УДК 515.2.2

кандидати технічних наук: О.О.Калінін, Т.О.Калініна, О.А.Нікітенко, В.О. Макаров,
Одеська національна академія будівництва та архітектури

ЗНАХОДЖЕННЯ СПРЯЖЕНИХ ЕЛІПСІВ

Розглянуто два спряжені еліпси. Наведено аналітичний опис для їх побудови. Показано побудову таких еліпсів у графічному редакторі AutoCAD.

Постановка проблеми. При описі результатів експериментальних досліджень апроксимація таких даних на деяких ділянках може бути виконано за допомогою спряжених кривих другого порядку. В даній статті рішення такої задачі представлено у вигляді спряжених еліпсів.

Аналіз досягнень та публікацій. У роботі [2] було розглянуто задачу про спряження еліпса та кола, було наведено також аналітичний опис для побудови їх спряження.

Постановка завдання. Задано еліпс з великою та малою осями a і b відповідно. В точці А (x_A, y_A) знайти спряжений еліпс до заданого, якщо відома додаткова точка В (x_B, y_B), яка розміщена на вертикальній осі другого еліпса.

Основна частина. Поставлену задачу почнемо з находження лінійно-тригонометричної залежності двох спряжених еліпсів. З Рис. 1 видно, що нормаль до першого еліпса у точці спряження А є дотичною до еволюти другого еліпса. Знайдемо тангенс кута нахилу α нормалі через кутовий коефіцієнт дотичної $y'(x_A) = tg\beta$.

Знайдемо тангенс кута нахилу дотичної для цієї еволюти (так як рівняння еволюти – параметричне, то будемо шукати похідну параметричної функції):

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3 \cdot \dfrac{b*^2 - a*^2}{b*} \cdot \sin^2 t \cdot \cos t}{3 \cdot \dfrac{a*^2 - b*^2}{a*} \cos^2 t \cdot (-\sin t)} = \frac{a*}{b*} tgt \qquad (2)$$

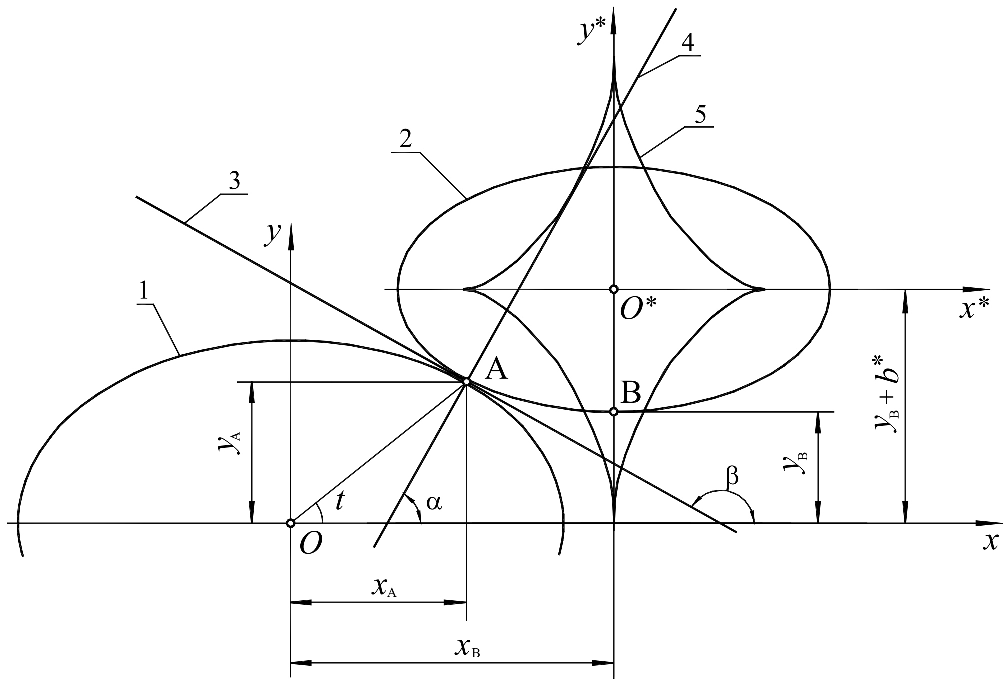
Так як $y'_x = tg\alpha$, то можна прирівняти (1) та (2) рівності, тоді

$$-\frac{1}{y^{/}(x_A)} = \frac{a^*}{b^*} tgt$$

або:

$$\frac{b*}{a*} = \frac{b}{a} \cdot \frac{x_A}{\sqrt{a^2 - x_A^2}} tgt \qquad (3)$$

– шукана лінійно-тригонометричні залежність двох спряжених еліпсів.



1 – заданий еліпс, 2 – шуканий спряжений еліпс,
3 – дотична до заданого еліпса, 4 – нормаль у точці спряження А,
5 – еволюта шуканого спряженого еліпса

Рис. 1

Для знаходження великої та малої осей другого еліпса запишемо координати точки А у його координатних осях $X^*O^*Y^*$ $(-(x_B - x_A); -b^* + (y_A - y_B))$ або $(x_A - y_B; y_A - y_B - b^*)$ (Рис.2, а).

Розглянемо геометричну побудову другого еліпса – точка А лежить на перетині вертикальної та горизонтальної прямих, проведених відповідно з точок С та D (Рис.2, б). Так як точка С належить колу, радіус якого дорівнює a^*, то вона має координати (a^*cost, a^*sint), відповідно точка D – (b^*cost, b^*sint). З цього точка А має координати (a^*cost, b^*sint).

Порівняємо координати точки А на Рис. 2, а з координатами на Рис.2, б, та складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_A - x_B = a^* \cos t \\ y_A - y_B - b^* = b^* \sin t \end{cases}, \text{ або } \begin{cases} x_A - x_B = a^* \cos t \\ y_A - y_B = b^* (\sin t + 1) \end{cases}.$$

Розділивши одне рівняння системи на інше, ми маємо:

$\dfrac{b^*}{a^*} \cdot \dfrac{\sin t + 1}{\cos t} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$, так як $\dfrac{b^*}{a^*}$ – це залежність (3), то маємо:

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{x_A}{\sqrt{a^2 - x_A^2}} tgt \cdot \frac{\sin t + 1}{\cos t} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}.$$

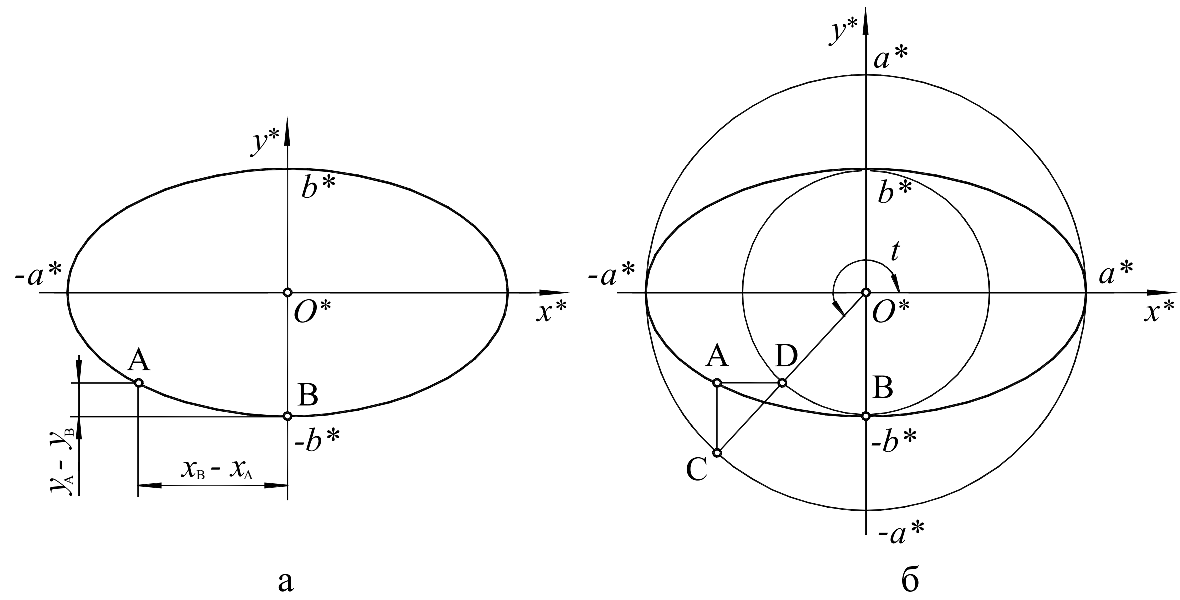


Рис. 2

Зробивши деякі перетворення ми отримуємо квадратне рівняння з одним невідомим параметром t:

$$(1+\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x_A^2}}{x^2})\sin^2 t+\sin t-\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x_A^2}}{x_A}=0$$

Розв'язавши це рівняння відносно $\sin t$, знаходимо $a^*=\dfrac{x_A-x_B}{\cos t}$ та $b^*=\dfrac{y_A-y_B}{\sin t+1}$.

Рівняння спряженого еліпса у координатних осях $X^*O^*Y^*$:

$$\frac{x^{*2}}{\left(\frac{x_A-x_B}{\cos t}\right)^2}+\frac{y^{*2}}{\left(\frac{y_A-y_B}{\sin t+1}\right)^2}=1,$$

і у початкових координатних осях XOY:

$$\frac{(x-x_B)^2}{\left(\frac{x_A-x_B}{\cos t}\right)^2}+\frac{\left(y-y_B-\frac{y_A-y_B}{\sin t+1}\right)^2}{\left(\frac{y_A-y_B}{\sin t+1}\right)^2}=1.$$

На рис. 3 показано побудову спряжених еліпсів у графічному редакторі AutoCAD, де a = 30 мм і b = 20 мм, координати точок А – (19.28, 15.32) та В – (50,10).

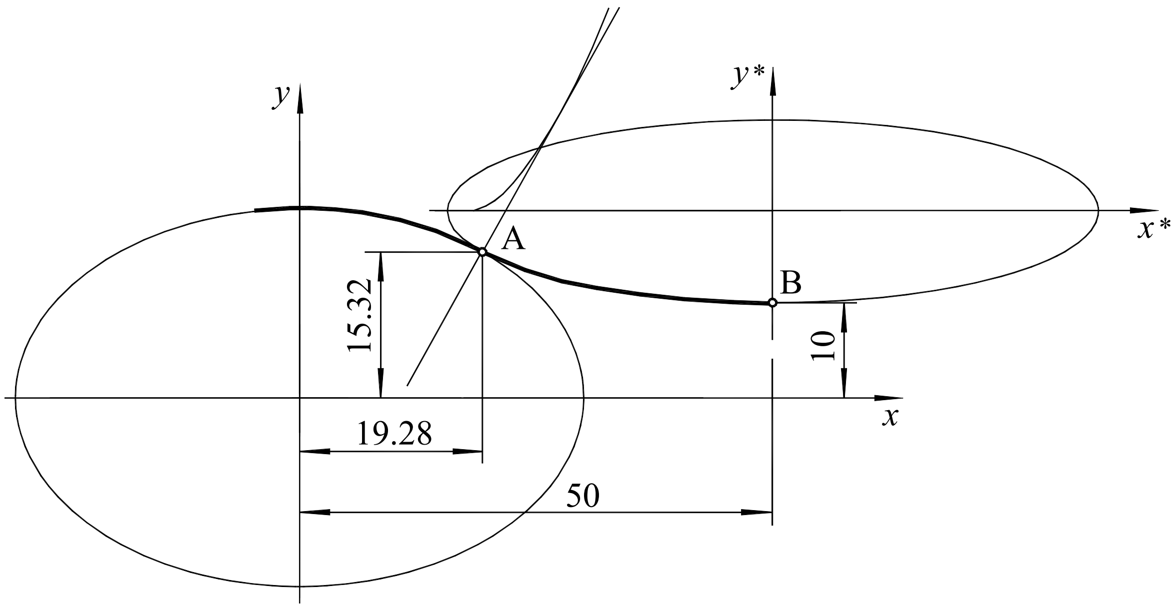


Рис. 3

Висновок. Графічна побудова двох спряжених еліпсів є невирішеною задачею без розрахунків. Використання аналітичного опису зводить поставлену задачу до простих. Наведені формули та використання комп'ютерних технологій дозволяють вирішувати як саму задачу, так і підвищити її графічну точність.

Перспективи подальших пошуків. Наступним етапом буде розглядання спряжених еліпса та прямої.

Список літератури

1. Пискунов Н.С. Дифференциальные и интегральные исчисления для втузов // том 1, М.: Наука, 1965. -548 с.

2. Деякі задачі для спряжених кривих другого порядку // Наукові нотатки, вип.. № 22, Луцьк, 2008.

Аннотация

В работе рассмотрено два сопряженных эллипса. Наведено аналитическое описание для их построения. Показано построение этих эллипсов в графическом редакторе AutoCAD.

Annotation

Two conjugated ellipses are considered in the given work. The analytical description for their buildings is brought. Constriction such ellipses in the graphic editor AutoCAD are shown.