УДК 624.046 М.О. Пеклов,
Київський національний університет будівництва і архітектури

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧИ ЗГИНАННЯ ПРЯМИХ СТРИЖНІВ, ЩО НА ОКРЕМИХ ДІЛЯНКАХ СПИРАЮТЬСЯ НА ПРУЖНУ ОСНОВУ.

В статі викладається аналітичний розв'язок задачі згинання системи прямих стрижнів, частина яких на окремих ділянках спираються на пружнію основу. Якщо основа існує, то v(x),φ(x),M(x),Q(x) визначаються розв'язком ак. Крилова. Де основа відсутня, використовується відомий розв'язок задачі згинання балки за методом початкових параметрів. Шукані початкові параметри визначаються розв'язком системи лінійних рівнянь, які реалізують умови сумісності деформації і умови рівноваги вузлів. v(x),φ(x),M(x),Q(x) окремого стрижня визначаються аналітично відомими формулами.

Задача згинання системи прямих стрижнів, частина яких на окремих ділянках спираються на пружнію основу, розглядається як краєві задача системи лінійних диференціальних рівнянь, які пов'язані спільними граничними умовами. Граничні умови окремого стрижня враховують умови зовнішнього контакту чи умови сумісності деформацій сусідніх стрижнів. Шукані переміщення v(x), φ(x) і зусилля M(x), Q(x) окремого стрижня визначаються розв'язком відповідного диференціального рівняння четвертого порядку, яке має чотири довільні сталі. Якщо аналітичний розв'язок диференціального рівняння відомий, то підлягають визначенню лише чотири довільні сталі. Тому, якщо n – кількість стрижнів системи, то загальна кількість невідомих дорівнює $4n$.

Розглядаються два типа прямих стрижнів, геометричні і фізичні властивості яких задовольняють вимогам лінійної теорії згинання стрижнів. Це звичайний стрижень і стрижень, що спирається на пружну основу. В обох випадках в якості зовнішнього навантаження можливе лише розподілене по усій довженні стрижня l рівномірно розподілене навантаження q. Вплив зосереджених вантажних факторів F, M враховується в граничних умовах стрижня.

Система диференціальних рівнянь задачі, що розглядається,

$$\frac{d^4 v_i(x)}{dx^4} = \frac{q_i(x)}{EI_i}, \qquad \lambda_i(v_i, \varphi_i, M_i, Q_i) = G_i, \qquad i=1,2,..n_1,$$

$$\frac{d^4 v_j(x)}{dx^4} + k_j v_j(x) = \frac{q_j(x)}{EI_{ij}}, \qquad \lambda_j(v_j, \varphi_j, M_j, Q_j) = G_j, \qquad j=1,2,..n_{j.},$$

де $n = n_i + n_j$ є загальна кількість стрижнів;

λ_i, λ_j - комбінації відомих значень функцій $v(x),\varphi(x),M(x),Q(x)$ на кінцях стрижнів;

EI – жорсткість стрижня;

k – коефіцієнт реакції пружної основи.

Для диференціальних рівнянь першого типу розв'язок відомий [1]

$$v(x) = v_0 + \varphi_0 x + \frac{M_0}{EI}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{Q_0}{EI}\cdot\frac{x^3}{6} + \tilde{v}(x,q); \qquad M(x) = M_0 + Q_0\cdot x + \tilde{M}(x,q);$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \frac{M_0}{EI}\cdot x + \frac{Q_0}{EI}\cdot\frac{x^2}{2} + \tilde{\varphi}(x,q); \qquad Q(x) = Q_0 + \tilde{Q}(x,q);$$

де v_0, φ_0, M_0, Q_0 - початкові параметри.

$\tilde{v}(x,q)$, $\ddot{\varphi}(x,q)$, $\tilde{M}(x,q)$, $\tilde{Q}(x,q)$ - додатки що враховують дію рівномірно розподіленого по довжини стрижня навантаження q.

$$\tilde{v}(x,q) = \frac{q}{EI}\cdot\frac{x^4}{24}; \ \tilde{\varphi}(x,q) = \frac{q}{EI}\cdot\frac{x^3}{6}; \ \tilde{M}(x,q) = q\cdot\frac{x^2}{2}; \ \tilde{Q}(x,q) = q\cdot x.$$

Для диференціальних рівнянь другого типу відомий розв'язок ак. Крилова [2] для стрижня що спирається на пружну основу

$$v(x) = v_0\cdot Y_1(\frac{x}{L}) + \varphi_0\cdot L\cdot Y_2(\frac{x}{L}) + \frac{M_0}{EI}\cdot L^2\cdot Y_3(\frac{x}{L}) + \frac{Q_0}{EI}\cdot L^3\cdot Y_4(\frac{x}{L}) + \frac{qL^4}{4}\cdot Y_1(\frac{x}{L}) + \hat{v}(x,q);$$

$$\varphi(x) = \varphi_0\cdot Y_1(\frac{x}{L}) + \frac{M_0}{EI}\cdot L\cdot Y_2(\frac{x}{L}) + \frac{Q_0}{EI}\cdot L^2\cdot Y_3(\frac{x}{L}) + \alpha\cdot v_0\cdot L^3\cdot Y_4(\frac{x}{L}) - qL^3\cdot Y_4(\frac{x}{L}) + \hat{\varphi}(x,q);$$

$$M(x) = M_0\cdot Y_1(\frac{x}{L}) + Q_0\cdot L\cdot Y_2(\frac{x}{L}) + \alpha\cdot v_0\cdot L^2\cdot Y_3(\frac{x}{L}) + \alpha\cdot\varphi_0\cdot L^3\cdot Y_4(\frac{x}{L}) + qL^2\cdot Y_3(\frac{x}{L}) + \hat{M}(x,q)$$

$$Q(x) = Q_0\cdot Y_1(\frac{x}{L}) + \alpha\cdot v_0\cdot L\cdot Y_2(\frac{x}{L}) + \alpha\cdot\varphi_0\cdot\cdot L^2\cdot Y_3(\frac{x}{L}) - \frac{4M_0}{L}\cdot Y_4(\frac{x}{L}) + qL\cdot Y_2(\frac{x}{L}) + \hat{Q}(x,q);$$

де $L = \sqrt{\frac{4EI}{\alpha}}$ є параметр, що одночасно враховує механічні і геометричні властивості стрижня і пружної основи;

$Y_1(\frac{x}{L}), Y_2(\frac{x}{L}), Y_3(\frac{x}{L}), Y_4(\frac{x}{L})$ - функції Крилова.

$$Y_1(\frac{x}{L}) = ch(\frac{x}{L})\cdot\cos(\frac{x}{L}); \qquad Y_1(\frac{x}{L}) = \frac{1}{2}(ch(\frac{x}{L})\cdot sin(\frac{x}{L}) + sh(\frac{x}{L})\cdot\cos(\frac{x}{L}));$$

$$Y_3(\frac{x}{L}) = \frac{1}{2}sh(\frac{x}{L})\cdot sin(\frac{x}{L}); \qquad Y_4(\frac{x}{L}) = \frac{1}{4}(ch(\frac{x}{L})\cdot sin(\frac{x}{L}) - sh(\frac{x}{L})\cdot\cos(\frac{x}{L}));$$

$\hat{v}(x,q)$, $\hat{\varphi}(x,q)$, $\hat{M}(x,q)$, $\hat{Q}(x,q)$ - додатки що враховують дію рівномірно розподіленого навантаження q в розв'язку ак. Крилова [3].

$$\hat{v}(x,q) = \frac{qL^4}{4}\cdot[Y_1(\frac{x}{L}) - Y_1(\frac{x-l}{L}); \qquad \hat{\varphi}(x,q) = -qL^3[Y_4(\frac{x}{L}) - Y_4(\frac{x-l}{L})];$$

$$\hat{M}(x,q) = qL^2[Y_3(\frac{x}{L}) - Y_3(\frac{x-l}{L})]; \qquad \hat{Q}(x,q) = qL[Y_2(\frac{x}{L}) - Y_2(\frac{x-l}{L})].$$

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння згинання стрижня відомий, то залишається визначити лише усі початкові параметри. Звичайно, з фізичних умов закріплення на кінцях стрижня, частина параметрів відома. Для визначення параметрів, що залишились невідомими, використовуються умови сумісності деформацій в місцях контакту стрижнів і умови рівноваги вузлів.

Це дає змогу скласти систему лінійних алгебраїчних рівнянь і знайти невідомі. Тоді шукані зусилля M(x), Q(x) і переміщення v(x), φ(x) визначаються відповідними формулами. Маємо аналітичний розв’язок відповідної краєвії задачі.

Як приклад, розглянута задача згинання балки лише ліва половина прольоту якої завантажена q і спирається на пружну основу. Початок координат збігається з лівим кінцем балки і має жорстке закріплення. На правому кінці балки шарнірна опора. Вісь x прямує вздовж осі балки. Загальна кількість невідомих початкових параметрів дорівнює $n = n_i + n_j = 4 + 4 = 8$. Для їх визначення є умови: на лівому кінці, де $v_0=0,\ \varphi_0=0$
на правому кінці, де $v_l=0$, $M_l=0$. по середині балки $v_1(\frac{l}{2}) = v_2(0)$, $\varphi_1(\frac{l}{2}) = \varphi_2(0)$
$M_1(\frac{l}{2}) = M_2(0)$, $Q_1(\frac{l}{2}) = Q_2(0)$.

Література:

1.А. А. Уманский, Специальный курс строительной механики, часть 1, ОНТИ. - Москва 1935.

2.А. Н. Крылов, О расчёте балок, лежащих на сплошном упругом основании, АН СССР, 1931.

3. Г. С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е. С. Уманський, Опір матеріалів. - Київ, “Вища школа”, 1993.

Аннотация

Изложен аналитический метод расчёта задачи изгиба системы прямых стержней. Стержни на отдельных участках могут опираться на упругое основание. Если есть основание, то *v(x),φ(x),M(x),Q(x)* определяются решением ак. Крылова. Где основание нет, используется известное решение задачи изгиба балки методом начальных параметров. Неизвестные начальные параметры определяются решением системы линейных уравнений, которые реализуют условия совместности деформаций и условия равновесия узлов. *v(x),φ(x),M(x),Q(x)* отдельного стержня определяются аналитически известными формулами.

The summary

The analytical method of calculation of a problem of a bend of system of straight lines rod. A rod on separate sites can lean on the elastic basis. If there is a basis, *v (x), (x), M (x), Q (x)* are defined by the decision Krylov. Where the basis is not present, the known decision of a problem of a bend of a beam is used by a method of initial parameters. Unknown initial parameters are defined by the decision of system of the linear equations, which realize conditions of jointness deformations and a condition of balance of units. *v (x), (x), M (x), Q (x)* a separate core are defined by analytically known formulas.