

УДК 539.3

Гоцуляк Є.О., Кошевий О.П., Морсков Ю.А.

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ СТАНУ ОБОЛОНОК УТВОРЕНИХ МІНІМАЛЬНИМИ ПОВЕРХНЯМИ.

Тонкостінні конструкції типу оболонок в процесі експлуатації можуть навантажуватись різними типами навантажень, як статичного, так і динамічного характеру. Ці навантаження мають різну природу виникнення та викликані наступними факторами – власна вага, корисне навантаження, вітрове та снігове навантаження, коливання при русі транспорту, сейсмічні дії, хвильові дії та інше. В зв'язку з цим одним з найважливіших завдань є забезпечення достатнього рівня вібрації оболонки, що відповідає умовам міцності та жорсткості, а також санітарно-гігієнічним нормам. Тому при розрахунках на міцність даного класу оболонок обов'язковим є також розрахунок на коливання в комплексі з розрахунком пружно-деформованого стану.

Маловивченим класом поверхонь, що розширюють можливості формостворення оболонок від'ємної гаусової кривизни, є мінімальні поверхні. Вони можуть бути побудовані на заданих жорданових (що не мають самоперетинів) опорних контурах довільного обрису. Їх фізичним аналогом служить поверхня, що утворюється плівкою з рідини на замкненому контурі, яка приймає найменшу площу в силу її поверхневого натягу.

Розгляд такого класу поверхонь представляє практичний та теоретичний інтерес т. я. :

1) мінімальні поверхні мають найменшу площу при заданому опорному контурі, тому у випадках, що не вимагають особливої міцності, застосування таких оболонок забезпечує мінімальні витрати матеріалів.

2) оболонки мінімальних поверхонь - архітектурно виразні. Вони можуть перекивати складні плани без утворення "розривів геометрії", що є концентраторами напружень.

3) для пружного стану, що визначається тільки попереднім натягом без урахування крайового ефекту, геометрична форма мінімальної поверхні забезпечує рівномірний розподіл зусиль в оболонці.

4) оболонки мінімальної поверхні допускають створення в них полів попередніх мембранних напружень, що забезпечують їм додаткову жорсткість. Геометрія мінімальних поверхонь в загальному випадку не піддається аналітичному опису. Тому для вирішення цієї проблеми, зв'язаної з інтегруванням нелінійного диференціального рівняння, що описує в загальному вигляді мінімальні поверхні при відповідних крайових умовах, доводиться

використовувати методи чисельного аналізу [1]. Такий підхід дозволяє побудувати каркас оболонки по точкам, що представляє собою матрицю дискретних рішень функції, яка описує мінімальну поверхню. Тому всі геометричні характеристики мінімальної поверхні можуть бути отримані тільки в чисельному вигляді.

В останній час, в зв'язку з бурхливим розвитком обчислювальної техніки, при дослідженні геометрії оболонок з мінімальними поверхнями знайшли застосування кінцево-різницевий метод, варіаційно-різницевий та кінцево-елементний метод [2]. Детально методика формоутворення мінімальної поверхні розглянута в роботах [3,10]. По розробленій методиці чисельної побудови точкового каркасу мінімальних поверхонь на замкнутому жордановому контурі виконані деякі тестові розрахунки. Для перевірки ефективності розробленої методики та достовірності результатів розрахунків розглянуті задачі побудови геометрії мінімальних поверхонь на квадратному, трапецієвидному та круглому в плані контурах. Отримані значення координат точкового каркасу розглянутих мінімальних поверхонь співставлялись з аналітичними рішеннями та числовими результатами що приведені в роботах [2,4].

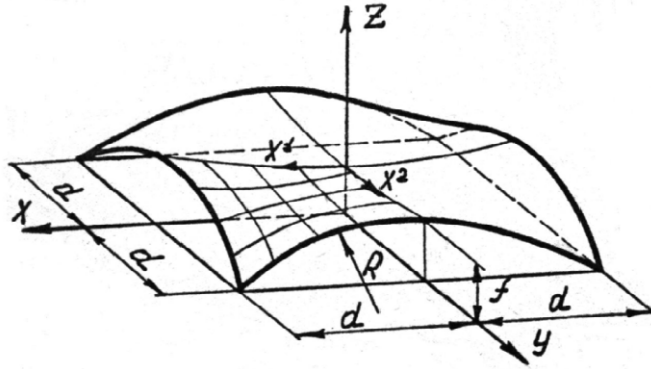
1. Контур мінімальної поверхні з квадратним планом $(2d \times 2d) = 120 \times 120$ складений з чотирьох однакових дуг кола $R=70$ (мал. 1), та має дві площини симетрії. При визначенні точкового каркасу мінімальної поверхні до розгляду приймалась її частина, що обмежена лініями $x^1 = 0; x^2 = 0$, вздовж яких моделювались умови симетрії, та лініями $x^1 = d; x^2 = d$ з граничними умовами у вигляді значень функції $z = \sqrt{R^2 - X^2} - \sqrt{R^2 - d^2}$ та, відповідно, функції $z = \sqrt{R^2 - Y^2} - \sqrt{R^2 - d^2}$ на контурі. На виділену для розрахунку поверхню наносилась кінцево-різницева сітка розміром 6×6 та 12×12 . При цьому число ітерацій нелінійної задачі дорівнювало 5. Отримана в результаті розрахункова форма мінімальної поверхні приведена на мал. 1. Значення координат її точкового каркасу приведені в табл. 1, де співставлені зі значеннями роботи [4]. Можна відмітити добре спів падання результатів.

2. Трапецієвидний в плані контур мінімальної поверхні складений з двох півкол з радіусами $R_1=3, R_2=5$, що з'єднані горизонтальними відрізками прямих. Він має наступні геометричні параметри: $d_1/R_1 = 1, d_2/R_2 = 1, C/R_1 = 3, L/R_1 = 2$. Мінімальна поверхня параметризується на площині в полярно-косоугольній системі координат.

З урахуванням симетрії форми мінімальної поверхні для розрахунку була виділена її частина, що обмежена лініями $X^1 = C, X^2 = C+L$ та $X^2 = \tan^{-1}(d_1/C_1)$, вздовж яких накладались граничні умови у вигляді значень

функції $Z = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + (C \tan x^2)^2}$, $Z = \sqrt{\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 + [(C + L) \tan x^2]^2}$

($0 \ll x^2 \ll \tan^{-1}\left(\frac{d_1}{C}\right)$) та $Z=0$ на прямолінійному контурі, і лінією $x^2 = 0$, на якій приймалась умова симетрії $\partial Z / \partial x^2 = 0$. На виділену для розрахунку область поверхні наносилась сітка розмірністю $6*6$ та $12*12$; рішення нелінійної задачі проводилось за п'ять кроків. Побудована форма мінімальної поверхні показана на мал.2, в таблиці 2 приведено співставлення результатів, отриманих в цій роботі з даними роботи [2].

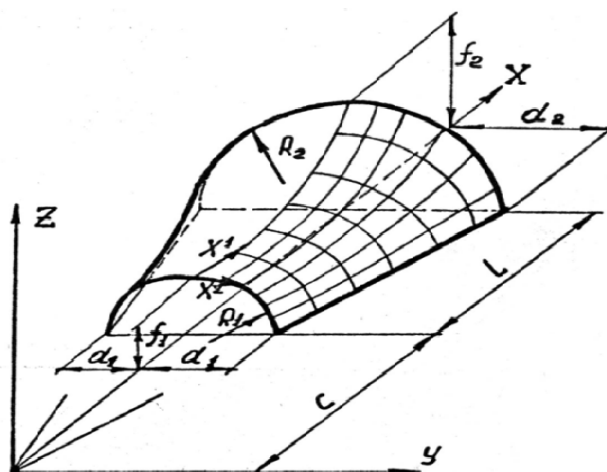


Малюнок 1.

Таблиця 1

Значення координат Z квадратної в плані оболонки

	Y	X						
		0	10	20	30	40	50	60
6*6 12*12 [4]	0	29,24 29,11 29,08	29,24 29,11 29,08	29,28 29,17 29,13	29,51 29,41 29,39	30,14 30,07 30,05	31,49 31,45 31,44	33,94 33,94 33,94
6*6 12*12 [4]	10	29,24 29,11 29,08	29,22 29,09 29,06	29,19 29,08 29,05	29,31 29,21 29,18	29,79 29,71 29,70	30,95 30,91 30,91	33,22 33,22 33,22
6*6 12*12 [4]	20	29,28 29,17 29,14	29,19 29,08 29,05	28,97 28,84 28,84	28,74 28,64 28,60	28,75 28,68 28,66	29,35 29,31 29,31	31,02 31,02 31,02
6*6 12*12 [4]	30	29,51 29,41 29,39	29,31 29,21 29,18	28,74 28,64 28,62	27,93 27,84 27,81	27,12 27,05 27,04	26,68 26,64 26,64	27,18 27,18 27,18
6*6 12*12 [4]	40	30,14 30,07 30,05	29,79 29,71 29,70	28,75 28,68 28,66	27,12 27,05 26,99	25,08 25,02 25,03	22,98 22,94 22,95	21,39 21,39 21,39
6*6 12*12 [4]	50	31,49 31,45 31,44	30,95 30,91 30,90	29,35 29,31 29,31	26,68 26,64 26,64	22,98 22,94 22,95	18,37 18,33 18,34	12,93 12,93 12,93
6*6 12*12 [4]	60	33,94 33,94 33,94	33,22 33,22 33,22	31,02 31,02 31,02	27,18 27,18 27,18	21,39 21,39 21,39	21,93 21,93 21,93	0,0 0,0 0,0



Малюнок 2.

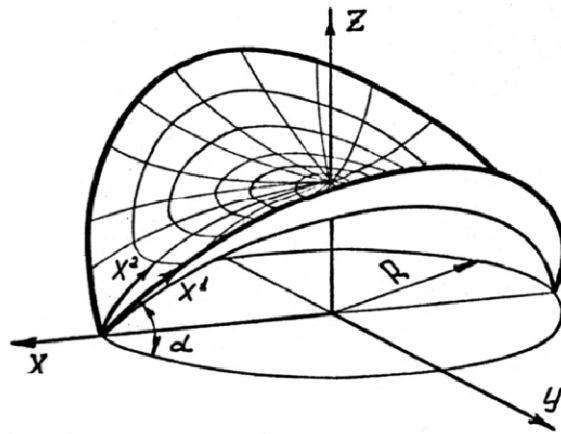
Таблиця 2

Значення координат Z трапецієвидної в плані оболонки

	X^2 (рад)	X^1						
		9	10	11	12	13	14	15
6x6	0,0	3,000	2,477	2,327	2,482	2,937	3,740	5,000
12x12		3,000	2,473	2,319	2,475	2,934	3,742	5,000
/2/		3,000	2,909	2,375	2,537	2,988	3,772	5,000
6x6	0,054	2,961	2,429	2,273	2,425	2,875	3,675	4,935
12x12		2,961	2,424	2,265	2,417	2,872	3,676	4,935
/2/		2,961	2,462	2,325	2,482	2,928	3,708	4,935
6x6	1,108	2,839	2,278	2,109	2,249	2,684	3,470	4,732
12x12		2,839	2,273	2,100	2,240	2,681	3,473	4,732
/2/		2,839	2,317	2,166	2,313	2,745	3,511	4,732
6x6	0,162	2,620	2,008	1,820	1,940	2,345	3,102	4,367
12x12		2,620	2,002	1,808	1,930	2,343	3,108	4,367
/2/		2,620	2,056	1,886	2,015	2,418	3,157	4,367
6x6	0,216	2,271	1,578	1,380	1,475	1,821	2,511	3,784
12x12		2,271	1,572	1,366	1,463	1,820	2,525	3,784
/2/		2,271	1,639	1,455	1,557	1,908	2,587	3,784
6x6	0,268	1,699	0,910	0,764	0,826	1,055	1,550	2,831
12x12		1,699	0,910	0,752	0,816	1,056	1,590	2,831
/2/		1,699	0,972	0,833	0,897	1,130	1,645	2,831
6x6	0,322	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
12x12		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
/2/		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

3. Кругла в плані мінімальна поверхня з радіусом $R=60$ має опорний контур у вигляді двох півеліпсів (мал. 3), що перетинаються по малій осі та нахилені під кутом $\alpha = \pi/4$ до горизонту. Вона параметризована на площині в полярній системі координат. Так як дана поверхня має дві площини симетрії, розглядалась її частина, що обмежена лініями $X^1 = 0$, $X^1 = \pi/2$, вздовж якого

накладалась умова симетрії, та лінією $X^2 = 0$ з граничною умовою $Z = R \tan \alpha |\sin X^1|$. В полярній точці задавалась полярна симетрія. На виділену для розрахунку область поверхні наносилась рівномірна круговому та перемінна в радіальному напрямі кінцево-різницева сітка розмірністю 8×9 , 16×17 , а число ітерацій приймалось рівним 5. Рішення задачі формоутворення мінімальної поверхні отримано у вигляді координат її точкового каркасу, які співставляються з даними роботи [4]. Результати співставлення дають точне співпадання координат точкового каркасу мінімальної поверхні.



Малюнок 3.

В задачах динаміки конструкцій з багатьма ступенями свободи успішно використовується економічний метод визначення власних частот та форм коливань, який дозволяє значно понизити розмірність задачі на власні значення [5-7]. Задачі стійкості аналогічним методом вирішуються в роботі [8]. Алгоритм визначення власних частот складається з двох послідовних етапів зниження розмірності задачі. На першому етапі континуальна система за допомогою методу кінцевих різниць зводиться до адекватної дискретної моделі, далі при застосуванні чисельного аналогу методу Бубнова-Галеркіна з використанням в якості базисних векторів деяких статичних рішень проводиться значне зниження порядку задачі на власні значення. Детальніше методика чисельного дослідження стійкості та коливань оболонок розглянута в роботах [9,10].

Література:

1. Агальцев А.В. Определение точечного каркаса минимальной поверхности // Прикладная геометрия и инженерная графика.- 1967.-№5.-С. 124-126.
2. Агальцев А.В. , Сапаговас М.П. Определение точечного каркаса минимальной поверхности с трапециедальной сеткой // Прикладная геометрия и инженерная графика. - 1975.-№20.- С. 104-108.

3. Є.А.Гоцуляк, О.П.Кошевий, Ю.А.Морсков Чисельне моделювання оболонок утворених мінімальними поверхнями // Прикладна геометрія та інженерна графіка. -2001.-№ 69.- С.47-51.
4. Михайленко В.Е., Ковалев С.Н. Конструирование форм современных архитектурных сооружений.-Киев: БудІвельник,1978.-112с.
5. Кислоокий В.Н., Гранат С.Я. Исследование колебаний пластин, оболочек и комбинированных систем методом базисных векторов на основе разностной дискретизации // Сопротивление материалов и теория сооружений.- 1972.-№16.-С. 37-41.
6. Кислоокий В.Н., Легостаев А.Д. Реализация метода конечных элементов в задачах исследования свободных колебаний оболочек и пластин // Сопротивление материалов и теория сооружений.- 1974.-№24.-С. 25-32.
7. Фиалко С.Ю. Исследование влияния начальной погиби на частоты собственных колебаний ребристых конических оболочек // Прикладная механика.- Т.18, №11.-С.118-122.
8. Гоцуляк Е.А.,Ермишев В.Н., Зоблоцкий С.В. Применение метода редукции базиса к решению линейных задач устойчивости оболочек // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Сб. науч. трудов / Горьковский ун-т.- Горький,1985.-С. 51-58.
9. Гоцуляк Е.А.,Ермишев В.Н.,Жадрасинов Н.Т. Применение метода криволинейных сеток к расчету оболочек / Киев. инж.-строит. ин-т. -Киев ,1980.- 23с.: Деп. в укрНИИТИ 06.01.1981, № 2557.
10. Гоцуляк Е.А., Кошевой А.П. Собственные колебания растянутых оболочек, образованных минимальными поверхностями./ Киев. Инж.-строит. Ин-т. –Киев , 1987. – 40с.: Деп. в укрНИИТИ 16.12.1987, № 3165-Ук87.

Анотація

В статті розглянута методика побудови мінімальних поверхонь на замкнених жорданових контурах. Вирішений ряд тестових задач, що підтверджують її достовірність. Розглядаються основні напрямки розрахунку пружно - деформованого стану, стійкості та коливань таких оболонок.

Аннотация

В статье рассмотрена методика построения минимальных поверхностей на замкнутых жордановых контурах. Решен ряд тестовых задач, которые подтверждают ее достоверность. Рассматриваются основные направления расчета напряженно - деформированного состояния устойчивости и колебаний таких оболочек.

Annotation

In the article considered the method of building minimal surfaces on the reserved zhordanovykh contours. The row of test tasks which confirm its authenticity is decided. Basic directions of calculation of the tense - deformed state of stability and vibrations of such shells are examined.