УДК 680.35 Филимонова О.Ю., Минаева Ю.И., Недава К.Л.,
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

НЕАРХИМЕДОВА МЕТРИКА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Рассматриваются вопросы анализа нечетких множеств на уровне ментальных образов в пространстве с не-архимедовой мерой. Показано, что в условиях неопределенности необходимо учитывать отсутствие меры или ее несовпадение с мерой для условий определенности. Предложено рассматривать нечеткое множество (НМ) как объединение нечетких подмножеств, каждое из которых получено на основе процедуры сжатия системы итерируемых функций.

Проблема управления в условиях неопределенности и в теоретическом и в прикладном плане имеет принципиальное Не подвергаемым сомнению достижением в этой области знаний является теория нечетких множеств [1], которая стала одним из главных направлений научных исследований по проблематике искусственного интеллекта.

1. Современное состояние проблемы. Рассматривая неопределенность в рамках ТНМ отметим, что не учитывается, во-первых, то, что мера порядка (в частности, отношение порядка «>») в условиях неопределенности может либо отсутствовать, либо быть иной по сравнению с условиями определенности; во-торых, ФП является продуктом мыслительной (ментальной) деятельности человека, часто результатом *интуитивного* мышления, и должна анализироваться и быть формализованной с учетом этого обстоятельства.

Условия неопределенности требуют учета (теорема А.М.Островского [2]), что природа состоит из двух и только двух частей, одна из которых описывается вещественными числами, а другая *p*-адическими. Известно, что вещественными числами описывается движение макроскопических материальных объектов, часть природы, которая *естественно* должна описываться *p*-адическими числами, не известна. Естественно предположить, что в условиях неопределенности могут иметь место ситуации, где *p*-адический анализ и применение *p*-адических чисел будет естественным.

Leibnitz был первым, кто предложил отказаться от аксиомы Архимеда. Он постулировал бесконечно малые (бесконечно небольшие числа) единичного интервала [0, 1], которые больше чем нуль, но меньше чем каждое положительное действительное число. Не-архимедова метрика определяется способом измерения расстояния между рациональными числами, возникающим из следующей «арифметической» конструкции [3]. Пусть $p \in \mathbf{N}$ - произвольное простое число, определим отображение $\|\text{-}\|_p$ на **Q** следующим образом:

$$\|x\|_p = \begin{cases} \dfrac{1}{p^{\mathrm{ord}_p x}}, \text{если } x \neq 0, \\ 0, \qquad \text{если } x = 0, \end{cases}$$

где $\mathrm{ord}_p x = \begin{cases} \text{наибольшая степень числа } p, \text{которая делит } x, \text{если } x \in Z \\ \mathrm{ord}_p a - \mathrm{ord}_p b, \text{если } x = a/b, a, b \in Z, b \neq 0. \end{cases}$

Метрика, определенная с учетом введенной аксиомы, относится к *неархимедовым* [2, 4], обладающим целым рядом парадоксальних свойств: для неархимедова поля справедливо $\| x \pm y\| \leq \max (\| x \|,\| y\|)$ и при $\| x\| \neq\| y\|$ достигается равенство. Это свойство называют «принципом равнобедренного треугольника». Заметим, что функция $\|.\|_p$ может принимать только «дискретное» множество значений, а именно $Z\ \{p^n, n \in \wedge\} \bigcup \{0\}$. Если $a, b \in N$, то $a \equiv b(\mathrm{mod}\ p^n)$ тогда и только тогда, когда $|a-b| \leq 1/p^n$. Главное отличие введеного расстояния от обычного состоит в том, что целые числа создают ограниченное множество с диаметром 1. Если применить к этому множеству *процедуру пополнения*, то получают компакт, который обозначают $\in_p$, элементы $\in_p$ – *целые p-*ади*ческие числа*. Они допускают запись в виде бесконечнозначных чисел в p-ной системе счисления, *p*-адическое число a однназначно записывается в виде бесконечной влево последовательности $\ldots a_n \ldots a_2 a_1 a_0, 0 \leq a \leq p-1$. ФП «рождена» в ментальном пространстве со своей метрикой, но используется в физическом пространстве с другой метрикой. Естественно, должны быть определены связи между этими разными (по своей природе) метриками. Показано [3], что в ментальном мире существует четкая иерархическая структура, неупорядоченность вполне согласуется с иерархичностью. *Р*-адическое число имеет иерархическую древовидную структуру [4], именно это обстоятельство позволяет использовать ветви *р*-адических деревьев $\mathbf{Q}_p$ в качестве ментальных координат. Одним из свойств *р*-адических чисел есть то, что множество *р*-адических чисел не упорядочено.

2.Постановки основных задач. Определение НМ дано в работах Л.Заде, в соответствии с которым НМ $\tilde{A}$ множества E представляет собой множество упорядоченных пар $\{(x/\mu_{\tilde{A}}(x))\}, \forall x \in E$, где $\mu_{\tilde{A}}(x)$ - степень принадлежности x в A, $\mu_{\tilde{A}} \to [0, 1]$.Если M - множество значений ФП, то $x \xrightarrow[\mu_A]{\sim} M$. В соответствии с нотацией ментальных процессов авторами принято, что мышление *интуитивно* назначает начальную ФП ($\mu(x) \to [0,1]$), заданную на универсальном множестве **X,** $x \in \mathbf{X}$ **(**Хотя имеется целый ряд способов вычисления ФП (на основе наблюдений), но в работе рассматривается ФП, назначаемая в виде экспертной оценки**).** Это **I**-состояние x_0 (или группы **I**-состояний U_0 (множества значений)), которое сообщается сознанием. Математически это соответствует выбору начальной точки x_0 (или окрестности (множества значений) U_0). В качестве начальной точки x_0 можно, например, принять утверждение типа $\tilde{a}$ =*примерно а* (с предварительно назначенной ФП). В соответствии с предложенной парадигмой мышления новые значения ФП (для новых значений УМ, отличных от x_0) являются не точками (как это имеет место в современной ТНМ), а представляются *последовательностями значений*, *другими словами*, новыми утверждениями, полученными, в частности, на основании разнообразных отображений, в частности, аффинных (рассуждение по аналогии). Нелинейное соотношение между **I**-состояниями на входе и на выходе, принимаемое в виде $x_{n+1}=f(x_n)$, $x_n \in \mathbf{X}_I$

Показано [2, 4], что ветви *p* (или *m*)-адических деревьев $\mathbf{Q}_p$ можно использовать в качестве ментальных координат, отличительной особенностью такой модели является *способ кодирования информации*.

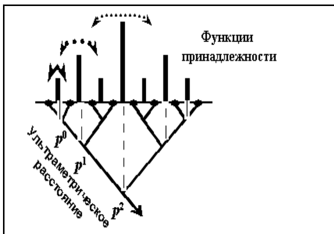
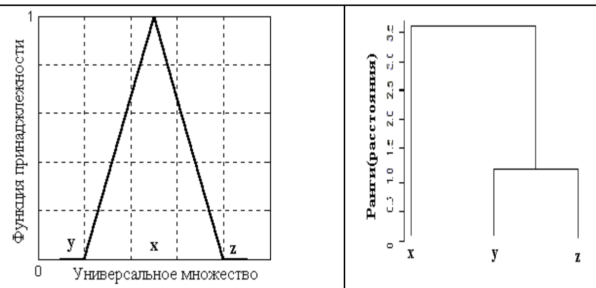
	

Рис.1. Ультраметрическое расстояние для НМ	Рис. 2. Простейшее бинарное дерево для НП (НМ$\bigcup$ФП)	

Предполагается, что все мыслящие системы кодируют информацию, используя последовательности состояний (в простейшем случае «да»=1, «нет»=0) с жесткой иерархической структурой. Наличие иерархии в **I**-последовательностях индуцирует *ультраметрические* геометрии [2], которые *являются основой математического описания процессов, использующих модели мышления*. В общем случае пространство НМ рассматривается как полное метрическое пространство (**X**, р). Метрические свойства НМ могут быть расширены и обобщены с учетом теоремы Лемина-Щепина [2,6] об ультраметризации произвольного метрического пространства (**X**, р). В [2] получен принципиально важный вывод, состоящий в том, что любое физическое метрическое пространство (**X**, р), в т.ч. пространство НМ, может быть представлено мыслящей системой τ, имеющей ультраметрическое пространство ($\tilde{x}$, $\tilde{\rho}$) в качестве пространства **I**-состояний. Обратим внимание на теорему существования и единственности [2], имеющую прямое отношение к интерпретации результатов.

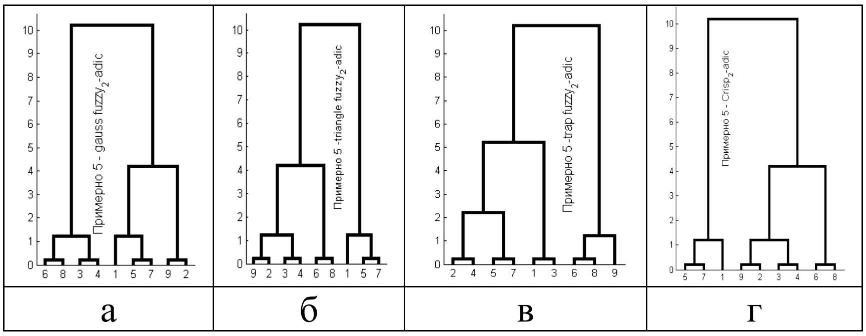


Рис.3. Бинарные деревья для НМ с различными ФП: а) гауссова ФП, б) треугольная ФП, в)трапециевидная ФП, г) стандартначя характеристическая функция

Теорема [2]. Для произвольного метрического пространства (**X**, p) найдутся ультраметрическое пространство ($\hat{x}$, $\hat{\rho}$) и нерасширяющее отображение u, действующее из **X** на $\hat{x}$, такое, что для любого нерасширяющего отображения f: (**X**, p) $\rightarrow$ (**Y**,d), где (**Y**, d) - некоторое ультраметрическое пространство, существует *единственное нерасширяющее* отображение uf: (**X**, p) $\rightarrow$ (**Y**, d) такое, что f(x) = uf(u(x)), x $\in$ **X**.

Таким образом, постановка задачи ментального анализа НМ сводится практически к определению *единственного нерасширяющего* отображения uf: (**X**, p) $\rightarrow$ (**Y**, d) такое, что f(x) = uf(u(x)), x $\in$ **X, (Y**, d) – пространство множеств ФП. Представление пространства НП (УМ$\bigcup$ФП)в виде абстрактного ультраметрического пространства *автоматически* индуцирует иерархическую систему деревьев, т.н. древовидную решетку. Динамика образования новых ФП в каждом ультраметрическом пространстве может представляться как процедура аффинного преобразования(подобная мышлению)на древовидной решетке.

3. **Анализ НМ в ультраметрическом пространстве (*p*-адическом базисе**
Неопределенность рассматривают, как правило, в физическом пространстве, но ФП формулируют в концептуальном. Это приводит к возникновению абстрактных преград, для преодоления которых необходимо найти внутреннюю интерпретацию задачи с подходящей метрикой между проблемой и целью. Одной из таких метрик является *расстояние Монжа–Канторовича*, формулируемое в следующем виде. Пусть g : X $\rightarrow$ **R**- функция с константой Lip g < 1. Метрика *Монжа–Канторовича* в M определяет расстояние между двумя мерами μ и ν как $d_M(\mu,\nu)=\sup\left\{\left|\int g d\mu - \int g d\nu\right|\right\}$, где |g(x) - g(y)| $\le$|x - y|, $\forall$x, y $\in$ X. Согласно выражению для $d_M(\mu,\nu)$, для того, чтобы вычислить расстояние между двумя мерами, необходимо располагать множеством и *Системой Итерируемых Функций)*. Показано, что пара (M, d_M) образует полное метрическое пространство. Более того, для любых μ, $\nu \in$ M *Марковский оператор* M определяет сжатие в (M, d_M), т. е. $d_M(M(v_1),M(v_2)) \le \le c \cdot d_M(v_1,v_2)$.

Пространство нечетких множеств [5]. Нечеткий синглтон [1] введен как упорядоченная пара (x,t), где $x \in X$ и $t \in I$. Этот синглтон представляет элемент множества $\tilde{X} = X \times I$ (X – универсальное множество). Новое нечеткое пространство создается в зависимости от элементов этого множества, которое определено следующим образом.

Определение 1. Пусть (X,d) - метрическое пространство, $\tilde{X}$ будет множеством, состоящим из всех нечетких синглтонов (x, t), определенных как отображение x_t: $X\in[0,1]$, где $x \in X$ и $t\in[0,1]$, связывающие с каждым элементом x_t его степень принадлежности μ_x , определенную как непустое подмножество $x_t = \{(x, \mu_x) : x \in X, t \in I\}$, эти элементы определены как

$$x_t(u) = \begin{cases} 0, & x \neq u \\ t, & x = u \end{cases}.$$

Определение 2. Пространство $F(X)\subseteq P(\tilde{x})$, где $F(X)=\{A\in P(\tilde{x})$ $|A:X \in I, A(x)=t\}$, и $P(\tilde{x})$ –мощность множества $X \times I$, называется *нечетким пространством*. Пространство $(F(X), d^*)$ - полное метрическое пространство.

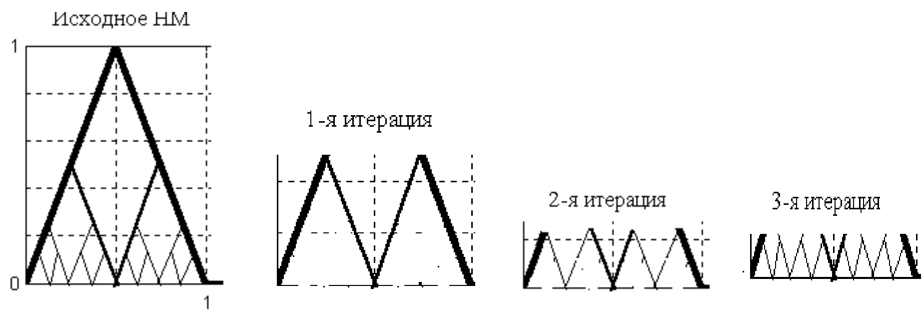
Определение 3. Пространство $H(F(X))=\{A\in F(X)|A\neq\varnothing$, A- compact$\}\subseteq F(X)$ называется *нечетким* Хаусдорфовым пространством.

Показано [5], что метрика Хаусдорфа на НМ *генерирует* ультраметрическое пространство фракталов $\Im(\Omega, d_H)$, что предполагает работу сжимающих отображений. Пусть w_i, i= 1, 2,…,n - система сжимающих отображениий на Ω, тогда преобразование $W:\Im(\Omega) \to \Im(\Omega)$, определенное как $W(B)=\bigcup_{i=1}^{n} w_i(B)$, $(\forall B \in \Im(\Omega))$ есть сжимающим отображением на $\Im(\Omega, d_H)$. Эта уникальная фиксированная точка имеет название аттрактора системы итерируемых функций (СИФ, англ.IFS). Когда сжимающий оператор определен на $D(\Omega,d_\alpha)$, его уникальные фиксированные точки определяют НМ атрактора. В пространстве компактов (H, d_H) сжатием в метрике Хаусдорфа d_H является оператор Хатчинсона с неподвижной точкой - аттрактором IFS. В метрическом пространстве ($\mathbf{H}$(X), d_H) можно определить действие *оператора Хатчинсона* как объединение сжатий $\{w_i\}$: $W=\mathbf{H}(X)\to\mathbf{H}(X):B\to\bigcup_{i=1}^{N} w_i(B)$. Доказано, что оператор Хатчинсона является сжатием в ($\mathbf{H}$(X), d_H) и, следовательно, имеет единственную неподвижную точку. Понятие IFS вводится как объединение сжатий: $\{w_i\}$, i=1, 2,…, N; w_i: $\mathbf{H}(X)\to\mathbf{H}(X)$, в данном случае – сжатие ФП. Из теоремы о неподвижной точке и принципа сжимающих отображений [5] следует, что IFS имеет под действием оператора Хатчинсона единственное инвариантное множество – *аттрактор А*, причем для любого начального компакта итерации оператора Хатчинсона приводят к аттрактору.

Метрика d_H(A,B) имеет два свойства, которые напрямую связаны с ФП. *Первое* свойство гласит. Пусть множества А и В составлены из объединения конечного числа компонентов-кластеров (α-уровневых множеств). Тогда расстояние между двумя кластерами не превышает максимального расстояния между их компонентами: $d_H(\bigcup_{i=1}^{N} A_i, \bigcup_{i=1}^{N} B_i) \le \max_{1\le i\le N} d_H(A_i, B_i)$. *Второе* свойство метрики Хаусдорфа заключается в том, что d_H сохраняет свойство сжатия в пространстве H: $d_H(F(A), F(B)) \le r d_H(A, B)$. Запись F(A), где A - компактное множество, мы будем понимать в смысле действия F на каждую точку компакта, т. е. $F(A) = \{F(x) \mid \forall x \in A\}$. Пара (H, d_H) является полным метрическим пространством. Следовательно, любое сжимающее отображение будет иметь в этом пространстве единственную неподвижную точку. Напомним, что НМ обладает метрикой d_H(A, B), следовательно, пространство НМ обладает 1-м и 2-м свойствами пространства H, кластеры- α-уровневые множества соответствующих НМ.

На основании *принципа сжимающих отображений* получаем, что существует единственная неподвижная точка в H, т. е. непустое компактное множество - *аттрактором и IFS*, такая, что $A = W(A) = \bigcup_{i=1}^{N} W_i(A)$ и $\forall B \in H \ \lim_{k\to\infty} W^{\circ k}(B) = A$. Первое выражение определяет неподвижную точку – компактное множество A - как объединение своих собственных уменьшенных копий. Этот важный вывод заставляет рассматривать НМ не как объединение пар $x/\mu_x,\ x \in X,\ \ \mu_x \to [0,1], x \in X$, а как объединение нечетких п/подмножеств - $\bigcup X_j, X_j \subseteq X_{j-1}, X_j = \{x_j^{(f)}/\mu_{x_j}\}$. Отметим, общем случае необходимо учитывать ФП, т.е каждое преобразование может быть выполнено частично, $A = \mu_1 \cdot W_1(A) \bigcup \mu_2 \cdot W_2(A)$.

Обратная задача теории Систем Итеративных Функций состоит в нахождении подходящей IFS $\{W_i\}_{i=1}^{N}$, $W_i = c_i x + a_i$ и соответствующих вероятностей $\{p_i\}$. Для большинства практических задач проблема упрощается. Так, 2-адического базиса естественно использовать бинарный алфавит {0, 1}. Поэтому можно выбрать IFS с фиксированными коэффициентами в виде: $W_1(x) = x/2$, $W_1(x) = x/2 + 1/2$ и аттрактором [0, 1]. Если рассматривать аффинные преобразования, тогда обратная задача сводится к нахождению вероятностей p_1, p_2, но это отдельный вопрос и в работе не рассматривается.



а) б) в) г)

Рис.4. Действие сжимающих отображений на треугольную ФП

На рис. 4 представлено ультраметрическое пространство $УМ \bigcup ФП$ для простейшей (треугольной) ФП и его бинарное дерево. Характерной особенностью дерева является то, что любая ФП–независимо от ее вида- может быть представлена в виде простейшего бинарного дерева, физическое пространство (**X**, p) представлено в виде древоподобной решетки.

Замечательным свойством алгоритмов, основанных на теории СИФ, является то, что их результат (аттрактор) не зависит от выбора начального множества E_0 или начальной точки x_0. В случае детерминированного алгоритма это означает, что в качестве E_0 можно взять любое компактное множество на плоскости, для НП выбор x_0 вне центра интервала приводит к тому, что имеем интервалы с разными весами (рис. –б). Основная задача теории СИФ – определить условия, при которых СИФ порождает предельное множество E_0.

Выводы

1. Теория нечетких множеств как аппарат решения задач управления в условиях неопределенности может быть рассмотрена с учетом следующих обстоятельств:

- мера порядка в условиях неопределенности может либо полностью отсутствовать, либо быть иной по сравнению с условиями определенности, в частности, эта мера может быть не-архимедовой;

- функция принадлежности является продуктом мыслительной (ментальной) деятельности человека, нередко результатом интуитивного мышления, и должна анализироватся именно на этом уровне;

- любой объект в условиях неопределенности следует рассматривать как новый тип объектов, для которых в общем случае необходимо конструировать новые типы "величин" и новые метрики.

2. Нечеткая переменная в 2-адическом базисе имеет вид дерева, ветвями которого есть: a* {1 0 0 0 …...}, a* {1 0 1 1 …...}, a* {1 0 1 0 0 …...}, . . . a* {1 1 1 1 …...}, выражение в {....} есть 2-адическое число. Характерной особенностью ветвей является то, что все они имеют одинаковую 2-адическую оценку и 2-адический порядок. Это дает возможность использования 2-адической модели НП не только для выполнения нечеткой арифметики, но и для получения нечетких выводов, при условии использования в качестве антицидентов и консекантов (правило „если-то”) 2-адической оценки и 2-адического порядка.

Литература

1. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 165 с.

2. Хренников А. Ю. Моделирование процессов мышления в p-адических системах координат. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 296 с.

3. Коблиц Н. *p*-адические числа, *p*-адический анализ и дзета-функции. Пер. с англ. В. В. Шокурова / Под ред. и с предисловием Ю. И. Манина. - М.: Мир, 1981.- 192 с.

4. Хренников А. Ю. Не-архимедов анализ и его приложения. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 216 с.

5. Nadia M. G. AL-Sa'idi, Muhammad Rushdan Md. Sd., and Adil M. Ahmed. IFS on the Multi-Fuzzy Fractal Space. World Academy of Science, Engineering and Technology 53 2009. –pp.822-828

6. Мінаєв Ю.М., Філімонова О.Ю., Вінник Д.М., Мінаєва Ю.І., Апонасенко Д.В. Нечіткі множини в ультраметричному просторі. – Проблеми управління та інформатизації, № 25. - 2009. – с. 11-20.

Анотація.

Розглядаються питання аналізу нечітких множин на рівні ментальних образів у просторі з не-архімедовою мірою. Показано, що в умовах невизначеності необхідно враховувати відсутність міри або її розбіжність із мірою для умов визначеності. Запропоновано розглядати нечітку множину (НМ) як об'єднання нечітких підмножин, кожне з яких отримане на основі процедури стиску системи ітерованих функцій.

The summary.

Questions of the analysis of fuzzy sets at a level of mental images in space with non-archimedean measure. It is shown, that in conditions of uncertainty it is necessary to take into account absence of a measure or its discrepancy with a measure for conditions of definiteness. It is offered to consider fuzzy set (FS) as association of fuzzy subsets, each of which is received on the basis of procedure of compression of system iterated functions.