

УДК 624.011

к.т.н, професор Кліменко В.З.,
Коваленко М.С., Коваль А.В.,

Київський національний університет будівництва та архітектури

**КОЕФІЦІЄНТ ПОВЗДОВЖНЬОГО ЗГИНУ В РОЗРАХУНКУ СТЕРЖНІВ,
ЩО ПРАЦЮЮТЬ НА СТИСК ЗІ ЗГИНОМ**

Розглянуто методики визначення коефіцієнтів повздовжнього згину в розрахунках стержнів, що працюють на стиск зі згином за різними нормативними документами та літературними джерелами. Виконано числове дослідження та порівняння цих методик.

Ключові слова: коефіцієнт повздовжнього згину, стиснуто-зігнуті стержні, гіпербола Ейлера.

В [1] один з авторів цієї статті висловив сумнів в доцільності збереження в методі розрахунку за граничним станом незмінним відношення E/R^{sp} , яке використовується при обчисленні стійкості поздовжньо стиснутих дерев'яних стержнів. Коефіцієнт φ , в свою чергу, використовується в розрахунку стержнів, що працюють на стиск зі згином. За прийнятою в нормах проектування методикою їх розрахунку при гнучкості стержнів $\lambda = 30 \div 50$, звичайних для елементів дерев'яних конструкцій, коефіцієнт φ становитиме більше одиниці. Це викликає небажаний в нормативному документі методологічний дисонанс, що полягає в порушенні одного з основних положень розрахунку будівельних конструкцій. В [2] тим же автором запропоновано, яким чином усунути неметодологічність розрахунку. В цій пропозиції усувається тільки зовнішня формалізована неметодологічність розрахунку, а по суті зміст його залишається не адекватним фізичному явищу, що відбувається в елементах, що працюють на стиск зі згином. Зроблену в [2] пропозицію можна порівняти з тим, як викладається визначення коефіцієнту ξ в СНиП II-V.4-71 – 1, СНиП II-25-80 – 2 і в Посібнику [5] до СНиП – 3:

$$\text{по 1} \quad \xi = 1 - \frac{\lambda^2 \cdot N}{3100 \cdot R_c \cdot F_{op}}$$

$$\text{по 2} \quad \xi = 1 - \frac{N}{\varphi \cdot R_c \cdot F_{op}}$$

$$\text{по 3} \quad \xi = 1 - \frac{N_c}{N}$$

З яких міркувань при заміні одного нормативного документу на інший змінився запис формули не беремося судити. З методологічної позиції запис за 1 краще ніж по 2. В ньому в якійсь мірі завуальовано коефіцієнт φ , користувач може не помітити того, що для деяких стержнів, що працюють на стиск зі згином, $\varphi > 1$. Використовуючи формулу по 2, питання про те, чому коефіцієнт φ стає більше за одиницю, уникнути не можливо. Нормативний документ не зобов'язаний пояснювати фізичний зміст розрахункових формул. Посібник до

СНиП також не дає пояснення, чому $\varphi > 1$. Розкриваючи фізичний зміст розрахунку стержнів за деформованою схемою в Посібнику по 3, слід сказати що N_c – критична стискаюча сила по Ейлеру. Ніде в літературі не ставиться питання про взаємозв'язок сил N_c та N_s . Коли ці сили відносяться до стержнів, що працюють на стиск зі згином, за гнучкістю до межі пропорційності напружень (λ_{cp} на графіку $\varphi - \lambda$) формула для ξ по 3 адекватна фізичному явищу в стержні. При гнучкості стержнів $\lambda < \lambda_{cp}$ ця адекватність порушується: N_s відноситься до Ейлерового стержня з коефіцієнтом φ для нього на гіперболі Ейлера, а N_c – зусилля в реальному стержні з коефіцієнтом φ для нього на ділянці графіку $\varphi - \lambda$, описаного формулою Кочеткова. В формулах для ξ по 1, 2 та 3 при $\lambda \leq 55$ відбувається штучне об'єднання двох різних фізичних явищ.

Нам, здається, достатньо було сказати, що при розрахунку стержнів, які працюють на стиск зі згином, і мають маленькі гнучкості коефіцієнт φ має інший фізичний зміст, що це вже не коефіцієнт повздовжнього згину, і тому він може бути > 1 .

Збереження однієї і тієї ж формули для ξ у всьому діапазоні гнучкості дерев'яних стержнів, що працюють на стиск зі згином, завдяки її структурі, не науково і не правильно з методологічної позиції.

Коефіцієнт φ в межах пружної роботи деревини знаходиться так:

$$\varphi = \frac{N_{кр}}{F \cdot R^{ep}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2 \cdot F \cdot R^{ep}},$$

а з урахуванням, що $l/\sqrt{I/F} = \lambda$ та $E/R^{ep} = const = A$, формула для φ набуває вигляд:

$$\varphi = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2 \cdot R^{ep}}. \quad (1)$$

А.Б. Губенко в [3], ввівши замість, застосовуваних до нього дослідниками експериментальних залежностей абсолютних величин " $\sigma - \varepsilon$ ", наведені діаграми, встановив, що межа пропорційності, яка є межею застосовності формули Ейлера $N_{кр} = \pi^2 EI/l^2$, дорівнює $0,5R^{ep}$. Перейшовши в наведених діаграмах від абсолютних значень напружень по осі ординат до відношення $\varphi = \sigma/R^{ep}$ він встановив за графіком " $\sigma - \varepsilon$ " в масштабі φ , що $E = 0,5/\varepsilon = 0,5/0,0016 = 312$, отже справедливе відношення $E/R^{ep} = 312$ (рядок 4 в таблиці). В цій же роботі він привів результати досліджень ЦАГИ, згідно яких це відношення становить 308.

Використовуючи формулу Енгессера для критичної сили Ейлера,

$$N_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \tau, \quad (2)$$

$$\text{в якій } \tau = \frac{n}{\left(\sqrt{\frac{E}{E_\sigma}} + 1\right)^2}, \text{ де } E_\sigma - \text{“модуль повздовжнього згину”}, \text{ вираз (1)}$$

$$\text{записується так } \varphi = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2 \cdot R^{ep}} \tau \text{ або } \varphi = \frac{A}{\lambda^2} \tau. \quad (3)$$

Прослідкуємо, як змінювалось уявлення про величину A та коефіцієнта φ за час розвитку методики розрахунку дерев'яних стержнів на повздовжній згин. В [4] наведені такі відомості: в ТУиН Дерев'яні конструкції та споруди, 1928 р. гранична гнучкість, при якій застосовна формула Ейлера, прийнято $\lambda = 100$, якій відповідала межа пропорційності $s = 0,3$ (рядок 1 таблиці).

В [4] на основі дослідів академіка К.К. Сімінського дано коефіцієнт пропорційності $s = 0,7R^{ep}$ при $R^{ep} = 350 \text{ кг/см}^2$ та $E = 110000 \text{ кг/см}^2$. Тоді з формули $\pi^2 E / \lambda^2 = s \cdot R^{ep}$ отримуємо, що $\lambda_{cp} = 3,14 \sqrt{110000 / 0,7 \cdot 350} = 66,5$ (рядок 3 в таблиці).

Результати дослідів А.Б. Губенко, які увійшли у всі нормативні документи аж до СНиП II-V.4-71, розглянуті вище (рядки 4 та 6 в таблиці). В нормативних документах величина $A = 3100$ залишалась незмінною для умовної деревини, хоча тимчасові опори її стиску вздовж волокон змінювались. В таблиці наведені характеристики деревини, що використовуються в розрахунку дерев'яних стержнів на повздовжній стиск.

Таблиця 1

	Рік і джерело	Коеф. пропорційності	Тимчасовий опір стиску, кг/см^2 ; МПа	Модуль пружності, кг/см^2 ; МПа	E/R^{ep}	λ_{cp}	$A^{**})$		$\varphi = A/\lambda^2$	
							$A = \pi^2 (E/R^{ep})$	по нормах	фак.	по нормах
1	1928 ТУиН	0,3	-	-	-	100	-	-	-	-
2	1931 ТУиН [4]	0,3	333	100000	300	100	-	3000	-	0,3
3	1934 [4]	0,7	350	110000	314	66,5	3096	-	0,698	-
4	Енгессер-Карман [4]	0,4	300	100000	333	63	-	-	0,67	-
5	1939, ТУиН	0,5	320	100000	312	-	-	-	-	-
6	1940 [3]	0,52	320	100000	312	78	3076	-	0,505	-
7	СНиП-II-V.4-71	0,55	400	100000	250	75	3944	3100	-	0,551
8	СНиП II-25-80, для 3х сортів цільної деревини	≈ 60	440 ^{*)}	100000	227	70	2238	3000	0,457	0,612
			330		303	70	2987	3000	0,609	
			310		322	3175	0,648			
			220		454	4476	0,913			
9	Посібник до СНиП для 3х сортів клеєної деревини		34,5	10000	290	70	2859	3000	0,583	0,612
			32,0		312		3076		0,628	
			23,5		425		4190		0,855	
10	В розрахунках				300		2956	3000	0,612	0,612

^{*)} 44 МПа – R_y^{ep} чистої деревини стандартних зразків

^{**)} Постійна A в формулі $\varphi = A/\lambda^2$

З введенням в дію СНиП трьох сортів цільної та клеєної деревини методологія розрахунку стержнів на стиск збережена з фіксованою величиною

$A=3000$ при різних R^{sp} для різних сортів деревини при однаковому модулі пружності.

Данні таблиці цікаві в контексті статті в зв'язку з головною її темою. Не було та немає зараз стабільної думки про ті механічні характеристики деревини, які впливають на коефіцієнт повздожнього згину, а через нього на розрахунок стержнів, що працюють на стиск зі згином.

На рис.1 показані графіки коефіцієнта φ від першого – графіка 3, запропонованого Тетмаєром, до залежності $\varphi-\lambda$ за діючими нормами СНиП II-25-80 – графік 1. Залежність Тетмайєра взята з [4]. Сам Тетмайєр результати своїх дослідів на повздожній згин.

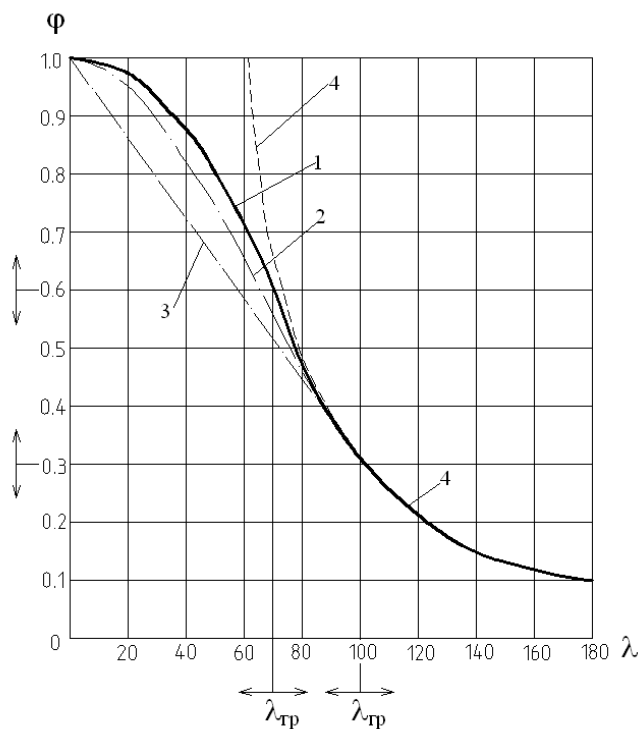


Рис.1. Графіки $\varphi-\lambda$:
 1 – за СНиП II-25-80;
 2 – за ТУиН, 1931р. (за
 Енгессером-Карману);
 3 – дослідної за
 Тетмайєром;
 4 – гіпербола Ейлера

стержнів з деревини різних порід не розділив за породами та отримав середню залежність $\sigma-\lambda$ у вигляді прямої (результати випробувань наведені в [3]) в інтервалі гнучкості $0 \leq \lambda \leq 100$. За характеристиками деревина, що прийняті в ТУиН Дерев'яні конструкції (1931р.), рядок 2 в таблиці в [4] дана крива 2, на якій ділянка при $100 < \lambda$ отримана за формулою Енгессера-Кармана [3] з урахуванням змінного «модуля повздожнього згину». В інтервалі гнучкості $\lambda > 70$ для графіку 1 та $\lambda > 100$ для графіку 2 результати відповідають гіперболі Ейлера. В діапазоні $70 \leq \lambda \leq 80$ різниця у величині коефіцієнту повздожнього згину невелика, практично її немає при $70 \leq \lambda \leq 100$. Різниця помітно зростає при гнучкості $30 \leq \lambda \leq 60$, які характерні для конструкцій з деревини, в особливості з клеєної деревини.

В Посібнику до СНиП [5] відмічається наступне: відношення E/R^{sp} , як і в попередніх нормах, прийнято за константу, незалежно від сорту деревини – $E/R^{sp} = 300$. І далі. Такий підхід слід розглядати як відоме припущення. Насправді R^{sp} впливає на зміну відношення E/R^{sp} переважно в більшу сторону. З таблиці видно, що для деревини 1-го сорту E/R^{sp} практично співпадає, а для деревини клеєної це відношення вже менше. Воно значно більше для цільної та клеєної деревини 3-го сорту. Ігнорувати різницю у відношенні E/R^{sp} при розрахунках елементів на стиск з різних сортів деревини, нам здається, не зовсім виправдано. Так, наприклад, при проектуванні центрально стиснутих стійок з цільної деревини або колон з клеєної деревини 3-го сорту перевитрата матеріалу при коефіцієнті повздовжнього згину відповідно 0,913 та 0,855 в порівнянні з $\varphi = 0,612$ при рівній гнучкості елементів вже достатньо помітна.

В [5] говориться, що при розрахунку елементів за другою групою граничних станів, значення модуля пружності також прийнято однаковим в незалежності від сорту деревини, однак в майбутньому необхідна його диференціація. Нам здається, також необхідна диференціація модуля пружності в розрахунках стиснутих елементів на стійкість, згідно рекомендації СНиП П-25-80 по визначенню E за формулою $E' = 300R_c$ з обчисленням коефіцієнта повздовжнього згину по формулі (1) або за формулою (3) з введенням поправкового коефіцієнту, враховуючи відношення модулів пружності при визначенні $A = 3000 \frac{300R_c}{10000}$.

Повернемося до дослідження А.Б. Губенко. В межах пружності, ($\varphi < 0,5$) $E_\sigma = E$, формула (3) прийняла відомий вираз

$$\varphi = 3100/\lambda^2 \quad (4)$$

Використовуючи апроксимуючі рівняння зведених діаграм стиску, їм отримано теоретичний графік для коефіцієнту φ , що показаний на рис.2.

Графік добре співпадає з результатами численних випробувань дерев'яних стержнів на повздовжній згин. Помітне розходження спостерігається в області малих гнучкостей $\lambda < 50$. На цій ділянці залежності $\varphi - \lambda$ на зміну формули $\varphi = 3100/\lambda^2$ була прийнята нормативна залежність, запропонована Д.А. Кочетковим, $\varphi = 1 - 0,8(\lambda/100)^2$.

Величина межі пропорційності $\varphi = 0,5$ на графіку відповідає гнучкості стержня $\lambda \approx 78$. В нормах 1939 р. та подальших ця величина прийнята рівною $\lambda = 75$. До цієї гнучкості діє формула Ейлера для знаходження коефіцієнту φ , а для $\lambda \leq 75$ працює формула Кочеткова. Норми регламентували знаходити коефіцієнт φ при розрахунку стержнів, що працюють на стиск зі згином на всьому діапазоні гнучкостей за формулою (4). Не зрозуміло, чому не дали пояснення тому, що в діапазоні гнучкостей $25 < \lambda < 55,7$ коефіцієнт φ стає більше одиниці, а при $40 < \lambda$ – набагато більше одиниці. Не дивлячись на це, у

всіх нормах, включаючи діючі, в розрахунку стержнів що працюють на стиск зі згином, обчислення коефіцієнту ξ рекомендується за формулою $\xi = 1 - (N/\varphi R_c F_{op})$ з визначенням коефіцієнта φ за єдиною формулою $\varphi = 3000/\lambda^2$ в СНиП II-25-80 при будь який гнучкості стержня. Це, на наш погляд, серйозна методологічна претензія до норм проектування. Її можна було уникнути обчисленням коефіцієнта φ за формулою Кочеткова з використанням для знаходження коефіцієнта ξ іншої формули або діючої з корегуючим коефіцієнтом [2]. Але, як зазначалося вище, методологічний дисонанс знімається тільки зовні.

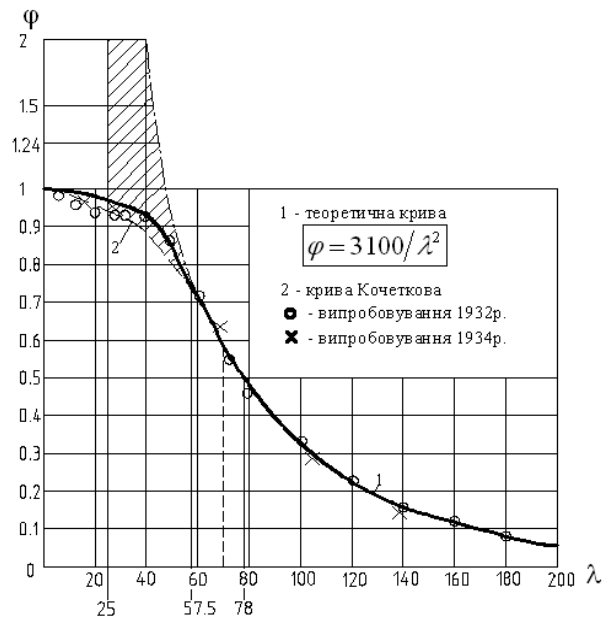


Рис. 2. Графік залежності φ від λ

Втрата стержнями, що працюють на повздовжній стиск, стійкості має феноменологічний характер, представлений на графіку $\varphi-\lambda$ дослідними точками. Як фізичне явище втрата стійкості не залежить від математичних рівнянь ділянок кривих φ . На кожній ділянці в інтервалі визначувальних гнучкостей стержня рівняння відповідають своєму феноменологічному змісту. Апроксимація увігнуто-опуклої кривої $\varphi-\lambda$ однією математичною формулою навряд чи можлива. Графік $\varphi-\lambda$ з точки зору на нього як на фізичне явище ділиться на дві частини з межею між ними, що відповідає переходу роботи деревини з пружної стадії в непружну.

Енгессер першим вирішив питання стійкості стержня за межею пружності (1889р.) та запропонував розповсюдити формулу Ейлера на непружну область шляхом введення замість постійного модуля пружності «модуля повздовжнього згину» E_σ . Він керувався такими міркуваннями. Якщо стержню, попередньо стиснутому до напруження за межею пропорційності, надати деяке викривлення, то з увігнутої сторони перерізу напруження стиску декілька

збільшиться, а з розтягнутої сторони – зменшиться. Напруження на увігнутий стороні перерізу стає функцією змінного модуля E_σ , на опуклій – вони продовжують залишатися залежними від постійного модуля E . Замінивши ломану епюру напружень в перерізі прямокутною, що дає той же внутрішній момент, Енгессер (1895р.) для стержня прямокутного перерізу отримав $E_\kappa = E\tau$.

Фізичні явища в межах пружної та за межами пружної роботи матеріалу зовсім різні. В першому випадку справедливе рішення стійкості стержня Ейлера. В другому випадку рішення стійкості стержня в класичній постановці неприйнятне без його зміни.

Карман дослідним шляхом встановив, що рішення повздовжнього згину в непружній області може базуватися на диференційному рівнянні пружної лінії

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{N \cdot y}{E' \cdot I}, \quad (5)$$

якщо замінити постійний модуль пружності «результуючим модулем». Він дослідним шляхом прийшов до рішення Енгессера та запропонував свою формулу для критичних напружень

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E'}{\lambda^2}. \quad (6)$$

Різні фізичні явища по обидва боки $\lambda_{тр}$ описані різними математичними функціями. На ділянці $\lambda > 70$ при фіксованому відношенні $E/R^{sp} = A = const$ для умовної деревини для φ формулою (8) СНиП II-25-80. А в 4.17 СНиП ця формула розповсюджується на всі значення λ без пояснення з яких міркувань таке можливе. На короткій перехідній ділянці аналітичної залежності $\varphi - \lambda$ дають приблизно однакові результати. Це логічно, тому що в реальному стержні різкої границі між двома фізичними явищами не може бути.

Таке довге пояснення суті двох частин графіку $\varphi - \lambda$ дано з тих міркувань, що коефіцієнт повздовжнього згину, який використовується в розрахунку стержнів, що працюють на стиск зі згином, за деформованою схемою, в формулі (30) СНиП не може знаходитися за однією формулою (8) при будь якій гнучкості. Це є фактом проти визнання формули (30) для обчислення коефіцієнта ξ адекватною фізичному явищу в стержнях, що працюють на стиск зі згином, які мають різну гнучкість. При $\lambda < 57,5$ графік φ різко зростає, заштрихована його частина відноситься до віртуального стержня, що не може існувати в природі. Здається ніщо не заважало використовувати на ділянці $\lambda \leq 70$ формули Кочеткова, але вона давала за формулою (30) рішення, що не відповідає фізичному явищу. З сорокових років минулого століття нормативним зберігається розрахунок за методикою с використанням формули (30) СНиП з серйозною претензією до неї з методологічного позиції.

Феноменологічний підхід до математичної інтерпретації роботи стержнів, що працюють на стиск зі згином, повинен ґрунтуватися не з точки зору історичного розвитку методики [6], а слідуючи з фізичного явища.

В публікаціях [1, 2, 6, 7] докладно розглянуто фізичний сенс коефіцієнта φ на різних ділянках графіка $\varphi-\lambda$, розкрита причина функціонування існуючої методики розрахунку стержнів що працюють на стиск зі згином. Розглянуті різні методики розрахунку стержнів. Для практичного застосування пропонуються дві з них: одна на основі методики СНиП, але з усуненням в ній методологічного дисонансу; друга на основі методу початкових параметрів, яка є самою точною. Труднощі в її використанні зараз немає, оскільки результати інтегрування диференційного рівняння зогнутої осі стержня, що працює на стиск зі згином, є в довідниковій літературі для різних розрахункових схем пружних стержнів.

Література

1. Клименко В.З. Развитие методики расчета сжато-изогнутых элементов в историческом аспекте / Збірник наукових праць УкрНДІПСК ім. В. М. Шимановського. Вип. 5. – К. – 2010. – С. 130-139.
2. Клименко В.З. Устранение методологического дисонанса в расчете деревянных элементов, работающих на изгиб со сжатием / Часопис «Промислове будівництво та інженерні споруди» №2 – К. 2010. – С. 41-44
3. Губенко А.Б. Устойчивость центрально сжатых цельных деревянных стержней / В сб.: Исследование прочности и устойчивости деревянных стержней. – Стройиздат Наркомстрой. – 1940. – С.3-13.
4. Инж. Пинаджан В.В. Расчет деревянных стержней на одновременное действие изгиба и осевого сжатия. – ЗИС. – 1934. – С.37-38.
5. Пособие по проектированию деревянных конструкций (к СНиП II-25-80) / Стройиздат. – М.1986. – С.30-31.
6. Клименко В.З. Философическая и методологическая основы расчета сжато-изогнутых элементов деревянных конструкций / В сб. научных трудах Международного симпозиума. – Брест. – 2009. – С.119-122.
7. Клименко В.З., Козовенко А.М. Расчет сжато-изогнутых деревянных элементов / Там же. – С.123-126.

Аннотация.

Рассмотрены методики определения коэффициентов продольного изгиба в расчетах стержней, которые работают на сжатие с изгибом за разными нормативными документами и литературными источниками. Выполнено числовое исследование и сравнение этих методик.

Abstract.

Methods for determining the coefficients in the calculation of buckling of rods, which operate on the compression curve for different regulations, and literary sources. Holds the numerical study and comparison of these methods.