УДК 519.61:621.3

В.П. ВОЛОБОЕВ*, В.П. КЛИМЕНКО*

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ФИЗИЧЕСКИЙ ОБЪЕКТ

*Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев, Украина

Анотація. *Показано, що вірогідність результатів моделювання фізичних об'єктів, дискретна модель яких описується системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), залежить не від поганої обумовленості матриці, а від некоректного вибору змінних СЛАР на етапі складання рівнянь методом вузлових потенціалів або його аналогів, а сам метод є окремий випадок методу коректної постановки завдання. Запропоновано методику перевірки на коректність СЛАР, складеної методом вузлових потенціалів, що має невироджену й симетричну матрицю, і якщо необхідно перетворення її до коректного виду.*

Ключові слова: *система, моделювання, некоректне завдання, погана обумовленість, система лінійних алгебраїчних рівнянь, метод вузлових потенціалів, метод коректної постановки завдання, перевірка на коректність.*

Аннотация. *Показано, что достоверность результатов моделирования физических объектов, дискретная модель которых описывается системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), зависит не от плохой обусловленности матрицы, а от некорректного выбора переменных СЛАУ на этапе составления уравнений методом узловых потенциалов или его аналогами, а сам метод есть частный случай метода корректной постановки задачи. Предложена методика проверки на корректность СЛАУ, составленной методом узловых потенциалов, имеющей невырожденную и симметричную матрицу, и если необходимо преобразование её к корректному виду.*

Ключевые слова: *система, моделирование, некорректная задача, плохая обусловленность, система линейных алгебраических уравнений, метод узловых потенциалов, метод корректной постановки задачи, проверка на корректность.*

Abstract. *The paper shows that reliability of results of simulation of the physical objects, which discrete model is described by a system of the linear algebraic equations (SLAE) depends not on poor-conditioned matrix but on an incorrect choice of variable SLAE at generation of equations stage by a node potential method or its analogues, and the method is a special case of a method of correct statement of a problem. It was suggested the check-out method on a correctness of SLAE, made by a node potential method, having nonsingular and a symmetric matrix and if it is necessary its transformation to a correct form.*

Keywords: *system, simulation, incorrect problem, poor-conditioned, system of the linear algebraic equations, node potential method, method of correct statement of a problem, check-out on a correctness.*

1. Введение

Многие задачи моделирования физических (технических) объектов сводятся к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Поскольку все вычисления при решении таких систем выполняются с конечным числом значащих цифр, то точность может значительно теряться из-за ошибок округления. Плохо обусловленной (неустойчивой) системой или в более общей формулировке - некорректно поставленной задачей принято считать ту задачу, которая при фиксированном уровне ошибок входных данных и точности вычислений не гарантирует в решении никакой точности. В качестве априорной наихудшей оценки возможных ошибок решения СЛАУ используется число обусловленности [1]. Как следует из литературы, разработка методов решения некорректно поставленных задач рассматривается как чисто математическая задача, в которой не учитываются особенности физических (технических) объектов, несмотря на то, что численное решение многих задач математической физики и математического моделирования сложных физических процессов и технических систем является неиссякаемым источником задач линейной алгебры. Для перечисленного класса задач при разработке методов решения не рассматривается этап составления СЛАУ, на котором тем или иным способом можно учесть особенности конкретной задачи. В том, что этот этап необходимо учитывать, подтверждают результаты следующих работ.

Прежде всего, следует отметить работу [1], где приведены примеры матриц, для которых потеря точности при решении СЛАУ невелика, а величина числа обусловленности огромна, то есть показано, что общепринятый критерий априорной оценки точности решения СЛАУ по числу обусловленности есть необходимый, но недостаточный. Совершенно новый подход к решению некорректно поставленной задачи предложен в работах [2–5]. Он заключается в том, что с целью повышения точности решения СЛАУ даже при большой величине числа обусловленности на этапе описания дискретной модели физического объекта предлагается корректно составлять СЛАУ. Это означает не только то, что такие матрицы существуют, как об этом сообщалось в работе [1], но и то, что предложен метод корректного составления матрицы СЛАУ, описывающей дискретную модель объекта. Метод составления матрицы СЛАУ рассмотрен применительно к задачам моделирования поведения электрических цепей [2], энергосистем [3], стержневых систем механики [4] и эллиптических уравнений матфизики [5].

Суть данного метода заключается в том, что, в отличие от существующих методов, при формировании СЛАУ целенаправленным выбором переменных учитываются параметры дискретной модели физического объекта. Следует заметить, что метод применим только к тем объектам, топология дискретной модели которых представлена графом.

Этому требованию удовлетворяет расчетная модель электрической цепи и энергосистемы. Для многих задач математического моделирования сложных физических процессов, технических систем и математической физики представление топологии дискретной модели в виде графа не применяется. В работах [4, 5] показано, что вышеприведенное ограничение снимается за счет представления топологии элементов расчетных схем дискретной модели физического объекта в виде графа. Там же приведена методика представления топологии элементов в виде графов.

В данной работе будет предложен метод корректировки некорректно поставленной задачи для случая, когда топология дискретной модели не представлена в виде графа. При разработке метода учитывается тот факт, что общепринятый метод описания дискретных моделей задач математической физики и сложных физических процессов и технических систем (метод узловых потенциалов [6–8]) есть частный случай метода корректного составления матрицы СЛАУ.

2. Связь между точностью решения СЛАУ, описывающей дискретную модель объекта, и методом составления уравнений

Академик Воеводин В.В. в работе [9] показал, что наибольшая точность результатов решения СЛАУ методом Гаусса достигается в случае применения метода с выбором главного элемента. На основе этой идеи было опубликовано огромное число работ. Однако решение практических задач показало, что точность решения СЛАУ, особенно в случае плохо обусловленных матриц, значительно теряется из-за ошибок округления, то есть для повышения точности результатов на этапе решения недостаточно одного применения метода Гаусса с выбором главных элементов.

Дальнейшим развитием этой идеи есть метод, предложенный в работе [2], где предлагается на этапе составления описания дискретной модели объекта формировать диагональные элементы матрицы как главные. Для этого при составлении описания используется дополнительная информация, а именно, параметры дискретной модели. Эффективность данного подхода, а именно, зависимость точности решения СЛАУ, описывающей дискретную модель объекта, от метода составления уравнений будет продемонстрирована на модельном примере. Ниже будет рассмотрено составление описания модельного примера методом, описанным в [2], с выбором главного элемента и без выбора и его решение.

В качестве модельного примера выбрана электрическая цепь, приведенная на рис. 1.

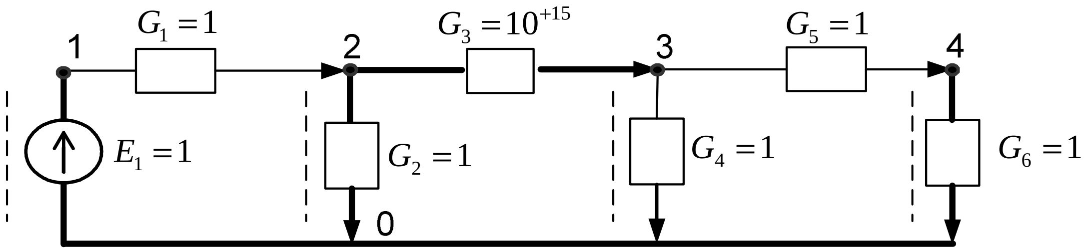

Рис. 1. Электрическая цепь

Известно [10], что обусловленность СЛАУ, описывающей электрическую цепь, зависит от диапазона разброса величин проводимостей (сопротивлений) компонент цепи. Выбранный диапазон изменения проводимостей компонент электрической цепи, равный 15 порядкам, обеспечивает плохую обусловленность СЛАУ и тем самым, как принято считать, некорректность задачи. На примере расчета потенциала узла 2 (напряжение на компоненте G_2) будет анализироваться зависимость достоверности результатов расчета от способа формирования диагонального элемента при составлении описания электрической цепи.

Ниже приведены основные положения, необходимые для решения модельного примера методом корректной постановки задачи [2]. Построение математической модели электрической цепи данным методом базируется на основной системе уравнений электрической цепи, куда входят компонентные уравнения и уравнения, составленные на основе законов Кирхгофа. Для модельного примера компонентное уравнение имеет вид

$$I_i = G_i U_i \,, \tag{1}$$

где U_i – напряжение, падающее на компоненте, I_i – ток, протекающий через компоненту, G_i – проводимость компоненты.

Для описания графа электрической цепи и, соответственно, уравнений на основе законов Кирхгофа применяются топологические матрицы контуров и сечений. Граф цепи совпадает с электрической цепью. Составление топологических матриц контуров и сечений включает выбор дерева графа цепи и составление контуров для выбранного дерева. Дерево графа электрической цепи выбирается таким образом, чтобы все источники напряжения включались в дерево, а все источники тока в хорды. Элементы в векторах напряжений U и токов I компонент цепи группируются на входящие в дерево (индекс $Д$), то есть ветви и хорды (индекс X), таким образом:

$$U = \begin{vmatrix} U_Д \\ U_X \end{vmatrix}, \qquad I = \begin{vmatrix} I_Д \\ I_X \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Контуры образуются присоединением хорд к дереву графа схемы. В этом случае топологическая матрица контуров имеет вид $\begin{vmatrix} 1 & F^t \end{vmatrix}$, где 1 – единичная подматрица хорд, t – обозначает транспонирование матрицы, а топологическая матрица сечений – вид $\begin{vmatrix} 1 & -F \end{vmatrix}$, где 1 – единичная подматрица ветвей. Как следует из [2], диагональные члены матрицы будут главными в том случае, когда проводимости компонент дерева в контурах имеют максимальную проводимость. Учитывая вид топологических матриц, уравнения цепи, составленные на основе законов Кирхгофа, в матричном виде можно записать следующим образом:

$$U_X = -F^t U_Д , \tag{3}$$

$$I_Д = F I_X . \tag{4}$$

Переменные составляемой системы уравнений выбираются из напряжений и/или токов компонент в результате анализа основной системы уравнений. В случае выбора в качестве переменных напряжений компонент, входящих в ветви дерева, компонентные уравнения (1) и уравнения (3), (4) можно преобразовать к следующему виду:

$$G_Д U_Д - F(G_X(-F^t U_Д)) = 0 . \tag{5}$$

Ниже будет приведено составление уравнений для модельного примера. Вначале составляется описание электрической цепи таким образом, чтобы диагональные члены матрицы были главными. Этому требованию удовлетворяет набор компонент E_1, G_6, G_3, G_2, входящих в дерево (на рис. 1 ветви дерева выделены жирной линией). Выбранному дереву соответствуют следующие векторы напряжений, токов компонент:

$$U_Д = \begin{vmatrix} E_1 \\ U_{G_6} \\ U_{G_3} \\ U_{G_2} \end{vmatrix}, \quad U_X = \begin{vmatrix} U_{G_1} \\ U_{G_4} \\ U_{G_5} \end{vmatrix}, \quad I_Д = \begin{vmatrix} I_{E_1} \\ I_{G_6} \\ I_{G_3} \\ I_{G_2} \end{vmatrix}, \quad I_X = \begin{vmatrix} I_{G_1} \\ I_{G_4} \\ I_{G_5} \end{vmatrix} \tag{6}$$

и топологические матрицы

$$F^t = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Уравнение (5), с учетом (6), (7) и компонентных уравнений после преобразований, имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} G_5+G_6 & G_5 & -G_5 \\ G_5 & G_3+G_4+G_5 & -(G_4+G_5) \\ -G_5 & -(G_4+G_5) & G_1+G_2+G_4+G_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_{G_6} \\ U_{G_3} \\ U_{G_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ G_1 E_1 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

СЛАУ (8) есть плохо обусловленная, так как собственные числа матрицы $\lambda_1 = 1,5857864376253, \lambda_2 = 5,0E+14+j5,0E+14, \lambda_3 = 5,0E+14-j5,0E+14$. Для того, чтобы определить, как зависит точность результатов решения системы от выбора варианта составления уравнений, расчет потенциала U_{G_2} узла 2 будет выполнен в общем виде:

$$U_{G_6} = -\frac{G_5}{G_5+G_6} U_{G_3} + \frac{G_5}{G_5+G_6} U_{G_2} , \tag{9}$$

$$U_{G_3} = \frac{G_4+G_5-\dfrac{G_5^2}{G_5+G_6}}{G_3+G_4+G_5-\dfrac{G_5^2}{G_5+G_6}} U_{G_2}\,, \tag{10}$$

$$U_{G_2} = \frac{G_1E_1}{(G_1+G_2+G_4+G_5)-\dfrac{G_5^2}{(G_5+G_6)}-\dfrac{((G_4+G_5)+\dfrac{G_5^2}{(G_5+G_6)})^2}{G_3+G_4+G_5-\dfrac{G_5^2}{G_5+G_6}}}\,. \tag{11}$$

Из анализа вычислительного процесса (9–11) следует, что, несмотря на большой диапазон изменения величин проводимостей (15 порядков), нет жестких требований к конечной точности представления чисел как при составлении уравнений, так и при их решении. Для получения достоверного результата достаточно выполнить вычислительный процесс составления и решения СЛАУ с точностью представления чисел в две значащие цифры.

Следует заметить, что в СЛАУ (8) диагональный элемент второй строки (столбца) матрицы $\left|G_3+G_4+G_5\right|$ значительно больше (на 15 порядков) суммы остальных членов строки (столбца) $\left|G_4+2G_5\right|$. Это означает, что, приняв $U_{G_3}=0$, можно упростить СЛАУ (8), сохранив достоверность результатов. В эпоху ручного счета этому приему соответствовало объединение узла 2 с 3 (рис. 1).

Во втором случае (без выбора диагонального элемента главным) достаточно выбрать в дерево компоненты E_1, G_6, G_4, G_2 (на рис. 1 ветви дерева помечены прерывистой линией). Падения напряжений на этих компонентах соответствуют узловым потенциалам 1, 4, 3, 2, отсчитываемым от нулевого узла. Это означает, что при таком выборе компонент в дерево метод корректного составления матрицы СЛАУ совпадает с методом узловых потенциалов. Выбранному дереву и хордам соответствуют следующие векторы напряжений, токов компонент:

$$U_Д=\begin{vmatrix}E_1\\U_{G_6}\\U_{G_4}\\U_{G_2}\end{vmatrix},\ U_X=\begin{vmatrix}U_{G_1}\\U_{G_3}\\U_{G_5}\end{vmatrix},I_Д=\begin{vmatrix}I_{E_1}\\I_{G_6}\\I_{G_4}\\I_{G_2}\end{vmatrix},\ I_X=\begin{vmatrix}I_{G_1}\\I_{G_3}\\I_{G_5}\end{vmatrix} \tag{12}$$

и топологических матриц

$$F^t=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\0 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & -1 & 1\end{vmatrix},\quad F=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\1 & -1 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}. \tag{13}$$

Уравнение (5), с учетом (12), (13) и компонентных уравнений, примет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} G_5+G_6 & -G_5 & 0 \\ -G_5 & G_3+G_4+G_5 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_1+G_2+G_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_{G_6} \\ U_{G_4} \\ U_{G_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ G_1E_1 \end{vmatrix} . \tag{14}$$

Система уравнений (14) есть плохая обусловленная, так как имеет следующие собственные числа матрицы: $\lambda_1 = 1.0, \lambda_2 = 10^{15} + j10^{15}, \lambda_3 = 10^{15} - j10^{15}$. Как в первом варианте примера, будет выполнен расчет потенциала U_{G_2} узла 2 в общем виде:

$$U_{G_6} = \frac{G_5}{G_5+G_6} U_{G_4}, \tag{15}$$

$$U_{G_4} = \frac{G_3}{(G_3+G_4+G_5) - \dfrac{G_5^2}{(G_5+G_6)}} U_{G_2} \quad , \tag{16}$$

$$U_{G_2} = \frac{G_1E_1}{-\dfrac{G_3^2}{(G_3+G_4+G_5) - \dfrac{G_5}{(G_5+G_6)}} + (G_1+G_2+G_3)} . \tag{17}$$

Из анализа вычислительного процесса решения системы уравнений (15–17) следует, что достоверность результатов зависит как при составлении, так и решении уравнений от конечной точности представления чисел. Так, если вычислительный процесс решения системы (15–17) выполняется с точностью меньше 15 значащих цифр, то результат будет

$$U_{G_2} \approx \frac{1}{-10^{15} + 10^{15}} \approx \frac{1}{0}, \tag{18}$$

а в случае, когда *с* точность больше 15 значащих цифр, будет

$$U_{G_2} = \frac{\left(10^{15} + \dfrac{3}{2}\right)}{-10^{30} + 2*10^{15} + 10^{30} + {}^{6}\!/_{2} + {}^{3}\!/_{2} 10^{15}\ )} \approx {}^{2}\!/_{7} . \tag{19}$$

Из сравнения матриц (8) и (14), а также вычислительных процессов решения систем уравнений, вытекают следующие выводы.

Метод узловых потенциалов есть частный случай метода, предложенного в [2], а именно, в методе узловых потенциалов всегда в дерево выбраны ребра графа, связывающие базовый узел с остальными.

Диагональные элементы матрицы по модулю больше остальных элементов, как в строках, так и столбцах, независимо от того, матрица составлена с или без выбора максимальных диагональных. Различие заключается только в том, насколько диагональные элементы больше недиагональных. Это означает, что решение такого типа СЛАУ методом Гаусса с выбором главного элемента не повышает точности результатов для данного класса задач.

Конечное число значащих цифр, используемых при решении методом Гаусса, существенным образом зависит от того, матрица составлена с или без выбора максимальных диагональных элементов. Отличие одного варианта задачи от другого заключается только в том, что на этапе составления уравнений в одном случае компонента с максимальной проводимостью выбирается в дерево и тем самым напряжение этой компоненты выступает в качестве переменной составляемой СЛАУ. Проводимость этой компоненты участвует только при формировании диагонального элемента матрицы. В другом случае эта компонента попадает в хорды. Как следует из уравнения (3), напряжение компоненты определяется через напряжения компонент дерева. Из уравнения (4) следует, что проводимость компоненты участвует в формировании элементов строк и столбцов и тем самым проводимость хорды определяет величину этих элементов матрицы.

3. Преобразование матрицы СЛАУ, составленной методом узловых потенциалов, к виду, соответствующему корректной постановке

При численном решении задач математической физики и математического моделирования сложных физических процессов и технических систем для составления СЛАУ, описывающих дискретные модели этих задач, в основном применяется метод узловых потенциалов или его аналоги. Отличительной чертой этого метода есть то, что в качестве переменных СЛАУ применяются потенциалы расчетной схемы дискретной модели, отсчитываемые от базового узла к остальным узлам, простой алгоритм составления уравнений, слабо заполненная матрица СЛАУ. Платой за такую эффективность может быть некорректность поставленной задачи. Учитывая, что метод узловых потенциалов есть всего лишь один из вариантов метода корректной постановки задачи, то некорректно поставленную задачу можно откорректировать, применив преобразование матрицы. Ниже будет рассмотрен алгоритм преобразования некорректно составленной методом узловых потенциалов задачи.

Из всего многообразия физических объектов будут рассмотрены только те объекты, линейная дискретная модель которых описывается СЛАУ с невырожденной и симметричной матрицей.

3.1. Алгоритм преобразования матрицы

При разработке алгоритма преобразования матрицы используется тот факт, что j-ый недиагональный элемент i-ой строки матрицы входит в матрицу со знаком минус и содержит параметр дискретной модели, описывающий связь между i-ым и j-ми узлами дискретной модели. Диагональный элемент входит в матрицу с положительным знаком, содержит сумму недиагональных элементов и параметр дискретной модели, описывающий связь между i-ым узлом и базовым. Обычно при нумерации узлов дискретной модели базисный узел принято считать нулевым.

Как следует из исследования, выполненного выше, некорректность поставленной задачи на уровне составленной СЛАУ возникает только в том случае, если хотя бы один из недиагональных элементов строки будет значительно больше параметра дискретной модели, входящего только в диагональный элемент. Ниже приводится методика проверки на корректность составленной СЛАУ.

Пусть СЛАУ имеет вид

$$Ax = y, \tag{20}$$

где x – вектор узловых потенциалов (узловых воздействий), y – вектор внешних потоков, A – матрица вида

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1i} & a_{1j} & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{ii} & a_{ij} & . & a_{in} \\ a_{j1} & a_{ji} & a_{jj} & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{21}$$

где n – размер матрицы. Элементы матрицы удовлетворяют следующим требованиям:

$$a_{ii} \succ 0, \;\; a_{ij} \le 0, \; a_{ij} = a_{ji}, 1 \le i \le n, \; 1 \le j \le n \;\; при \; j \ne i \, . \tag{22}$$

Ниже будет рассмотрена проверка на корректность i-ой строки матрицы и, если необходимо, её корректировка.

Прежде всего определяется параметр дискретной модели a_{it}, входящий только в диагональный элемент i-ой строки матрицы,

$$a_{it} = a_{ii} - \left| \sum_{j=1, \, j \ne i}^{n} a_{ij} \right| . \tag{23}$$

Считается, что i-ая строка матрицы корректно составлена, если параметр a_{it} удовлетворяет условию

$$a_{it} \ge \left| a_{ij} \right|, 1 \le j \le n, \; при \; j \ne i. \tag{24}$$

При невыполнении условия (24) выполняется корректировка i-ой строки. Вначале из недиагональных элементов выбирается наибольший. Пусть это будет j-ый элемент i-ой строки. Нетрудно убедиться, что в силу специфики составления матрицы (условие (22)) параметр дискретной модели, который участвует в формировании элементов a_{ij} и a_{ji} i-ой и j-ой строк, входит как составная часть в элементы a_{ii} и a_{jj}. Суть корректировки i-ой строки заключается в преобразовании i-ой и j-ой строк матрицы таким образом, чтобы величина элемента a_{ij} входила только в элемент a_{ii}. Нетрудно убедиться, что, представив переменную x_i в виде

$$x_i = x_j + x_{ij} \tag{25}$$

и выполнив следующее преобразование элементов j-ого столбца матрицы СЛАУ

$$\overline{a}_{lj} = a_{lj} + a_{li}, \;\; 1 \le l \le n \;\; , \tag{26}$$

получим новый j-ый столбец матрицы, в котором преобразованные элементы $\overline{a}_{ij}$ и $\overline{a}_{jj}$ не содержат параметр дискретной модели, формировавший элементы a_{ij} и a_{jj}.

На следующем шаге выполняется преобразование j-ой строки по формуле

$$\overline{a}_{jl} = a_{jl} + a_{il}, \;\; 1 \le l \le n \;\; . \tag{27}$$

Элементы $\overline{a}_{jl}$ преобразованной j-строки уже не содержат параметр дискретной модели, соответствующий элементу a_{ji}.

Проверка на корректность матрицы СЛАУ и корректировка некорректных строк выполняются для всей матрицы. В данной работе рассмотрен только подход к построению алгоритма преобразования матрицы к корректному виду. Вопросы, связанные с разработкой эффективно работающего алгоритма преобразования матрицы к корректному виду, в этой работе не рассматриваются. Ниже будет приведен пример преобразования матрицы СЛАУ (14), составленной методом узловых потенциалов.

3.2. Демонстрационный пример

Прежде всего следует отметить, что матрица (14) симметричная и невырожденная. Коэффициенты матрицы удовлетворяют условию (22). Узловые потенциалы соответствуют падению напряжений на компонентах

$$U_4 = U_{G_6},\, U_3 = U_{G_4}, U_2 = U_{G_2}\,. \qquad (28)$$

Учитывая (28), СЛАУ (14) можно представить следующим образом:

$$\begin{vmatrix} G_5+G_6 & -G_5 & 0 \\ -G_5 & G_3+G_4+G_5 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_1+G_2+G_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_4 \\ U_3 \\ U_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ G_1E_1 \end{vmatrix}. \qquad (29)$$

Проверка на корректность матрицы включает следующие операции.

Определение по формуле (23) параметра дискретной модели a_{it}, входящего только в диагональный элемент. Для первой строки матрицы это будет G_6, для второй строки G_4 и для третьей – (G_1+G_2).

Проверка строк матрицы на корректность выполняется в соответствии с формулой (24). В результате этой проверки оказывается, что вторая строка не удовлетворяет требованию корректности, так как $(G_4=1) \prec (G_3=10^{15})$. Параметр G_3 входит также в третью строку матрицы, поэтому в соответствии с формулой (25) выбирается представление переменной U_3 в виде

$$U_3 = U_2 + U_{23}\,, \qquad (30)$$

где U_{23} – напряжение между узлами 2 и 3.

В результате преобразования элементов 3-го столбца, в соответствии с формулой (26), получаем матрицу (29) следующего вида:

$$\begin{vmatrix} G_5+G_6 & -G_5 & -G_5 \\ -G_5 & G_3+G_4+G_5 & G_4+G_5 \\ 0 & -G_3 & G_1+G_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_4 \\ U_{23} \\ U_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ G_1E_1 \end{vmatrix}, \qquad (31)$$

а после преобразования третьей строки, в соответствии с формулой (27), матрица (31) будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} (G_5+G_6) & -G_5 & -G_5 \\ -G_5 & (G_3+G_4+G_5) & (G_4+G_5) \\ -G_5 & (G_4+G_5) & (G_1+G_2+G_4+G_5) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_4 \\ U_{23} \\ U_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ G_1E_1 \end{vmatrix}. \qquad (32)$$

СЛАУ (32) удовлетворяет требованию корректности, поэтому корректировка считается завершенной. Переменные СЛАУ (32) соответствуют переменным СЛАУ (8), то есть в результате преобразования в дерево были выбраны те же компоненты, что и в методе корректной постановки задачи. Из сравнения СЛАУ (8) и (32) следует, что недиагональные элементы матрицы (32) второго столбца и второй строки отличаются по знаку от матрицы (8). Это есть результат того, что при преобразовании матрицы (14) было выбрано направление тока компоненты G_3, противоположное направлению, выбранному при составлении СЛАУ (8). Выполнив замену переменной U_{23} на $U_{23} = -U_{23}$ и поменяв во втором уравнении знаки элементов на противоположные, получим матрицу (8).

4. Заключение

Моделирование стало неотъемлемой частью интеллектуальной деятельности человечества, а достоверность результатов моделирования – основным критерием оценки результатов моделирования. Для обеспечения достоверности результатов требуются новые подходы к разработке методов и алгоритмов описания сложных объектов и их решения.

В отличие от существующего подхода к разработке методов решения некорректных задач, в данной работе предлагается некорректно поставленную задачу (плохо обусловленную) приводить к корректному виду. Показано, что не плохая обусловленность матрицы затрудняет получение достоверных результатов при решении СЛАУ, описывающих дискретные модели физических объектов, а некорректный выбор переменных СЛАУ на этапе составления уравнений, а метод узловых потенциалов и его аналоги, которые применяются для составления СЛАУ, описывающих дискретную модель, есть частный случай метода корректной постановки задачи. Предложена методика проверки на корректность составленной методом узловых потенциалов СЛАУ для случая, когда матрица СЛАУ есть невырожденная и симметричная. Рассмотрен алгоритм преобразования матрицы к корректному виду.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калиткин Н.Н. Количественный критерий обусловленности систем линейных алгебраических уравнений / Н.Н. Калиткин, Л.Ф. Юхно, Л.В. Кузьмина // Математическое моделирование. – 2011. Т. 23, № 2. – С. 3 – 26.

2. Волобоев В.П. Об одном подходе к моделированию сложных систем / В.П. Волобоев, В.П. Клименко // Математичні машини і системи. – 2008. – № 4. – С. 111 – 122.

3. Волобоев В.П. Об одном подходе к моделированию энергосистем / В.П. Волобоев, В.П. Клименко // Математичні машини і системи. – 2009. – № 4. – С. 106 – 118.

4. Волобоев В.П. Механика стержневых систем и теория графов / В.П. Волобоев, В.П. Клименко // Математичні машини і системи. – 2012. – № 2. – С. 81 – 96.

5. Волобоев В.П. Метод конечных элементов и теория графов / В.П. Волобоев, В.П. Клименко // Математичні машини і системи. – 2013. – № 4. – С. 114 – 126.

6. Пухов Г.Е. Избранные вопросы теории математических машин / Пухов Г.Е. – Киев: Изд-во Академии наук УССР, 1964. – 264 с.

7. Сешу С. Линейные графы и электрические цепи / С. Сешу, М.Б. Рид. – М.: Высшая школа, 1971. – 448 с.

8. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.

9. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / Воеводин В.В. – М.: Наука, 1977. – 304 с.

10. Теоретические основы электротехники: учебник для ВУЗов / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин. – [4-е изд.]. – Питер, 2003. – Т. 2. – 572 с.

Стаття надійшла до редакції 17.09.2014