по использованию ЛП_τ планов экспериментов как планов, имеющих значительное число уровней $s_i = N$ и позволяющих получить больше исходной информации об аппроксимируемой поверхности отклика для непрерывных факторов. Однако конкретные планы экспериментов не приведены.

Применение квазислучайных последовательностей в имитационном моделировании рассматривается в статье [3]. Показано отличие между квазислучайными и псевдослучайными последовательностями. Рассмотрены некоторые статистические свойства ЛП_τ последовательностей.

Разработанные И.М. Соболев ЛП_τ последовательности, предназначенные изначально для расчета многомерных интегралов, стали позже применяться и для реализации поисковых процедур. Сетки на основе ЛП_τ последовательностей, построенные в k -мерном пространстве параметров исследуемых функций, позволяют определить, какие из варьируемых параметров с заданной вероятностью оказывают существенное влияние на значения критериев качества. По заданной метрике между текущим значением критерия качества и его экстремальным значением можно определить области концентрации наилучших значений критериев качества, построить в многомерном пространстве критериев качества множество Парето [4, 5].

Имеются публикации об использовании ЛП_τ последовательностей в задачах оптимального проектирования машин и механизмов [6–8]. При оптимальном проектировании машин и механизмов значительный интерес представляет решение вопросов снижения размерности пространства поиска в целях сокращения объема исследовательских работ. В [6, 7] использовался комбинированный способ построения матрицы планирования методом случайного баланса с помощью ЛП_τ сеток и дальнейшей статистической обработки результатов экспериментов. Использование данной методики обусловлено значительно лучшей оценкой равномерности распределения ЛП_τ последовательностей по осям и в пространстве параметров по сравнению с другими последовательностями [6].

Нерешенные вопросы

Использование ЛП_τ последовательностей в качестве планов экспериментов носит несистемный и ограниченный характер, в основном, связанный с вопросами оптимизации. Научных публикаций по этому вопросу мало. Не приводятся конкретные планы экспериментов. Отсутствуют статистические исследования по выявлению коррелированности ЛП_τ последовательностей и их ранжирования. Не рассматривалось использование ЛП_τ последовательностей при последовательном планировании экспериментов. Не исследовалось качество получаемых моделей.

Цель статьи

Исследование статистических свойств ЛП_τ равномерно распределенных последовательностей. Их ранжирование по критерию минимального коэффициента парной корреляции. Построение планов экспериментов с возможностью последовательного планирования. Проверка возможности построения адекватных математических моделей путем аппроксимации известной функции с помощью планов на основе ЛП_τ последовательностей и сравнения их с многофакторными регулярными планами (МРП).

3. Статистические свойства $ЛП_\tau$ равномерно распределенных последовательностей

Разработанные И.М. Соболем $ЛП_\tau$ последовательности обладают более хорошими свойствами равномерности распределения, чем любые другие последовательности точек в многомерном единичном кубе. Распределение $ЛП_\tau$ последовательностей в двумерном пространстве приведено на рис. 1.

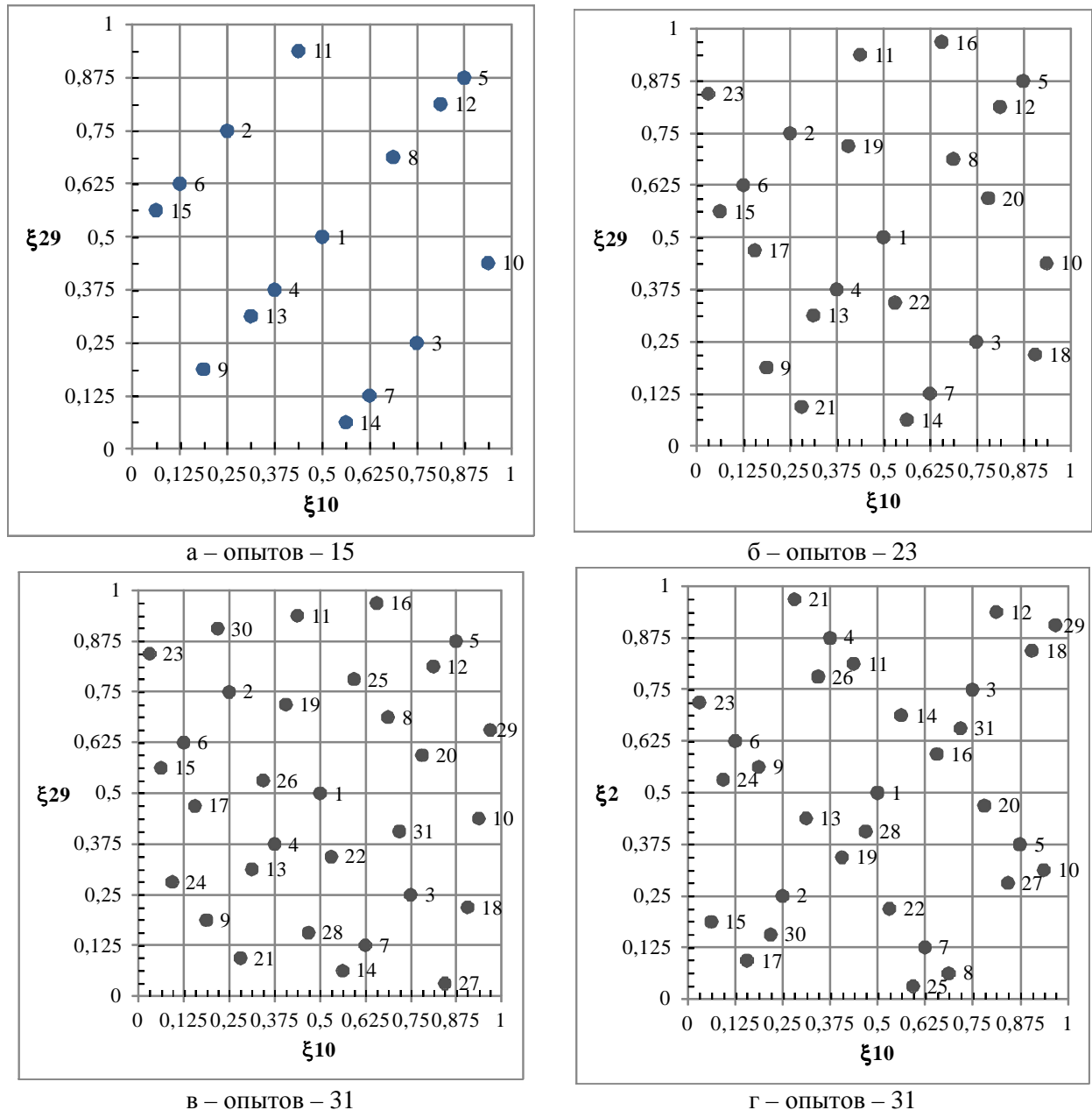


Рис. 1. Расположение точек $ЛП_\tau$ последовательностей на плоскости

Использование точек $ЛП_\tau$ последовательностей, равномерно распределенных в этом кубе, обеспечивает более высокую точность вычислений по некоторым алгоритмам Монте-Карло и более равномерный просмотр пространства параметров при решении задач многофакторной оптимизации для поиска экстремальных значений критериев качества. Теория и алгоритмы построения $ЛП_\tau$ равномерно распределенных последовательностей приведены в многочисленных работах д.ф.-м.н. И.М. Соболя [8, с. 133–158].

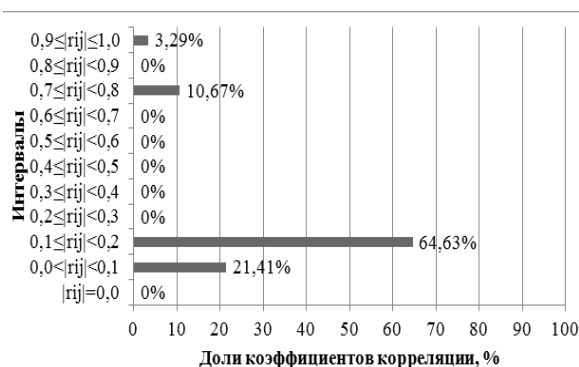
Свойства ЛП_τ последовательностей:

1. Выбор в качестве точек плана эксперимента в многомерном пространстве ЛП_τ равномерно распределенных последовательностей позволяет получить сравнительно слабо коррелированные главные эффекты и эффекты взаимодействий факторов при выборе структуры математической модели.

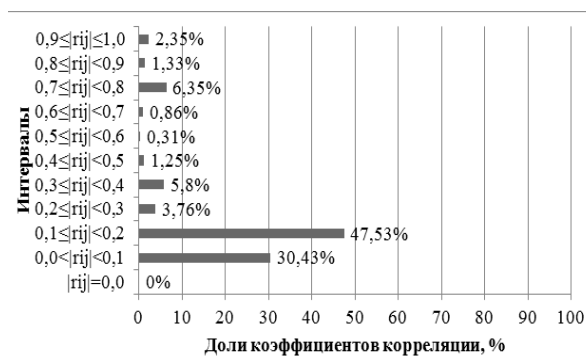
2. С увеличением числа опытов N вероятность получения в плане эксперимента точек, достаточно близких к точкам экстремума и перегиба поверхности отклика, стремится к единице, а коэффициент корреляции r_{ij} между различными эффектами стремится к нулю [1, с. 106].

3. Проекция любой ЛП_τ последовательности из N точек в k -мерном пространстве на $(k - j)$ -мерную грань ($1 \leq j \leq k - 1$) многомерного единичного куба образует также равномерно распределенную последовательность из N проекций точек [8, с. 134].

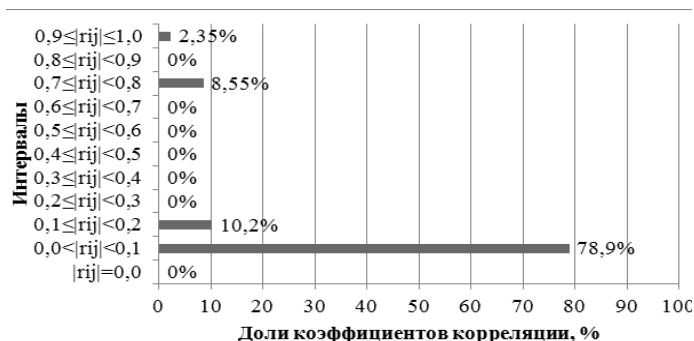
Точки плана эксперимента должны быть равномерно расположены в пространстве параметров R^k . Методика построения ЛП_τ последовательностей [8] позволяет построить максимальное число последовательностей, равное 51, количество точек – 2^{20} . В исследовании использовались все последовательности. Оно показало, что равномерно заполняют пространство следующие количества точек: $N = 1; 3; 7; 15; 31; 63$ и т. д. Проанализировав корреляционные матрицы, построенные для точек $N = 15; 23; 31$, были выявлены последовательности с коэффициентами парной корреляции $|r_{ij}| = 1$ (рис. 2).



Среднее абсолютных величин коэффициентов корреляции 0,2350. Среднее квадратичное отклонение 0,2370: а) $N = 15$



Среднее абсолютных величин коэффициентов корреляции 0,2024. Среднее квадратичное отклонение 0,2316: б) $N = 23$



Среднее абсолютных величин коэффициентов корреляции 0,1623. Среднее квадратичное отклонение 0,2270: в) $N = 31$

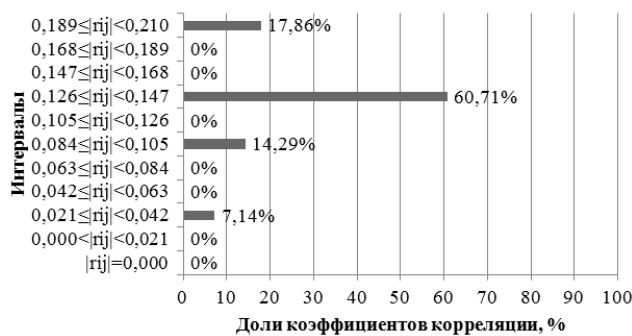
Рис. 2. Распределение коэффициентов корреляции ЛП_τ последовательностей ($k = 51$)

Ранжирование последовательностей проводилось по следующей методике. Находилось минимальное значение коэффициента корреляции r_{ij} . К номерам последовательностей, соответствующих $r_{ij\min}$, прибавляются остальные номера с условием минимальной коррелированности со всеми выбранными ранее. При этом исследование проводилось для трех матриц с целью обеспечения возможности последовательного планирования. Коэффициенты корреляции между последовательностями не должны превышать по абсолютной величине значения 0,4. Ранжированные таким методом номера последовательностей представлены в табл. 1.

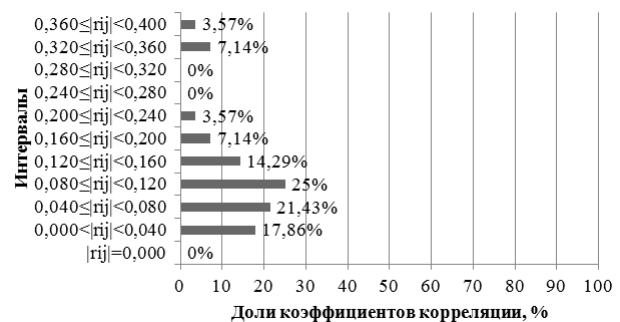
Таблица 1. Номера ЛП_τ последовательностей, ранжированных по $r_{ij\min}$

| | Номера ЛП _τ последовательностей | | | | | | | |
|--------------------|--|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | ξ10 | ξ29 | ξ2 | ξ7 | ξ4 | ξ14 | ξ26 | ξ28 |
| | Коэффициенты парной корреляции $\max r_{ij} $ | | | | | | | |
| $N_1 = 1 \dots 15$ | 0,0857 | 0,0857 | 0,0286 | 0,2000 | 0,2000 | 0,2000 | 0,2000 | 0,2000 |
| $N_2 = 1 \dots 23$ | 0,0029 | 0,0029 | 0,0683 | 0,2108 | 0,1810 | 0,3532 | 0,3888 | 0,3590 |
| $N_3 = 1 \dots 31$ | 0,0452 | 0,0452 | 0,1097 | 0,0839 | 0,0968 | 0,0968 | 0,0968 | 0,1097 |

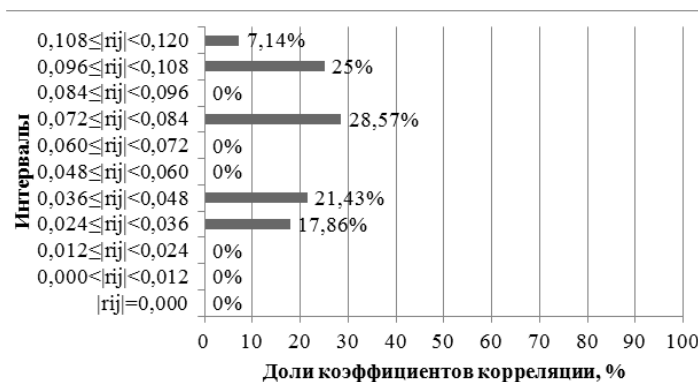
В результате ранжирования ЛП_τ последовательностей было получено максимально возможное количество слабо коррелированных последовательностей $k = 8$ ($N = 15$).



Среднее абсолютных величин коэффициентов корреляции 0,1367. Среднее квадратичное отклонение 0,0441: а) $N = 15$



Среднее абсолютных величин коэффициентов корреляции 0,1251. Среднее квадратичное отклонение 0,0984: б) $N = 23$



Среднее абсолютных величин коэффициентов корреляции 0,0714. Среднее квадратичное отклонение 0,0270: в) $N = 31$

Рис. 3. Диаграммы распределения коэффициентов корреляции ЛП_τ последовательностей ξ10, ξ29, ξ2, ξ7, ξ4, ξ14, ξ26, ξ28

Для последующего исследования были взяты такие значения: $k = 8$; $N_1 = 1...15$; $N_2 = 1...23$; $N_3 = 1...31$. По ним были построены корреляционные матрицы. Распределение коэффициентов корреляции для каждой матрицы приведено на рис. 3.

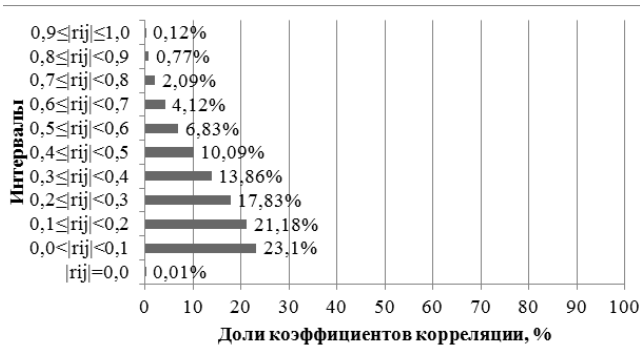
Результаты исследования показали, что максимальные коэффициенты корреляции для ранжированных последовательностей не превышают 0,3888.

Полученные последовательности можно использовать в качестве планов экспериментов с возможностью последовательного планирования. Последовательное планирование заключается в том, что изначально для проведения экспериментов берется 15 точек. Если таковых окажется недостаточно, то, используя ранее полученные результаты, проводят эксперименты для точек $N = 16...23$ и $N = 24...31$. Точки выбранных последовательностей приведены в табл. 2.

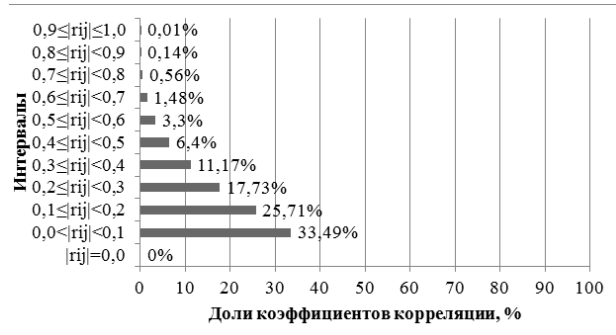
Таблица 2. Точки ЛП_г последовательностей

| | ξ_{10} | ξ_{29} | ξ_2 | ξ_7 | ξ_4 | ξ_{14} | ξ_{26} | ξ_{28} |
|----|------------|------------|---------|---------|---------|------------|------------|------------|
| 1 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 |
| 2 | 0,25 | 0,75 | 0,25 | 0,75 | 0,75 | 0,25 | 0,25 | 0,75 |
| 3 | 0,75 | 0,25 | 0,75 | 0,25 | 0,25 | 0,75 | 0,75 | 0,25 |
| 4 | 0,375 | 0,375 | 0,875 | 0,875 | 0,625 | 0,125 | 0,625 | 0,125 |
| 5 | 0,875 | 0,875 | 0,375 | 0,375 | 0,125 | 0,625 | 0,125 | 0,625 |
| 6 | 0,125 | 0,625 | 0,625 | 0,125 | 0,375 | 0,375 | 0,875 | 0,875 |
| 7 | 0,625 | 0,125 | 0,125 | 0,625 | 0,875 | 0,875 | 0,375 | 0,375 |
| 8 | 0,6875 | 0,6875 | 0,0625 | 0,9375 | 0,4375 | 0,4375 | 0,6875 | 0,4375 |
| 9 | 0,1875 | 0,1875 | 0,5625 | 0,4375 | 0,9375 | 0,9375 | 0,1875 | 0,9375 |
| 10 | 0,9375 | 0,4375 | 0,3125 | 0,1875 | 0,6875 | 0,1875 | 0,9375 | 0,6875 |
| 11 | 0,4375 | 0,9375 | 0,8125 | 0,6875 | 0,1875 | 0,6875 | 0,4375 | 0,1875 |
| 12 | 0,8125 | 0,8125 | 0,9375 | 0,0625 | 0,8125 | 0,3125 | 0,0625 | 0,3125 |
| 13 | 0,3125 | 0,3125 | 0,4375 | 0,5625 | 0,3125 | 0,8125 | 0,5625 | 0,8125 |
| 14 | 0,5625 | 0,0625 | 0,6875 | 0,8125 | 0,0625 | 0,0625 | 0,3125 | 0,5625 |
| 15 | 0,0625 | 0,5625 | 0,1875 | 0,3125 | 0,5625 | 0,5625 | 0,8125 | 0,0625 |
| 16 | 0,65625 | 0,96875 | 0,59375 | 0,46875 | 0,34375 | 0,15625 | 0,09375 | 0,40625 |
| 17 | 0,15625 | 0,46875 | 0,09375 | 0,96875 | 0,84375 | 0,65625 | 0,59375 | 0,90625 |
| 18 | 0,90625 | 0,21875 | 0,84375 | 0,71875 | 0,59375 | 0,40625 | 0,34375 | 0,65625 |
| 19 | 0,40625 | 0,71875 | 0,34375 | 0,21875 | 0,09375 | 0,90625 | 0,84375 | 0,15625 |
| 20 | 0,78125 | 0,59375 | 0,46875 | 0,59375 | 0,96875 | 0,03125 | 0,71875 | 0,28125 |
| 21 | 0,28125 | 0,09375 | 0,96875 | 0,09375 | 0,46875 | 0,53125 | 0,21875 | 0,78125 |
| 22 | 0,53125 | 0,34375 | 0,21875 | 0,34375 | 0,21875 | 0,28125 | 0,96875 | 0,53125 |
| 23 | 0,03125 | 0,84375 | 0,71875 | 0,84375 | 0,71875 | 0,78125 | 0,46875 | 0,03125 |
| 24 | 0,09375 | 0,28125 | 0,53125 | 0,53125 | 0,15625 | 0,34375 | 0,65625 | 0,09375 |
| 25 | 0,59375 | 0,78125 | 0,03125 | 0,03125 | 0,65625 | 0,84375 | 0,15625 | 0,59375 |
| 26 | 0,34375 | 0,53125 | 0,78125 | 0,28125 | 0,90625 | 0,09375 | 0,90625 | 0,84375 |
| 27 | 0,84375 | 0,03125 | 0,28125 | 0,78125 | 0,40625 | 0,59375 | 0,40625 | 0,34375 |
| 28 | 0,46875 | 0,15625 | 0,40625 | 0,40625 | 0,53125 | 0,46875 | 0,03125 | 0,21875 |
| 29 | 0,96875 | 0,65625 | 0,90625 | 0,90625 | 0,03125 | 0,96875 | 0,53125 | 0,71875 |
| 30 | 0,21875 | 0,90625 | 0,15625 | 0,65625 | 0,28125 | 0,21875 | 0,28125 | 0,96875 |
| 31 | 0,71875 | 0,40625 | 0,65625 | 0,15625 | 0,78125 | 0,71875 | 0,78125 | 0,46875 |

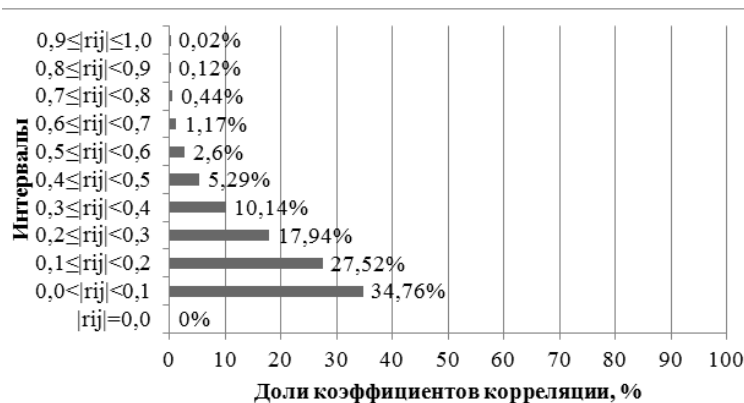
Для получения адекватной структуры уравнения регрессии с максимально устойчивыми коэффициентами используют ортогональные контрасты. Теоретические сведения и алгоритмы построения ортогональных нормированных контрастов приведены в [1, с. 54-63]. Коэффициенты корреляции главных эффектов и взаимодействий ортогональных контрастов показаны на рис. 4.



Среднее абсолютных величин коэффициентов корреляции 0,2676. Среднее квадратичное отклонение 0,1948: а) $N = 15$



Среднее абсолютных величин коэффициентов корреляции 0,1978. Среднее квадратичное отклонение 0,1578: б) $N = 23$



Среднее абсолютных величин коэффициентов корреляции 0,1862. Среднее квадратичное отклонение 0,1491: в) $N = 31$

Рис. 4. Диаграммы распределения коэффициентов корреляции главных эффектов и взаимодействий ЛП_τ последовательностей ξ_{10} , ξ_{29} , ξ_2 , ξ_7 , ξ_4 , ξ_{14} , ξ_{26} , ξ_{28}

4. Вычислительный эксперимент

Сравнение результатов аппроксимации функции Химмельблау [9, с. 80] с помощью моделей многофакторных регулярных планов: $4^2 // 16$, $5^2 // 25$ и планов на основе ЛП_τ последовательностей: $15^2 // 15$, $31^2 // 31$.

Функция Химмельблау:

$$f(X) = (X_1^2 + X_2 - 11)^2 + (X_1 + X_2^2 - 7)^2,$$

где $X_1 = -6,0 \dots 6,0$; $X_2 = -6,0 \dots 6,0$.

Погрешности ошибок результатов экспериментов не вводились, так как они бы указали истинные результаты аппроксимации.

Модель плана $15^2 // 15$ с ортогональными контрастами:

$$\hat{y}_1 = 230,395 + 104,731 \cdot v_2 + 244,832 \cdot z_2 + 303,923 \cdot z_1 \cdot x_2 + 106,031 \cdot z_1 + 114,322 \cdot v_1 - 48,6134 \cdot v_1 \cdot v_2 + 32,6214 \cdot x_2,$$

$$x_1 = 0,190476 \cdot X_1,$$

$$z_1 = 1,61538 \cdot (x_1^2 - 0,380952),$$

$$v_1 = 6,99592 \cdot (x_1^4 - 0,965015 \cdot x_1^2 + 0,107955),$$

$$x_2 = 0,190476 \cdot X_2,$$

$$z_2 = 1,61538 \cdot (x_2^2 - 0,380952),$$

$$v_2 = 6,99592 \cdot (x_2^4 - 0,965015 \cdot x_2^2 + 0,107955).$$

Модель плана $31^2 // 31$ с ортогональными контрастами:

$$\hat{y}_2 = 243,018 + 323,731 \cdot z_2 + 186,533 \cdot v_1 + 186,227 \cdot v_2 + 160,781 \cdot z_1 + 220,529 \cdot z_1 \cdot x_2 + 220,956 \cdot x_1 \cdot z_2 + 46,4594 \cdot x_1,$$

$$x_1 = 0,177778 \cdot X_1,$$

$$z_1 = 1,55172 \cdot (x_1^2 - 0,355556),$$

$$v_1 = 5,38793 \cdot (x_1^4 - 0,911111 \cdot x_1^2 + 0,0967111),$$

$$x_2 = 0,177778 \cdot X_2,$$

$$z_2 = 1,55172 \cdot (x_2^2 - 0,355556),$$

$$v_2 = 5,38793 \cdot (x_2^4 - 0,911111 \cdot x_2^2 + 0,0967111).$$

Линии равных значений функций и точки планов показаны на рис. 5–8. Полученная

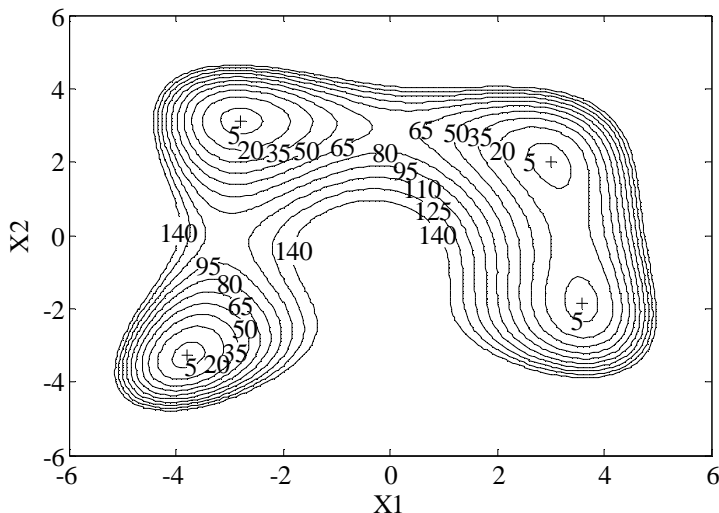


Рис. 5. Линии уровней функции Химмельблау

модель плана $4^2 // 16$ хорошо аппроксимирует заданные точки, однако не соответствует истинной модели в других точках (рис. 7). Модель плана $15^2 // 15$ не соответствует истинной модели (Химмельблау). При увеличении числа уровней и использовании плана $31^2 // 31$ модель соответствует полностью истинной модели, то есть модели Химмельблау. Для ЛП_τ планов вероятность расположения пробных точек к экстремальным значениям истинной модели существенно выше, чем для многофакторных регулярных планов.

Максимальная степень полинома плана $5^2 // 25$, как и модели Химмельблау, равна четырем, в то время как модели плана $4^2 // 16$ – трем. Поэтому модель плана $4^2 // 16$ не соответствует модели Химмельб-

лау, а модель плана $5^2 // 25$ – соответствует. Однако в реальных прикладных задачах исследователю истинная модель не известна.

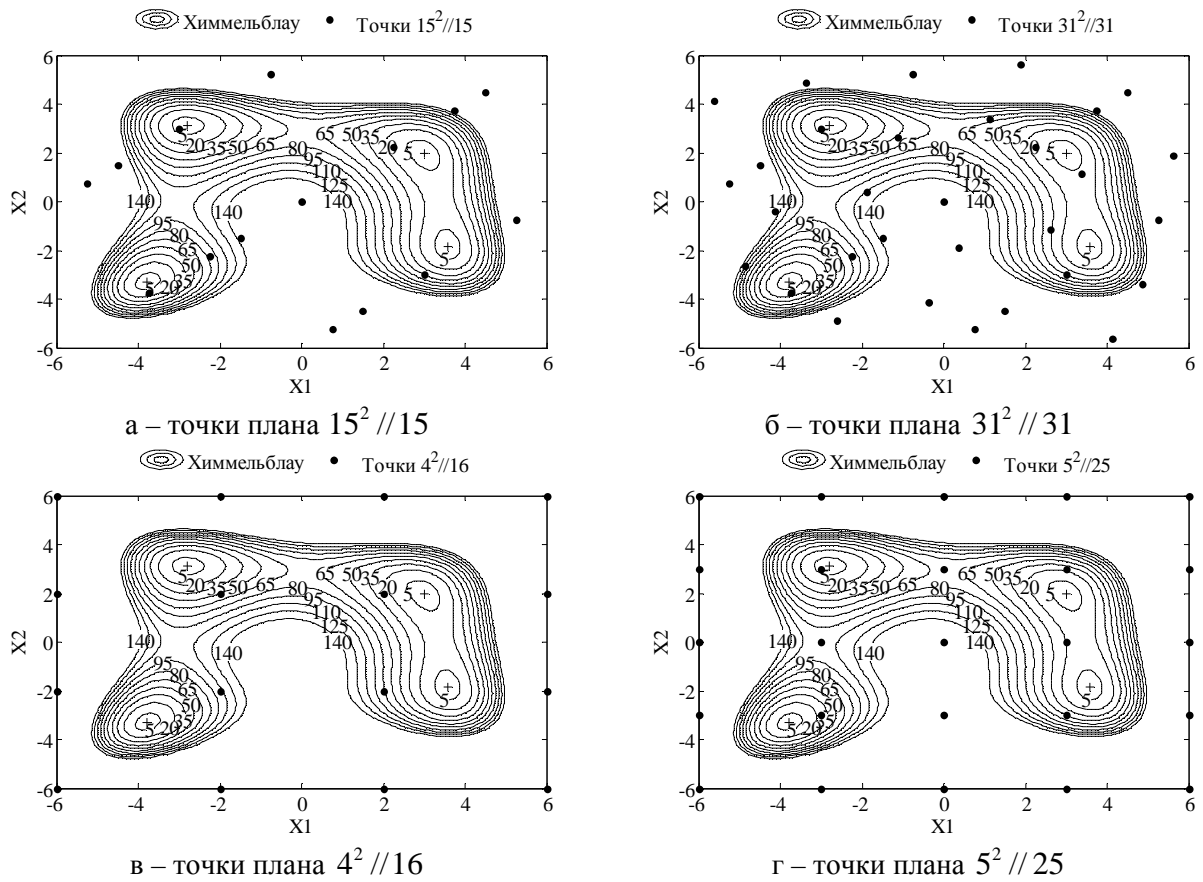


Рис. 6. Размещение точек планов аппроксимации

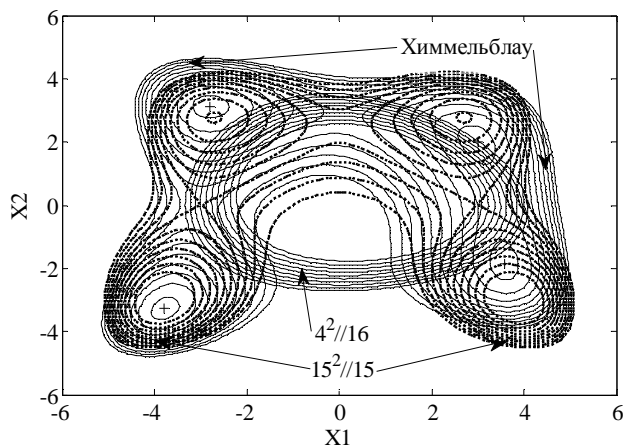


Рис. 7. Линии уровней функции Химмельблау, моделей: $15^2 // 15$, $4^2 // 16$

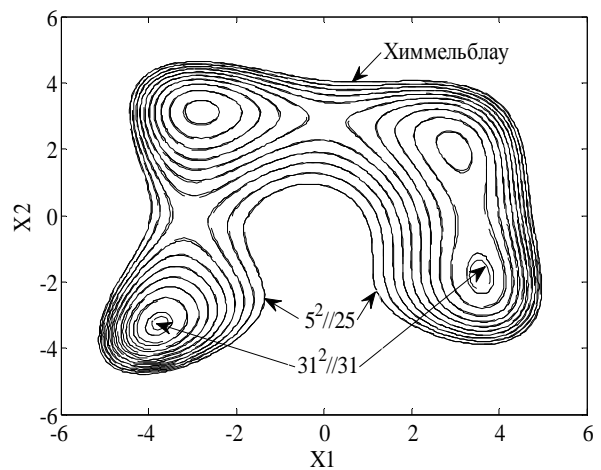


Рис. 8. Линии уровней функции Химмельблау, моделей планов: $31^2 // 31$, $5^2 // 25$

Поэтому для решения реальных задач необходимо использовать план на основе $ЛП_r$ равномерно распределенных последовательностей $31^2 // 31$. Анализ информативности моделей приведен в табл. 3.

Таблица 3. Анализ информативности моделей

| | | ЛП _r | | МРП | |
|---|---|-----------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|
| | | 15 ² // 15 | 31 ² // 31 | 4 ² // 16 | 5 ² // 25 |
| Доля рассеивания, объясняемая моделью | | 0,987966 | 0,996373 | 1,000000 | 1,000000 |
| Коэффициент множественной корреляции | | 0,993965 | 0,998185 | 1,000000 | 1,000000 |
| | скорректированный с учетом степеней свободы | 0,989415 | 0,997731 | 0,985602 | 1,000000 |
| Число обусловленности COND | | 2,059700 | 1,41596 | 1,000000 | 1,000000 |
| Анализ остатков по исходной матрице | | | | | |
| Средняя абсолютная погрешность аппроксимации | | 16,12690 | 2,156060 | 2,27374e-13 | 0,000480 |
| Средняя погрешность аппроксимации в процентах | | 96,26810 | 4,206960 | 2,58356e-13 | 0,002568 |
| Анализ остатков по контрольной матрице $N = 63$ | | | | | |
| Средняя абсолютная погрешность аппроксимации | | 61,07780 | 2,335160 | 221,7120 | 0,000611 |
| Средняя погрешность аппроксимации в процентах | | 68,99710 | 2,707620 | 586,6440 | 0,002128 |

5. Выводы

Исследованные планы экспериментов на основе $ЛП_r$ последовательностей (табл. 2) характеризуются минимально возможной коррелированностью ($|r_{ij}| \leq 0,4$). Полученные результаты подтверждают выдвинутую гипотезу о преимуществе $ЛП_r$ планов экспериментов при аппроксимации исходных данных и получении структур моделей, соответствующих структурам истинных моделей. Эти планы позволяют проводить последовательное планирование экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Радченко С.Г. Методология регрессионного анализа / Радченко С.Г. – К.: Корнійчук, 2011. – 376 с.
2. Орлов В.А. Новое семейство квазислучайных последовательностей / В.А. Орлов, В.И. Рейзлин // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320, № 2. – С. 24 – 26.
3. Ermakov S. On the Quasi-Random Sequence in the Random Processes Modeling Algorithms // S. Ermakov, T. Tovstik // Focus on Applied Statistics. Nova Science Publishers. – 2003. – P. 91 – 102.
4. Соболев И.М. ЛП-поиск и задачи оптимального проектирования / И.М. Соболев, Р.Б. Статников // Проблемы случайного поиска: сб. статей. – Рига: Зинатне, 1972. – С. 117 – 135.
5. Соболев И.М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара / Соболев И.М. – М.: Физматлит, 1969. – 288 с.
6. Планирование экспериментов с помощью $ЛП_r$ -сеток при решении задач оптимального проектирования / В.Г. Крейнин, В.И. Сергеев, И.Н. Статников [и др.] // АН СССР. Моделирование задач машиноведения на ЭВМ: сб. статей. – М.: Наука, 1967. – С. 26 – 31.
7. Использование методов планирования экспериментов при проектировании динамических систем / О.Б. Балакшин, В.П. Гусев, В.А. Ковановская [и др.] // АН СССР. Моделирование задач машиноведения на ЭВМ: сб. статей. – М.: Наука, 1967. – С. 32 – 36.

8. Соболев И.М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями / И.М. Соболев, Р.Б. Статников. – [2-е изд., перераб. и доп.]. – М.: Дрофа, 2006. – 175 с.
9. Реклейте Г. Оптимизация в технике: в 2-х кн. / Реклейте Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К.; пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – Кн. 1. – 345 с.

Стаття надійшла до редакції 27.09.2013