

УДК 53.01:53.05+519.2

И.И. ГОРБАНЬ\*

**СТАТИСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НИЗКОЧАСТОТНЫХ И ПОЛОСОВЫХ ШУМОВ**

\*Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев, Украина

*Анотація.* Досліджено статистичну стійкість низькочастотних та смугових шумів. Виявлені умови порушення їх статистичної стійкості по відношенню до середнього та середньоквадратичного відхилення.

*Ключові слова:* статистична стійкість, параметр статистичної нестійкості, теорія гіпервипадкових явищ.

*Аннотация.* Исследована статистическая устойчивость низкочастотных и полосовых шумов. Выявлены условия нарушения их статистической устойчивости по отношению к среднему и среднеквадратическому отклонению.

*Ключевые слова:* статистическая устойчивость, параметр статистической неустойчивости, теория гиперслучайных явлений.

*Abstract.* The statistical stability for low-frequency and band noises has been researched. It has been found out the conditions in which the violations of statistical stability with respect to average and standard deviation are essential.

*Keywords:* statistical stability, parameter of statistical instability, theory of hyper-random phenomena.

**1. Введение**

На протяжении столетий считалось, что при неограниченном увеличении объема данных частота любого массового события или среднее любой физической величины имеет определенный предел. На этой идеализированной математической трактовке физического феномена статистической устойчивости зиждется вся классическая математическая статистика.

Однако многочисленные экспериментальные исследования разнообразных процессов на больших интервалах наблюдения показали [1–4], что феномен статистической устойчивости носит не идеальный характер: вначале с увеличением объема данных дисперсия флуктуации выборочного среднего, как правило, уменьшается, затем же, достигнув определенного значения, перестает меняться, а в некоторых случаях даже растет.

Как ни странно, понятия статистической устойчивости и интервала статистической устойчивости (максимального интервала наблюдения, на котором нарушения статистической устойчивости остаются еще пренебрежимо малыми) формализованы были лишь недавно.

В статье [5] и монографии [3] предложены различные варианты математического определения этих понятий. При решении практических задач обычно не важна специфика поведения процесса на бесконечно большом интервале наблюдения, хотя именно она заложена в основу формального определения статистически устойчивого процесса. Более существенны особенности поведения процесса на рассматриваемом интервале наблюдения. Если на этом интервале не происходят существенные нарушения статистической устойчивости, процесс следует рассматривать как статистически устойчивый, в противном же случае – как статистически неустойчивый.

Статистическая устойчивость – свойство, характеризующее более статистику процесса, нежели сам процесс. Разные статистики, как правило, имеют разные интервалы статистической устойчивости. Говоря о статистической устойчивости процесса, обычно подразумевают статистическую устойчивость определенного класса статистик, в частности, в случае статистической устойчивости процесса в широком смысле [3, 5] – статистическую устойчивость выборочного среднего и выборочного среднеквадратического отклонения (СКО).

При обработке процессов на интервалах, не превышающих интервал статистической устойчивости, правомерно использование теории вероятностей, на интервалах, превышающих интервал статистической устойчивости, требуются специальные статистические методы, учитывающие нарушения устойчивости. К таковым относятся, в частности, методы теории гиперслучайных явлений – физико-математической теории, разработанной специально для описания физических явлений с учетом нарушений статистической устойчивости [2–4].

В работах [2–4, 6, 7] разработана методика оценки интервала статистической устойчивости и с ее помощью исследована зависимость интервала статистической устойчивости разных процессов от их временных и спектральных характеристик. Было, в частности, установлено [2, 3, 7], что процессы, спектральная плотность мощности  $S(f)$  которых описывается степенной зависимостью  $S(f) = 1/f^\beta$ , статистически устойчивы, если  $\beta < 1$ , и статистически неустойчивы, если  $\beta \geq 1$ . К классу последних относится часть нестационарных процессов, фликкер-шум [8–10], розовый, коричневый и черный шум. Было выяснено, что наличие положительной корреляции между отсчетами приводит к уменьшению статистической устойчивости, а наличие отрицательной корреляции – к ее увеличению.

Исследования разнообразных реальных процессов разной физической природы на больших интервалах наблюдения показали, что все они статистически неустойчивы. При этом интервал статистической устойчивости у них разный.

В перечисленных, а также других, работах не проводился сопоставительный анализ статистической устойчивости низкочастотных и полосовых шумов. Целью настоящей статьи является устранение имеющегося пробела.

## 2. Методика исследования

Исследования проводились на основе компьютерного моделирования.

С помощью программного датчика случайных чисел формировался дискретный процесс  $X_{0n}$  ( $n = \overline{1, N}$ ), моделирующий фрагмент белого гауссовского шума длительностью  $T = N\Delta t$ , где  $N$  – количество отсчетов,  $\Delta t$  – период дискретизации. Этот исходный процесс служил основой для формирования дискретных процессов, моделирующих низкочастотные и полосовые шумы двух типов.

Шум первого типа – установившийся процесс на выходе идеального низкочастотного фильтра (ИНЧФ) с полосой пропускания  $[0, f_2]$  или идеального полосового фильтра (ИПФ) с полосой пропускания  $[f_1, f_2]$ , где  $f_1$  – нижняя частота среза фильтра,  $f_2$  – верхняя частота среза. Шум второго типа – установившийся процесс на выходе интегрирующей RC-цепи с нулевой резонансной частотой или на выходе одиночного резонансного контура (ОРК) с резонансной частотой  $f_0$ .

Дискретный спектр, соответствующий шуму первого типа, формировался путем обнуления не попадающих в полосу пропускания ИНЧФ или ИПФ спектральных отсчетов исходного процесса, а дискретный спектр, соответствующий шуму второго типа, – путем умножения дискретного спектра исходного процесса на функцию, описывающую амплитудно-частотную характеристику RC-цепи или ОРК.

Дискретный шум  $X_n$  ( $n = \overline{1, N}$ ), соответствующий измененному таким образом спектру, формировался с помощью обратного дискретного преобразования Фурье.

Исследование нарушений статистической устойчивости полученного шума по отношению к среднему и СКО проводилось по изложенной в монографии [3] методике.

Степень нарушения статистической устойчивости шума по отношению к среднему определялась с помощью оценки  $h_N^*$  параметра статистической неустойчивости  $h_N$ , описываемой формулой

$$h_N^* = \gamma_N^* / \gamma_{0N}. \quad (1)$$

В выражении (1)  $\gamma_N^*$  – оценка параметра статистической неустойчивости  $\gamma_N$ :  $\gamma_N^* = M^*[\bar{D}_{Y_N} / \bar{D}_{X_N}]$ , где  $M^*[\cdot]$  – оператор усреднения по реализациям,  $\bar{D}_{Y_N} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (Y_n - \bar{m}_{Y_N})^2$  – выборочная дисперсия флуктуации выборочного среднего  $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  ( $n = \overline{1, N}$ ),  $\bar{m}_{Y_N} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n$  – выборочное среднее флуктуации среднего,  $\bar{D}_{X_N} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N D_{X_n}^*$  – среднее оценок дисперсии  $D_{X_n}^*$ , сформированных по отдельным фрагментам реализации шума  $X_n$  ( $n = \overline{1, N}$ ),  $\gamma_{0N}$  – параметр статистической неустойчивости шума по отношению к среднему  $\gamma_N$ , рассчитанный теоретически [3] для эталонной статистически устойчивой последовательности  $N$  некоррелированных отсчетов с постоянной дисперсией и нулевым математическим ожиданием:

$$\gamma_{0N} = \frac{N+1}{(N-1)N} C_N - \frac{2}{N-1}, \quad (2)$$

$$C_N = \sum_{n=1}^N 1/n.$$

Степень нарушения статистической устойчивости шума по отношению к СКО определялась с помощью оценки  $H_N^*$  параметра статистической неустойчивости  $H_N$ , описываемой формулой

$$H_N^* = \Gamma_N^* / \gamma_{0N}. \quad (3)$$

В выражении (3)  $\Gamma_N^*$  – оценка параметра статистической неустойчивости  $\Gamma_N$ :  $\Gamma_N^* = M^*[\bar{D}_{Z_N} / \bar{D}_{X_N}]$ , где  $\bar{D}_{Z_N} = \frac{1}{N-2} \sum_{n=2}^N (Z_n - \bar{m}_{Z_N})^2$  – выборочная дисперсия флуктуации выборочного СКО  $Z_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - Y_n)^2}$  ( $n = \overline{2, N}$ ),  $\bar{m}_{Z_N} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=2}^N Z_n$  – среднее флуктуации выборочного СКО.

Шум считался статистически устойчивым по отношению к среднему на рассматриваемом интервале наблюдения, если на этом интервале оценка параметра статистической неустойчивости  $h_N^*$  не выходила за верхнюю границу  $h_{0N}^+ = \gamma_{0N}^+ / \gamma_{0N}$  коридора устойчивости параметра  $h_N$ , где  $\gamma_{0N}^+ = \gamma_{0N} + \varepsilon \sigma_{\gamma_{0N}}$  – верхняя граница коридора устойчивости параметра

ра  $\gamma_N$ ,  $\varepsilon$  – константа, характеризующая ширину коридора,  $\sigma_{\tilde{\gamma}_{0N}}$  – СКО эталонной статистически устойчивой последовательности, аналитически описываемое [3] выражением

$$\sigma_{\tilde{\gamma}_{0N}} = \frac{1}{N-1} \sqrt{\frac{2C_N^2}{N^2} + \frac{4(N+1)C_N}{N} + A_N \left( \frac{4}{N} - 2 \right) + \frac{8B_N}{N} - 12},$$

где  $A_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$   $B_N = \sum_{n=1}^N C_{n-1}/n$ .

Аналогично, процесс считался статистически устойчивым по отношению к СКО на рассматриваемом интервале наблюдения, если на этом интервале оценка параметра статистической неустойчивости  $H_N^*$  не выходила за верхнюю границу  $h_{0N}^+$  коридора устойчивости параметра  $h_N$ .

### 3. Результаты исследования

Результаты расчета параметров статистической неустойчивости шумов, сформированных в результате прохождения через ИНЧФ и ИПФ, представлены на рис. 1 и 2. Амплитудно-частотные характеристики указанных фильтров приведены на рис. 3.

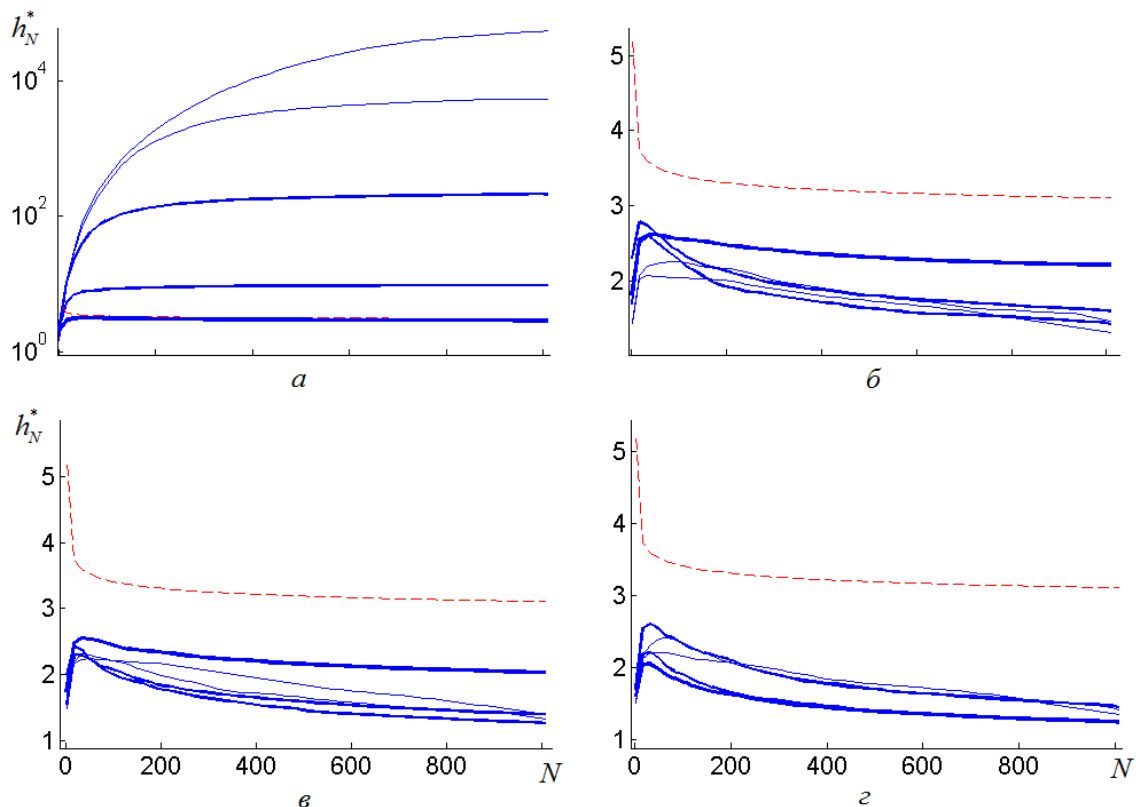


Рис. 1. Зависимость оценки параметра статистической неустойчивости по отношению к среднему  $h_N^*$  от количества отсчетов  $N$  для низкочастотных (а) и полосовых (б–г) шумов, сформированных в результате прохождения через ИНЧФ и ИПФ

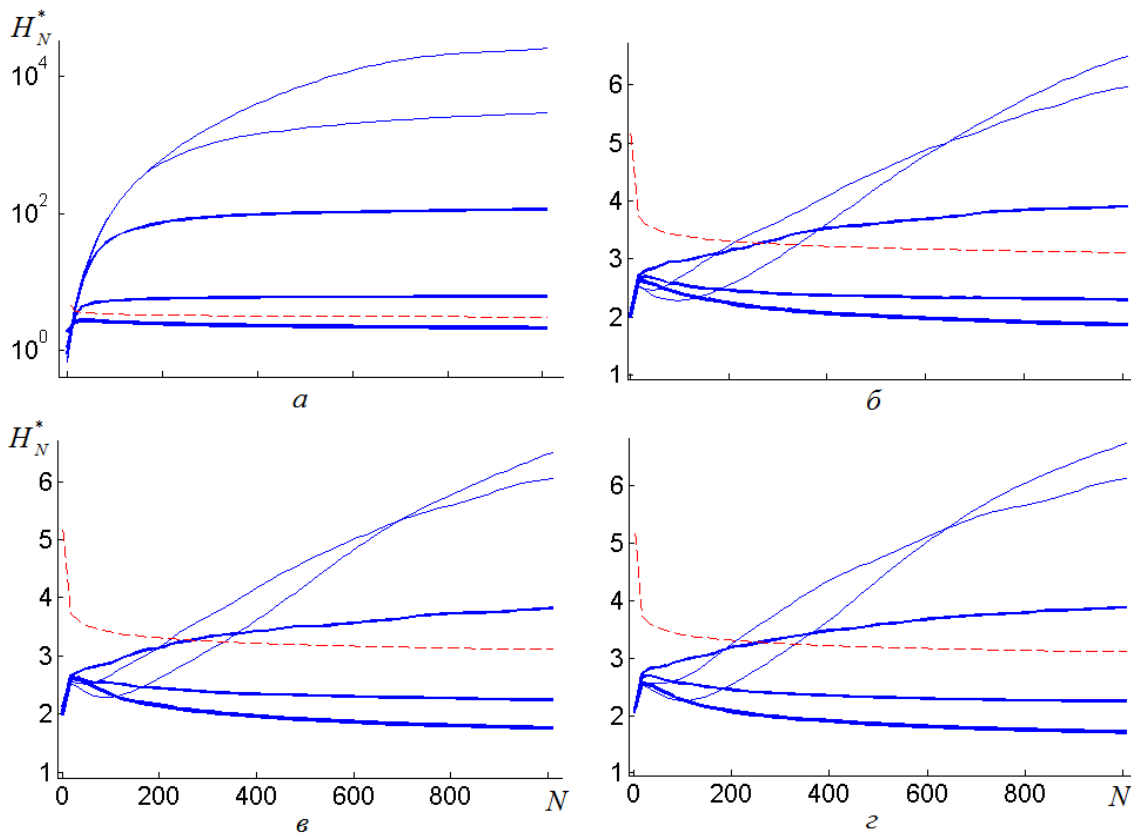


Рис. 2. Зависимость оценки параметра статистической неустойчивости по отношению к СКО  $H_N^*$  от количества отсчетов  $N$  для низкочастотных ( $a$ ) и полосовых ( $б-з$ ) шумов, сформированных в результате прохождения через ИНЧФ и ИПФ

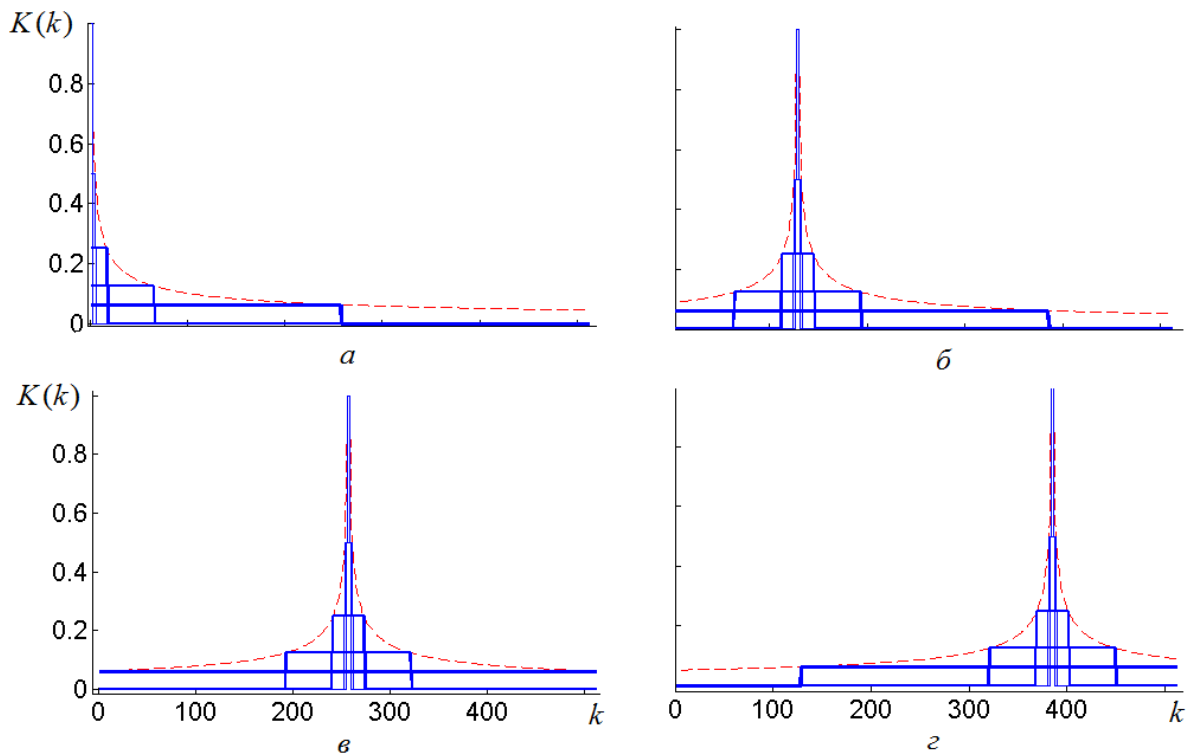


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики ИНЧФ ( $a$ ) и ИПФ ( $б-з$ )

Результаты расчета параметров статистической неустойчивости шумов, сформированных в результате прохождения через RC-цепь и ОРК, представлены на рис. 4 и 5. Амплитудно-частотные характеристики этих фильтров приведены на рис. 6.

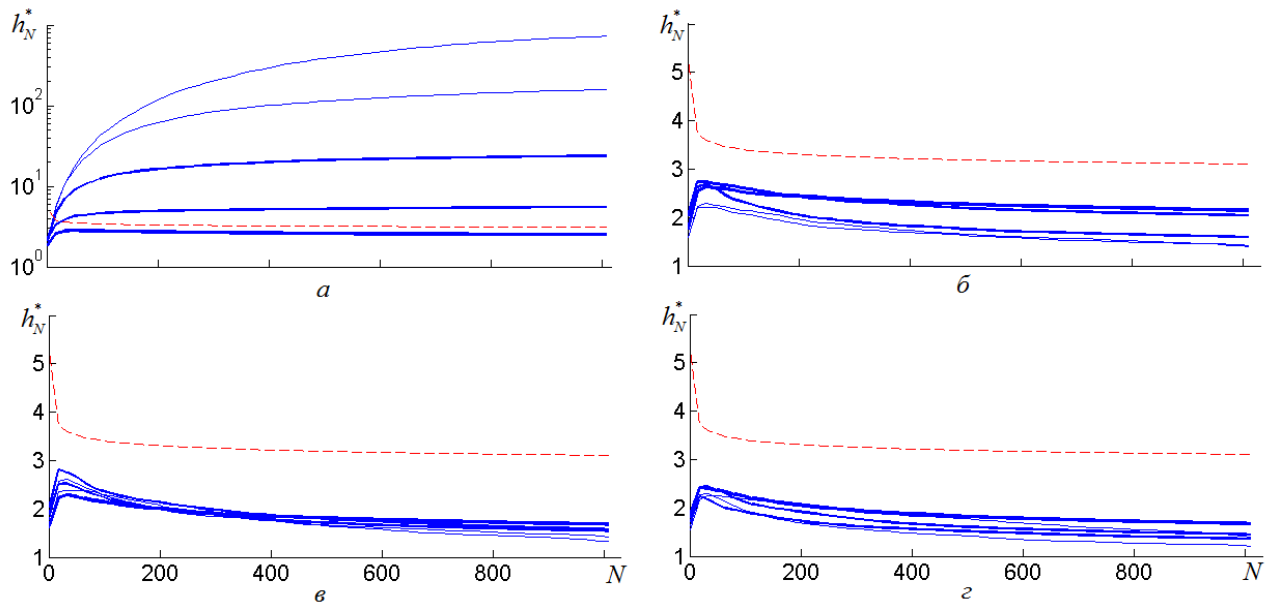


Рис. 4. Зависимость оценки параметра статистической неустойчивости по отношению к среднему  $h_N^*$  от количества отсчетов  $N$  для низкочастотных (а) и полосовых (б-з) шумов, сформированных в результате прохождения через RC-цепь и ОРК

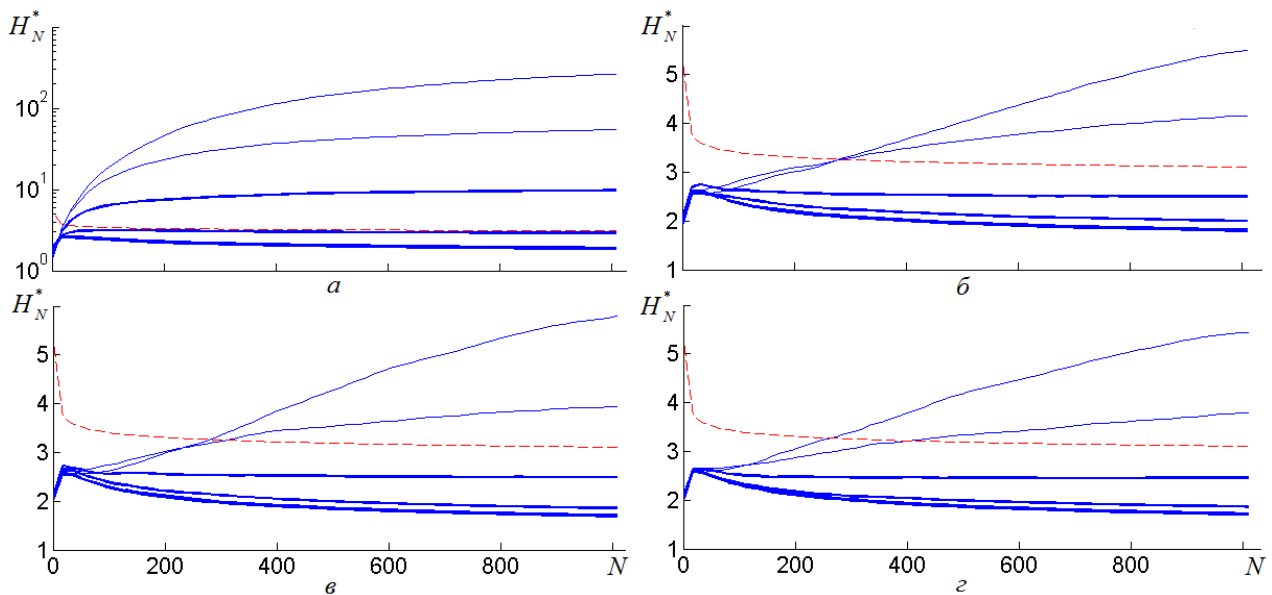


Рис. 5. Зависимость оценки параметра статистической неустойчивости по отношению к СКО  $H_N^*$  от количества отсчетов  $N$  для низкочастотных (а) и полосовых (б-з) шумов, сформированных в результате прохождения через RC-цепь и ОРК

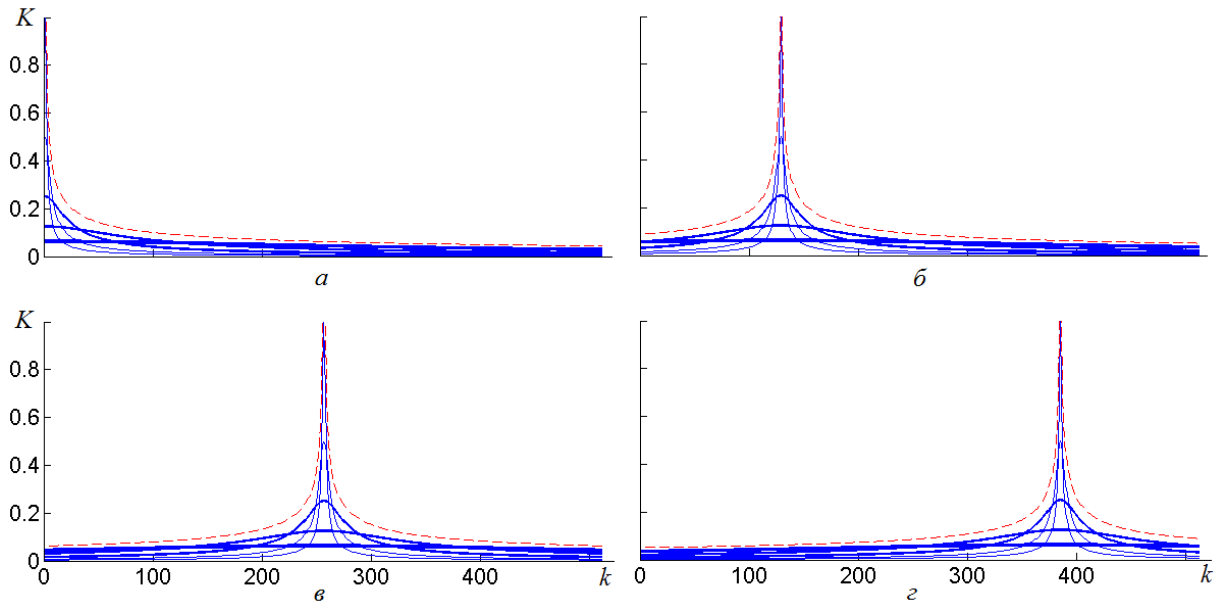


Рис. 6. Амплитудно-частотная характеристика RC-цепи (а) и ОРК (б-г)

Варианты б-г на рис. 1-6 соответствуют полосовым фильтрам со средней частотой пропускания  $f_0 = k_0 / T$ , характеризуемой дискретным спектральным отсчетом с номером  $k_0 = 128, 256, 384$ .

Разным непрерывным кривым на рис. 1-2 и 4-5 соответствуют результаты, полученные для разной ширины полосы пропускания фильтров  $\Delta f = f_2 - f_1 = \Delta k / T$ . В случае ИНЧФ и RC-цепи величина  $\Delta k = 1, 4, 16, 64, 256$ , а в случае ИПФ и ОРК величина  $\Delta k = 2, 8, 32, 128, 512$  (в обоих случаях большей величине  $\Delta k$  соответствует кривая большей толщины).

Пунктирными линиями на рис. 1-2 и 4-5 изображена граница  $h_{0N}^+$  коридора устойчивости параметра  $h_N$ , соответствующая константе  $\varepsilon = 3$ , а на рис. 3 и 6 – амплитудно-частотная характеристика фильтра, описываемая зависимостью  $K(k) = \sqrt{1/|k - k_0|}$ ,  $k_0 = 1, 128, 256, 384$  (соответственно а-г).

Количество используемых при усреднении реализаций равнялось 512.

Из рис. 1а-г и 4а-г следует, что нарушение статистической устойчивости по отношению к среднему наблюдается лишь тогда, когда шум низкочастотный и его спектр сосредоточен в узкой полосе ( $\Delta k \ll N / 2$ ). При этом (рис. 1а и 4а) увеличение интервала наблюдения (числа отсчетов  $N$ ) приводит к возрастанию величины параметра статистической неустойчивости  $h_N$ , а расширение ширины полосы частот  $\Delta f$  – к ее снижению вплоть до уровня, соответствующего статистически устойчивому процессу. Нарушение устойчивости по отношению к среднему низкочастотного узкополосного шума фиксируется при числе отсчетов  $N > 10$  (рис. 1а и 4а).

Из рис. 2а-г и 5а-г следует, что нарушения статистической устойчивости по отношению к СКО наблюдаются не только в случае низкочастотного шума, но и полосового.

Нарушения устойчивости по отношению к СКО проявляются значительно сильнее в случае низкочастотного шума (рис. 2а и 5а), чем в случае полосового (рис. 2б-г и 5б-г).

Местоположение на частотной оси рабочей полосы полосового шума слабо влияет на величину параметра статистической неустойчивости  $H_N$ . В случае нарушения статистической устойчивости увеличение интервала наблюдения (количества отсчетов  $N$ ) при-

водит к возрастанию величины параметра неустойчивости  $H_N$ , а расширение ширины полосы частот  $\Delta f$  – к ее снижению вплоть до уровня, соответствующего статистически устойчивому процессу.

В случае низкочастотного узкополосного шума нарушение устойчивости по отношению к СКО фиксируется при числе отсчетов  $N > 10$  (рис. 2а и 5а), а в случае полосового шума – при числе отсчетов, превышающем несколько сотен (рис. 2б–г и 5б–г).

Интервал корреляции  $\tau_c$  процесса связан с его шириной полосы частот  $\Delta f$  обратно пропорциональной зависимостью ( $\tau_c = 1/\Delta f$ ). Поэтому увеличение интервала корреляции приводит (рис. 1а и 4а) к понижению статистической устойчивости низкочастотного шума по отношению к среднему. Этот результат согласуется с результатами предыдущих исследований [3].

Увеличение интервала корреляции как низкочастотного, так и полосового шума (рис. 2а–г и 5а–г) ведет к понижению его статистической устойчивости по отношению к СКО.

#### 4. Выводы

1. Нарушение статистической устойчивости по отношению к среднему наблюдается лишь тогда, когда шум низкочастотный и его спектр сосредоточен в узкой полосе. Нарушение же статистической устойчивости по отношению к СКО фиксируется как в случае низкочастотного шума, так и полосового. При этом нарушение устойчивости низкочастотного шума проявляется значительно сильнее, чем полосового.
2. При наличии нарушений статистической устойчивости увеличение длительности наблюдения приводит к понижению устойчивости как по отношению к среднему, так и СКО, а расширение ширины полосы частот – к повышению устойчивости.
3. Увеличение интервала корреляции низкочастотного шума ведет к понижению его статистической устойчивости по отношению к среднему. Увеличение интервала корреляции шума как низкочастотного, так и полосового, ведет к снижению его статистической устойчивости по отношению к СКО.
4. В случае низкочастотного узкополосного шума нарушение статистической устойчивости по отношению к СКО проявляется на меньшем интервале наблюдения, чем в случае полосового шума с той же величиной рабочей полосы частот. При этом местоположение рабочей полосы полосового шума на частотной оси не оказывает сильного влияния на степень неустойчивости.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбань И.И. Феномен статистической устойчивости / И.И. Горбань // Журнал технической физики. – 2014. – Т. 84, № 3. – С. 22 – 30.
2. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы [Электронный ресурс] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2011. – 318 с. – Режим доступа: [http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban\\_i\\_i/index.html](http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/index.html).
3. Горбань И.И. Феномен статистической устойчивости [Электронный ресурс] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2014. – 444 с. – Режим доступа: [http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban\\_i\\_i/index.html](http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/index.html).
4. Gorban I.I. Physical phenomenon of statistical stability / I.I. Gorban // Information Theories and Applications. – 2014. – Vol. 21, N 4. – P. 377 – 391.
5. Горбань И.И. Критерии и параметры статистической неустойчивости / И.И. Горбань // Математичні машини і системи. – 2012. – № 4. – С. 106 – 114.
6. Горбань И.И. Статистическая неустойчивость физических процессов / И.И. Горбань // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2011. – Т. 54, № 9. – С. 40 – 52.



7. Горбань И.И. Статистически неустойчивые процессы: связь с фликкер, неравновесными, фрактальными и цветными шумами / И.И. Горбань // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2012. – Т. 55, № 3. – С. 3 – 18.
8. Коган Ш.М. Низкочастотный токовый шум со спектром типа  $1/f$  в твердых телах / Ш.М. Коган // Успехи физических наук. – 1985. – Т. 145, Вып. 2. – С. 285 – 325.
9. Жигальский Г.П. Неравновесный  $1/f^\gamma$  -шум в проводящих пленках и контактах / Г.П. Жигальский // Успехи физических наук. – 2003. – Т. 173, № 5. – С. 465 – 490.
10. Климонтович Ю.Л. Введение в физику открытых систем / Климонтович Ю.Л. – М.: Янус-К, 2002. – 284 с.

*Стаття надійшла до редакції 17.04.2015*