УДК 004.42; 519.85

О.О. КРЯЖИЧ*

АПРОКСИМАЦІЯ СКЛАДНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ ОПИСУ РОЗВИТКУ ЛОКАЛЬНОЇ НАДЗВИЧАЙНОЇ СИТУАЦІЇ

*Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ, Україна

Анотація. *У статті розглядається варіант кусково-поліноміальної апроксимації з застосуванням методу можливих напрямків. Розглянута можливість застосування методу Дж. Зойтендейка для вирішення задач опису складних функцій. Запропоновано підхід до опису яружних цільових функцій, який пропонується використовувати для детальної візуалізації розповсюдження зон ураження сильнодіючих отруйних речовин у разі виникнення техногенної аварії.*
Ключові слова: *функція, поліном, апроксимація, похідна, обмеження, вектор.*

Аннотация. *В статье рассматривается вариант кусочно-полиномиальной аппроксимации с применением метода возможных направлений. Рассмотрена возможность применения метода Дж. Зойтендейка для решения задач описания сложных функций. Предложен подход к описанию овражных целевых функций, который предлагается использовать для детальной визуализации распространения зон поражения сильнодействующих отравляющих веществ в случае возникновения техногенной аварии.*
Ключевые слова: *функция, полином, аппроксимация, производная, ограничение, вектор.*

Abstract. *An option of piecewise-polynomial approximation using the method of "possible directions" is examined in the paper. The possibility of using G. Zoutendijk method for solving problems of description of complex functions was regarded. The approach for description of ravine objective functions was proposed. This approach can be used for detailed visualization of the distribution of damage zones of highly toxic substances in case of industrial disaster.*
Keywords: *function, polynomial, approximation, derivative, constraint, vector.*

1. Вступ

Останнім часом розробці нових систем підтримки прийняття рішень (СППР) з метою моніторингу й аналізу загроз та процесів техногенного забруднення оточуючого середовища в Україні та світі приділяється надзвичайна увага. Адже перша дія, яка виникає у разі настання загрози виникнення надзвичайної ситуації техногенного характеру, викликає необхідність ухвалення рішень відносно введення захисних заходів для населення і довкілля. Виконання ситуаційних рішень та дій з оперативного реагування на подібні ситуації вимагають постійного оновлення інформації в режимі реального часу. Проте така інформація є різнорідною: характеристики об'єкта, де виникла загроза аварії або вже відбулася аварійна ситуація, погодні умови, стан оточуючого середовища, час дня, пора року, щільність населення, економічні та соціальні умови, стан технічної та адміністративної підтримки території, де виникла загроза аварії, невизначеності в інформації, що надається, тощо. У зазначеному випадку будь-яка інформація, що надається населенню або особам, які приймають рішення (ОПР), повинна бути надійною, достовірною та своєчасною. Подібну обробку, перевірку та передачу інформації дозволяють здійснити відповідні інформаційні технології.

У зазначеному ключі є особливо проблематичним опис локальної надзвичайної ситуації, коли під дію небезпечних речовин потрапляють декілька квадратних кілометрів території. Сучасні системи аналізу і прогнозування надзвичайних ситуацій не надають детальної картини у цьому випадку, але працівникам рятувальних і кризових служб така інформація є край необхідною для оперативного управління рятувальною операцією. Їм, як правило, доводиться працювати у перенаселених зонах довкола промислових гігантів, на сильно пересічній місцевості, серед забудов, будівельних майданчиків, де небезпечна речовина, враховуючі власні фізико-хімічні особливості та специфіку місцевості, може зависати не щільно, в декілька сантиметрах або метрах над поверхнею землі (приміщення, котловану), утворювати хмари нетипової форми. Про ці особливості розповсюдження небезпечних речовин повинні знати рятувальні бригади.

Враховуючи зазначене, застосування широко розповсюджених градієнтних методів може бути неефективним в задачах саме такої яружної цільової функції, тобто, коли лінії цільової функції сильно витягнуті (мають форму еліпсів) у межах оптимальної точки. Подолання подібного випадку передбачено в методах можливих напрямків, серед яких є метод Дж. Зойтендейка. Загальна ідея підходу полягає у виборі мінімально можливого напрямку пошуку у граничній точці x_k з урахуванням усіх обмежень та кута зі спрямуванням антиградієнта в цій точці.

Метою роботи є представлення алгоритмізації апроксимації складних функцій з використанням елементів методу Дж. Зойтендейка з найкращим наближенням за підходом Чебишова для опису розвитку локальної надзвичайної ситуації.

Задачі роботи:

– обґрунтувати використання алгоритму за методом можливих напрямків Дж. Зойтендейка для апроксимації функцій поліномами;

– запропонувати застосування методу можливих напрямків для вирішення задач чебишовського наближення з додатковими обмеженнями.

Слід зазначити, що питання апроксимації функцій поліномами свого часу широко були досліджені Василенком В.О. [1], Поповим Б.О. [2], а серед сучасних авторів можна назвати Кісельову О.М. та Коряшкіну Л.С. [3], Згуровського М.З. [4], та іншими українськими і зарубіжними вченими. Проте метод Дж. Зойтендейка [5] раніше розглядався дуже мало з причин складних розрахунків з візуалізацією результатів за цим методом. Зараз особливо цікавою є задача опису яружних цільових функцій при використанні 3D-моделювання, при застосуванні ГІС-інструментарію, вирішенні питань моделювання ситуації при забезпеченні управління техногенною безпекою потенційно небезпечних та небезпечних об’єктів.

2. Постановка задачі

Не зважаючи на досить великий обсяг робіт з апроксимації складних функцій, задача точності таких обрахунків залишається актуальною.

Проблематика комп’ютерного моделювання процесів техногенного впливу на оточуюче природне середовище полягає в тому, що будь-які комп’ютерні моделі описуються рівняннями, логічними правилами або описом деякої взаємодії складових. Системи оточуючого середовища мають ряд атрибутів, які відносять їх до життєздатних систем, що робить їх формальне представлення відмінним від суто техногенних систем. Зокрема, це динаміка, просторове розташування, комплексність, випадковість, періодичність. Окрім того, не можна забувати, що природне середовище неоднорідне, і багато параметрів його функціонування може бути невідомим частково або зовсім. У цьому випадку у процесі моделювання недостатність інформації буде фактом, у зв’язку з чим проблему взаємодії «оточуюче середовище – техногенна система» не можна буде описати звичайними лінійними моделями з простою параметризацією.

Огляд моделей лінійного програмування доводить, що ці моделі не завжди адекватні реальним ситуаціям. Так, при лінійному підході часто ігноруються такі явища, як адекватність моделі, раціональність та ін. Часто обмеження, що застосовуються при побудові моделі, призводять до нелінійного формулювання задачі, тобто, знаходження мінімального чи максимального значення функції при нелінійних обмеженнях.

Особливо актуальною постає задача апроксимації складних функцій при роботі з програмами, що дозволяють візуалізувати на картах зони ураження сильнодіючими отруйними речовинами (СДОР). Інструменти моделювання дозволяють наносити ці зони на карти і схеми у вигляді кола, півкола або сектора, який має кутові розміри і радіус, рівний глибині зараження. Зона фактичного зараження, як правило, має форму еліпса, включається у зону можливого зараження. Така візуалізація не дає картини, що є наближеною до реальності, адже є різні особливості місцевості, і хмара СДОР не буде чітким еліпсом чи колом. Наприклад, якщо на шляху хмари буде річка, хмару СДОР частково потягне за течією. Високі будівлі і споруди на шляху СДОР також частково розірвуть контур. Якщо відбувся викид речовини, що тяжіє до низу, заповненими будуть низини, що значно простягатимуться в боки від еліпса чи кола зони на карті подій, визначеної як зона ураження. Тобто, особа, що приймає рішення (ОПР) з ліквідації техногенної аварії, отримує неточну інформацію про її розповсюдження. В деякій мірі це обумовлено тим, що у разі, якщо точка x_k знаходиться на межі припустимої області X, то будь-який малий крок $\alpha_k > 0$ в напрямку антиградієнта за методами градієнтного спуску може призвести до неприпустимої точки $(x_k \notin X)$. Подолання такого випадку передбачено в методах можливих напрямків, до яких відносяться метод проекції градієнта, метод умовного градієнта, опуклий симплексний метод Зангвілла і метод Дж. Зойтендейка. Загальна ідея підходу полягає у виборі мінімально можливого напрямку пошуку у граничній точці x_k, з урахуванням усіх обмежень та кута зі спрямуванням антиградієнта в цій точці.

Нехай на проміжку $[a,b]$ задана безперервна обмежена функція $f(x)$. Нас цікавить кусково-поліноміальна функція $P(x)\in C^1(a,b)$, яка найкращим чином наближує $f(x)$ за підходом Чебишева. Виразом $C^1(a,b)$ означуємо клас функцій, безперервних на відрізку $[a,b]$ разом з першою похідною. Явно, що для $P(x)$ матиме місце таке представлення:

$$\begin{cases} f_1(x) & x\in[a,C_1] \\ f_2(x) & x\in[C_1, \quad . \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ f_S(x) & x\in[C_S,b] \end{cases} \tag{1}$$

Точки $a=C_0<C_1<C_2<...<C_S<C_{S+1}=b$ будемо вважати невідомими.

Функції $f_i(x),\ i=\overline{1,S}$ є поліноміальними зі ступенем не менше 2. Тобто, наведена задача у випадку, якщо $f_i(x)$ має однаковий ступінь і є задачею побудови сплайн-функції з фіксованими вузлами [8].

Задача побудови $P(x)$ зводиться до кількох завдань побудови поліномів найкращого наближення $f_i(x)$ в розумінні підходу Чебишова до функції $f(x)$ для $x\in[C_i,\ C_{i+1}]\left(1=\overline{0,k}\right)$. Цей факт виходить з принципу оптимальності Беллмана. Саме тому достатньо розглянути задачу побудови полінома найкращого наближення до $f(x)$ на деякому інтервалі. Даний поліном повинен задовольняти умови, що забезпечують відповідну гладкість $P(x)$.

Нехай задана функція $f(t)$ і деяка дискретна множина точок:

$$E=\{Y_0,Y_1...,Y_{N+1}\}\in\ [a,b],$$

$$Y_0=a,\qquad Y_{N+1}=b.$$

Треба відшукати поліном заданого ступеня k:

$$\Pi_k(t)=\sum_{i=0}^{k} x_i t^i,$$

який мінімізує величину $\varepsilon(x)=\max\limits_{t_i\in \mathrm{E}}\left|f(t_i)-\Pi_k(t_i)\right|$ по усіх x з області $\Delta\subset \mathrm{E}_{n+1}$, де Δ визначається:

$$\Delta=\left\{x\in \mathrm{E}_{n+1}: f^{(i)}(a)=\Pi_k^{(i)}(a);\ f^{(i)}(b)=\Pi_k^{(i)}(b);\ i=0,1\right\}.$$

Якщо прийняти, що $t_j^i=a_{ij}\ \left|i=\overline{0,k};\ j=\overline{0,n+1}\right|$, то задача, що розглядається, буде еквівалентною такій задачі лінійного програмування [9]:

$$\begin{cases} \min \varepsilon \\ \sum\limits_{i=0}^{k} a_{ij}x_i-\varepsilon\le f(Y_i) \\ -\sum\limits_{i=0}^{k} a_{ij}x_i-\varepsilon\le -f(Y_i) \\ \sum\limits_{i=0}^{k} a_{i,0}x_i=f(Y_0) \\ \sum\limits_{i=0}^{k} a_{i,n+1}x_i=f(Y_{n+1}) \\ \sum\limits_{i=1}^{k} i\cdot a_{i-1,0}x_i=f'(Y_0) \\ \sum\limits_{i=1}^{k} i\cdot a_{i-1,n+1}x_i=f'(Y_{n+1}) \\ \varepsilon\ge 0;\ j=\overline{1,n} \end{cases}. \qquad (2)$$

Специфіка наведеної задачі лінійного програмування полягає у тому, що матриця обмежень $A=(a_{ij});\ i=0,k;\ j=0,n+1$ має прямокутний вигляд і кількість рядків домінують над кількістю стовпців, $K<<N$. Тому для вирішення поставленої задачі обрано метод можливих напрямків Дж. Зойтендейка [5]. Через те, що метод передбачає наявність нерівності, то умова виразу (2) буде розписана як дві нерівності і на майбутнє буде припущено, що всі обмеження (2) мають вигляд нерівностей.

3. Алгоритм за методом можливих напрямків Дж. Зойтендейка

Нехай нам дана довільна задача лінійного програмування:

$$\begin{cases} \max \sum\limits_{j=1}^{k} d_j x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{k} a_{ij}x_j\le b_i \\ x_j\ge 0,\ i=\overline{1,P};\ j=\overline{1,k} \end{cases}. \qquad (3)$$

Як і всі методи лінійного програмування, градієнтний метод вимагає відшукання точки, яка задовольняє обмеження задачі лінійного програмування. Позначимо її $X^0 = \left(x_1^0, ..., x_k^0\right)$. Тоді для X^0 виконується:

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j^0 \le b_i, \tag{4}$$
$$x_j^0 \ge 0 \quad i = \overline{1, P}; \quad j = \overline{1, k}.$$

На відміну від симплексного і двоїстого методів вирішення задачі лінійного програмування X^0 може й не бути базисною точкою, що значно спрощує вирішення задачі. У цьому дослідженні припустимо, що така точка нам відома. Тоді ірраціональна процедура знаходження рішення задачі (3) зводиться до такого:

а) з точки X^0 обираємо напрямок S, за яким величина $\sum_{j=1}^{k} d_j S_j$ має найбільше значення і вектор $S = \left(S_1, ..., S_k\right)$ задовольняє обмеження $\sum_{j=1}^{k} P_{ij} S_j \le 0,\ i = \overline{1, P_1}\ \left(P_1 \le P + K\right)$, де матриця $P = \left(P_{ij}\right)$ складена з умов матриці обмежень (3), які для точки X^0 виконуються, як рівняння, тобто, для матриці P маємо:

$$\sum_{j=1}^{k} P_{ij} x_j^0 = b_1, \quad i = \overline{1, P_1},$$

додаючи сюди і умову невід'ємного невідомого. Після обрання напрямку S обираємо довжину кроку λ для переходу у наступну точку X^1, виходячи з умови, що X^1 повинна задовольняти (4);

б) вибір величини λ здійснюємо з відношення

$$\lambda = \left\{ \min \frac{b_1 - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j^0}{\sum_{j=1}^{k} a_{ij} S_j} \middle| \sum_{j=1}^{k} a_{ij} S_j > 0, \quad i = 1, P \right\};$$

в) будуємо точку $X^1 = X^0 + \lambda S$, яка задовольняє умови (4). Величина, на яку збільшилася лінійна форма задачі (3), дорівнює $\lambda \sum_{j=1}^{k} d_j S_j$;

г) повторюються пункти а) і б) відносно точки X^1, та отримується X^2. Це повторюється до того випадку, поки не буде існувати напрям, для якого величина $\sum d_j S_j$ стає від'ємною. Цей факт доводить, що не існує точки, яка задовольняє (4), в якій лінійна форма набувала б значення попередньої форми. Тому точка, на якій зупинився процес, буде вирішенням задачі (3).

Для побудови алгоритму слід більш детально зупинитися на виборі напрямку S. Знаходження вектора $S = \left(S_1, ..., S_k\right)$ зводиться до знаходження рішення наступної задачі математичного програмування:

$$\sum_{j=1}^{k} d_j S_j \to \max,$$
$$\sum_{j=1}^{k} P_{ij} S_j \leq 0 \quad \left(i = \overline{1, P_1}\right), \tag{6}$$

до якої, як правило, додають ще одне обмеження (нормалізацію) на вектор $S = (S_1,...,S_k)$.

Для дослідження обираємо обмеження:

$$\sum_{j=1}^{k} S_j^2 \leq 1. \tag{7}$$

Але можливі й інші варіанти нормалізації: а) $-1 \leq S_j \leq 1$; б) $S_j \leq 1$, коли $d_j \geq 0$; $S_j \geq -1$, коли $d_j < 0$.

Будь-яка з нормалізацій має свої особливості. Так, (7) призводить до більшого обсягу робіт над кожною з ітерацій, проте кількість ітерацій менше у порівнянні з іншими типами ітерацій. Оскільки розміри задачі (5)–(7) відносно невеликі, то кількість ітерацій для її рішення відносно незначна, що доводить непотрібність громіздких прийомів нормалізацій інших типів.

4. Застосування методу можливих напрямків для вирішення задач чебишовського наближення з додатковими обмеженнями

Застосовуючи запропонований метод на практиці, дуже важко буде вибрати деяку точку X^0, яка задовольнятиме (4), то замість задачі (3) можна вирішити задачу, яка у деякому сенсі є еквівалентною задачі (3), тобто застосувати метод можливих напрямків до вирішення задач чебишовського наближення з додатковими обмеженнями:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k} d_j x_j - M_\xi \to \max \\ \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j + \beta_i \xi \leq b_i \qquad i = \overline{1, P} \;, \\ x_j \geq 0, \quad \xi \geq 0 \qquad j = 1, K \end{cases} \tag{8}$$

де M є великим невід'ємним числом, а величини визначаються системою

$$\beta_i = \begin{cases} 0, \;\; якщо \;\; b_i \geq 0 \\ -1, \;\; якщо \;\; b_i < 0, \;\; i = \overline{1, P} \end{cases}.$$

Припустимо, що значення невідомої ξ дорівнює $\xi_0 = \left\{\max(-b_i)/b_i < 0, \quad i = \overline{1, P}\right\}$. У зазначеному випадку вектор $X_\xi^0 = (O_1 O, ... O_1 \xi_0)$ стане початковим вирішенням задачі (8). А якщо область умов, що задана у (4), є не порожньою, то задача (8) матиме оптимальне рішення, а невідома ξ дорівнюватиме 0. Саме тому, у разі отримання від'ємного рішення задачі (8) $X_\xi^{on} = \left\{X_1^{on}, X_2^{on}, ..., X_k^{on}, O\right\}$, ми матимемо і оптимальне рішення задачі (3) $X_{on} = \left\{X_1^{on}, X_2^{on}, ..., X_k^{on}\right\}$.

Враховуючи, що ентропія інформації описується моделлю, яка визначає невизначеність повної групи випадкових подій або випадкових станів, $E=-\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$, а за змістом представляє собою зворотну величину до кількості інформації, можлива деяка кількість n випадкових подій з імовірністю $p_1 ... p_n$, які не відповідатимуть прийнятим умовам. Наприклад, число M буде числом з плаваючою крапкою, коли неможливо представити нуль для невідомої ξ. Враховуючи, що при розрахунках на обчислювальній техніці отримання нуля залежить від багатьох факторів, то для побудови початкового вирішення задачі (2) можна застосувати додаткові перетворення і розглянути задачу (9). Перехід від задачі (2) до задачі (9) обумовлюється тим, що значення точок t_i та $f(t_i)$, а також обчислення похідних $f'(a)$, $f'(b)$, завжди мають деяку похибку. Саме тому, замість рівностей (2), можна обмежитися вимогами виконання відповідних умов нерівностей:

$$\left|\Pi_k(a)-f(a)\right| \le \alpha_1 \varepsilon,$$
$$\left|\Pi_k'(a)-f'(a)\right| \le \alpha_2 \varepsilon.$$

Аналогічно будуються умови для точки b. Величини α_1, α_2 додатні та обрані в залежності від необхідної точності виконання нерівностей.

$$\begin{cases} -\varepsilon \to \max \\ \sum_{i=0}^{k} a_{ij} x_i - \varepsilon \le f(Y_j) \\ -\sum_{i=0}^{k} a_{ij} x_i - \varepsilon \le -f(Y_j) \\ \sum_{i=0}^{k} a_{i,0} x_i - \alpha_1 \varepsilon \le f(Y_0) \\ -\sum_{i=0}^{k} a_{i,0} x_i - \alpha_1 \varepsilon \le -f(Y_0) \\ \sum_{i=0}^{k} a_{i,N+1} x_i - \alpha_1 \varepsilon \le f(Y_{N+1}) \\ -\sum_{i=0}^{k} a_{i,N+1} x_i - \alpha_1 \varepsilon \le -f(Y_{N+1}) \\ \sum_{i=1}^{k} i \cdot a_{i-1,0} x_i - \alpha_2 \varepsilon \le f'(Y_0) \\ -\sum_{i=1}^{k} i \cdot a_{i-1,0} x_i - \alpha_2 \varepsilon \le -f'(Y_0) \\ \sum_{i=1}^{k} i \cdot a_{i-1,N+1} x_i - \alpha_2 \varepsilon \le f'(Y_{N+1}) \\ -\sum_{i=1}^{k} i \cdot a_{i-1,N+1} x_i - \alpha_2 \varepsilon \le -f'(Y_{N+1}) \\ \varepsilon \ge 0, \quad j = 1, 2, ..., N \end{cases} . \qquad (9)$$

Вибір початкового вирішення для системи (9) можна отримати таким чином.

Візьмемо $x_i = 0,\ i = \overline{O, K}$. Значення ε визначаємо за формулою

$$\varepsilon^0 \left\{ \max \frac{-f(Y_i)}{a_{i,\varepsilon}} \middle| f(Y_i) < 0, \quad i = \overline{O, N+1} \right\},$$

де $a_{i,\varepsilon}$ – коефіцієнт при ε $(a_{i,\varepsilon} = -1, -\alpha_1, -\alpha_2)$.

У цьому випадку точка $X^0 = \left\{ \underbrace{O_1 O, ... O}_{k+1} \ \varepsilon^0 \right\}$ буде задовольняти обмеженням задачі (9), тобто її можна означити як початкову точку.

Таким чином, вирішуючи задачу (9) методом можливих напрямків, можна отримати вирішення задачі найкращого наближення поліномом $\Pi_k(x)$ функції $f(x)$ на $[a,b]$.

Далі припустимо, що поставлену задачу слід вирішити на кінцевому проміжку $[\alpha, \beta]$, де функція $f(x)$, що апроксимується, є обмеженою, безперервною та однозначною. При обраному масштабі оберемо відрізок одиничної довжини $[C_0, C_1]$. Також приймаємо, що в середині цього відрізку відсутні полюсні точки. Попередньо досліджуємо на цьому відрізку $f(x)$. Приймаємо, що $C_1 > C_0$. Нехай відрізок розбито на N частин, тобто $N+1$ точки апроксимації є заданими. Серед них є:

а) точки C_0 і C_1;

б) $\overline{N}$ фіксованих точок;

в) $(N+1) - \overline{N} - 2 = N - \overline{N} - 1$ звичайних точок.

Нехай x_j^0 – довільна точка ділення; $x_0^0 = C_0$ і $x_{N+1}^0 = C_1$. Вважаємо, що нам задані значення $f(x)$ в кожній із точок x_j^0, тобто задана сукупність $f(x_j^0)$.

Визначимо

$$\delta_{1,j}^{(0)} = f(x_{j+1}^0) - f(x_j^0), \tag{10}$$

а також обчислимо величини

$$\sigma_{1,j}^{(0)} = \frac{\delta_{1,j}^{(0)}}{x_{j+1}^0 - x_j^0}. \tag{11}$$

Тепер досліджуємо поведінку функції $\sigma_1^{(0)}(x)$, заданої точками $\sigma_{1,j}^{(0)}$ на відрізку $[C_0, C_1]$. Будемо розрізняти такі три випадки:

1) $\left|\sigma_{1,j+1}^{(0)} - \sigma_{1,j}^{(0)}\right| \le \xi^{(0)}$, де $\xi^{(0)} > 0$ – досить мале число. Тобто, функція $\sigma_1^{(0)}(x)$ з відомою точністю поводиться як постійна величина. У цьому випадку природно покласти ступінь полінома рівний одиниці $n = 1$.

2) Функція $\sigma_1^{(0)}(x)$ – знакопостійна на $[C_0, C_1]$ й $\sigma_{1,j}^{(0)} \ne 0$. Тоді $n = 2$. Якщо ж $\sigma_1^{(0)}(x)$ приймає нульове значення в m різних точках, між якими перебувають $\sigma_{1,j}^{(0)}$, відмінні від нуля, то $n = m + 2$.

3) $\sigma_1^{(0)}(x)$ – знакозмінна на $[C_0, C_1]$. З урахуванням того, що число N настільки велике щодо довжини відрізка, то ймовірність втрати зміни знака стає дуже малою. Нехай $\sigma_1^{(0)}(x)$ змінює знак у l точках з $[C_0, C_1]$ і крім цього в m різних точках $\sigma_{1,j}^{(0)} = 0$ (між цими

точками обов'язково перебувають такі, в яких $\sigma_{1,j}^{(0)} \neq 0$), але немає знака в їх оточенні. Нехай далі в P точках, зазначених $l + m$ / $f\left(x_j^0\right) = 0$. Тоді ступінь полінома

$$n = l + m + p + 1. \tag{12}$$

Задамося деяким числом $\tilde{\varepsilon} > 0$. Зазначимо, що $P(x)$ задовольняє по точності, якщо

$$\max|P(x) - f(x)| \leq \tilde{\varepsilon},$$
$$x \in [a, b].$$

Очевидно, що кожний поліном $f_i(x)$, який становить $P(x)$, повинен задовольняти по точності.

Нехай на деякому інтервалі $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ побудовано поліном $f_s(x)$ ступеня n. Побудувавши відповідну задачу лінійного програмування, як було показано вище (9), і вирішивши її, ми одержимо величину ε. Вирішення задачі відшукання $f_s(x)$ з уточненням ступеня полінома й підінтервалу апроксимації є кінцевою.

Враховуючи викладене, можна визначити перелік фактичних параметрів, які потрібні для використання в алгоритмі, для створення програми опису яружних цільових функцій:

$P1$ – кількість полюсних точок на $[a, b]$, включаючи й кінці інтервалу апроксимації;

$P2$ – кількість фіксованих точок на $[a, b]$;

NO – кількість точок на відкритому інтервалі $(O, E1)$;

$\Phi 1$ – кількість пар $(x_i,\ f(x_i))$, які задають таблицю функції $f(x)$, $x \in [a, b]$;

$E1$ – довжина підінтервалів апроксимації (попередній крок перебирання $[a, b]$).

Якщо виконується протилежна нерівність, то число підінтервалів апроксимації буде більшим, ніж це передбачено вектором полюсних точок $C[1 : P1]$. Таким чином будуть уведені нові полюсні точки.

$D2$ – задана точність апроксимації (відповідає $\tilde{\varepsilon}$);

$D5$ – відповідає величині α_2;

$D6$ – відповідає величині α_1;

$C[1 : P1]$ – масив полюсних точок, записаних у порядку зростання, що включає точки a і b;

$Z[1 : P1]$ – масив фіксованих точок, записаних у порядку зростання;

$Y[1 : NO]$ – масив точок з відкритого інтервалу $(O, E1)$;

$XX, FF[1 : \Phi 1]$ – масиви відповідних точок

$$x_j \in [a, b] \text{ і } f(x_j),\ j = 1, \ldots, \Phi 1,$$
$$(f(XX[J]) = FF[J],\ J = 1, \ldots, \Phi 1).$$

Запропоновані параметри дозволяють створити алгоритм, достатній для програмної реалізації мовами програмування або за допомогою мови опису алгоритмів UML.

5. Висновки

Наведений варіант кусково-поліноміальної апроксимації з застосуванням методу можливих напрямків є попереднім результатом роботи, що передує розробці алгоритму та створенню програми для опису розвитку локальної надзвичайної ситуації, яка може бути представлена у вигляді яружної функції. У монографії Дж. Зойтендейка запропонований один з підходів до рішення цієї задачі, який базується саме на основах теорії двоїстості і використовує прямий алгоритм симплекс-методу. Саме цей метод був застосований для вибору напряму при вирішенні задачі кусково-поліноміальної апроксимації і представлений у даній роботі.

Слід зазначити, що наведений підхід та первинний алгоритм можуть бути застосовани у сфері підтримки прийняття рішень при вирішенні багатьох задач, пов'язаних з описом складних об'єктів, при розробці програм для пожежних роботів, що призначені входити у закриті приміщення для виконання своїх функцій і задач, працювати на територіях радіаційного забруднення, та при виконанні інших завдань.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Василенко В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы / Василенко В.А. – Новосибирск: Наука, 1983. – 218 с.
2. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами / Попов Б.А. – К.: Наукова думка, 1989. – 272 с.
3. Киселева Е.М. Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные, динамические задачи / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина. – К.: Наукова думка, 2013. – 606 с.
4. Згуровський М.З. Системний аналіз. Проблеми, методологія застосування / М.З. Згуровський, Н.Д. Панкратова. – К.: Наукова думка, 2011. – 728 с.
5. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений / Зойтендейк Г. – М.: Издательство иностранной литературы, 1963. – 178 с.

Стаття надійшла до редакції 25.03.2015