УДК 539.3

к.т.н., доцент Станкевич А.М.,
д.т.н. професор Чибіряков В.К., к.т.н. професор Шкельов Л.Т.,
Київський національний університет будівництва та архітектури

ОДИН ВАРІАНТ МЕТОДУ ПРЯМИХ В ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ ТОВСТИХ ПЛАСТИН

В роботі пропонується комбінований підхід до розв'язання динамічної задачі теорії пружності в постановці плоскої деформації для товстих пластин з будь-яким опиранням. Двовимірні по просторовим координатам вихідні рівняння редукуються до одновимірних за допомогою розробленого авторами варіанта методу прямих. Подальше чисельне розв'язання задач частот і форм власних коливань виконується з використанням метода дискретної ортогоналізації С.К.Годунова.

Розв'язання задач динаміки в рамках просторової та плоскої задач теорії пружності є досить складною проблемою, навіть при наявності потужних чисельних методів. Одним із альтернативних шляхів розв'язання цієї проблеми є розробка комбінованих методик, в яких вихідна тривимірна або двовимірна по просторових координатах задачі зводяться до одновимірних по цих координатах, що дозволяє далі використовувати високоефективні чисельно стійкі методи для остаточного розв'язання задачі. Як правило, застосування таких підходів можливе для задач певних класів відносно геометрії області, яку займає пружне тіло, що розглядається.

В постановці плоскої задачі теорії пружності (плоска деформація) розглядається тіло, яке має поперечний переріз у вигляді прямокутника з двома габаритними розмірами одного порядку. На відміну від класичного розуміння об'єкта «пластина», де один розмір (довжина) значно більший за інший (товщину) тіло, що розглядається, будемо називати товстою пластиною товщиною h та довжиною l.

Вихідні динамічні рівняння плоскої задачі теорії пружності можна записати у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку по просторових координатах відносно компонент вектора переміщень u, v та компонент тензора напружень

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\
&\sigma_x = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \\
&\sigma_y = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} \\
&\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{1}
$$

Тут λ, μ - фізичні константи Ляме, ρ - щільність матеріалу пластини, також в рівнянннях враховано закон парності дотичних напружень.

Для зниження вимірності вихідних рівнянь по координаті y застосуємо варіант метода прямих, запропонований у роботі [1]. При цьому будемо користуватися термінологією та позначеннями, введеними в цій роботі. Застосовуючи запропоновану методику побудови редукованих рівнянь, отримаємо такі динамічні рівняння, записані в моментах по всіх невідомих відносно базисних функцій, що розглядаються в цій роботі:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \overset{*}{u}_i}{\partial x} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} b_{ij} g^{j\alpha} \overset{*}{v}_\alpha + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \sigma_{xi} \\
&\frac{\partial \overset{*}{v}_i}{\partial x} = -b_{ij} g^{j\alpha} \overset{*}{u}_\alpha + \tau_{xyi} \\
&\frac{\partial \sigma_{xi}}{\partial x} = b_{ji} g^{j\alpha} \tau_{xy\alpha} + \frac{\rho}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 \overset{*}{u}_i}{\partial t^2} \\
&\frac{\partial \tau_{xyi}}{\partial x} = \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} b_{ji} g^{j\alpha} b_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} \overset{*}{v}_\gamma + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} b_{ji} g^{j\alpha} \sigma_{x\alpha} + \frac{\rho}{\mu} \cdot \frac{d^2 \overset{*}{v}_i}{dt^2}
\end{aligned} \tag{2}
$$

де позначено $\overset{*}{u} = \mu \cdot u, \overset{*}{v} = \mu \cdot v$. Вплив зовнішніх дій не враховується, оскільки передбачається дослідження власних коливань.

Однорідні граничні умови записуємо у загальному вигляді [1]:

$$\begin{cases} \sigma_{xxi}\left(0,t\right)=\dfrac{k_{xx0}}{\mu}\overset{*}{u}_i\left(0,t\right) \\ \tau_{xyi}\left(0,t\right)=\dfrac{k_{yx0}}{\mu}\overset{*}{v}_i\left(0,t\right) \end{cases}$$
$$\begin{cases} \sigma_{xxi}\left(l,t\right)=\dfrac{k_{xxl}}{\mu}\overset{*}{u}_i\left(l,t\right) \\ \tau_{xyi}\left(l,t\right)=\dfrac{k_{yxl}}{\mu}\overset{*}{v}_i\left(l,t\right) \end{cases} \qquad (3)$$

що дозволяє розглядати різні варіанти граничних умов.

Шукаємо розв’язок системи рівнянь у вигляді:

$$\overset{*}{u}_i\left(x,t\right)=u_i^0\left(x\right)\cdot\sin\left(\omega t+\varphi\right)$$
$$\overset{*}{v}_i\left(x,t\right)=v_i^0\left(x\right)\cdot\sin\left(\omega t+\varphi\right)$$
$$\sigma_{xi}\left(x,t\right)=\sigma_{xi}^0\left(x\right)\cdot\sin\left(\omega t+\varphi\right)$$
$$\tau_{xyi}\left(x,t\right)=\tau_{xyi}^0\left(x\right)\cdot\sin\left(\omega t+\varphi\right)$$

Після підстановки до системи (2) та у граничні умови (3) і скорочення на $\sin\left(\omega t+\varphi\right)$ отримуємо однорідну крайову задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \overset{*}{u}{}_i^0}{\partial x}=-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}b_{ij}g^{j\alpha}\overset{*}{v}{}_\alpha^0+\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\sigma_{xi}^0 \\ &\frac{\partial \overset{*}{v}{}_i^0}{\partial x}=-b_{ij}g^{j\alpha}\overset{*}{u}{}_\alpha^0+\tau_{xyi}^0 \\ &\frac{\partial \sigma_{xi}^0}{\partial x}=b_{ji}g^{j\alpha}\tau_{xyi}^0-\frac{\rho\omega^2}{\mu}\overset{*}{u}{}_i^0 \\ &\frac{\partial \tau_{xyi}^0}{\partial x}=\frac{4\left(\lambda+\mu\right)}{\lambda+2\mu}b_{ji}g^{j\alpha}b_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma}\overset{*}{v}{}_\gamma^0+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}b_{ji}g^{ja}\sigma_{x\alpha}^0-\frac{\rho\omega^2}{\mu}\overset{*}{v}{}_i^0 \end{aligned} \qquad (4)$$

$$\begin{cases} \sigma_{xxi}^0\left(0\right)=\dfrac{k_{xx0}}{\mu}u_i^0\left(0\right) \\ \tau_{xyi}^0\left(0\right)=\dfrac{k_{yx0}}{\mu}v_i^0\left(0\right) \end{cases} \qquad (5)$$

$$\begin{cases} \sigma_{xxi}^0\left(l\right)=\dfrac{k_{xxl}}{\mu}u_i^0\left(l\right) \\ \tau_{xyi}^0\left(l\right)=\dfrac{k_{yxl}}{\mu}v_i^0\left(l\right) \end{cases} \qquad (6)$$

Отже задача зводиться до знаходження частот ω та відповідних форм коливань, що з точки зору математики означає знаходження власних чисел та власних функцій оператора крайової задачі (4) – (6).

Для розв'язання такої задачі зручно використовувати метод дискретної ортогоналізації С.К.Годунова.

За цим методом спочатку чисельно будується фундаментальна система часткових розв'язків однорідної системи диференціальних рівнянь (4), що задовольняють однорідним граничним умовам на лівому кінці (5). Розв'язок системи (4) є лінійною комбінацією елементів фундаментальної системи розв'язків. Коефіцієнти цієї лінійної комбінації знаходиться з граничних умов на правому кінці (6). Якщо позначити $\vec{Y} = \begin{bmatrix} u_i^0 \\ v_i^0 \\ \sigma_{xi}^0 \\ t_{xyi}^0 \end{bmatrix}$, то це буде вектор порядку $N = 4 \times n$, де n – кількість прямих.

З фундаментальної системи розв'язків $\{\vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \vec{Y}_3, \ldots, \vec{Y}_{N/2}\}$ утворюємо матрицю Y порядку $N \times N/2$, в якій стовпчиками є вектори фундаментальної системи розв'язків. Для гарантування стійкості при побудові елементів фундаментальної системи розв'язків в методі С.К.Годунова передбачено ортогоналізацію фундаментальної системи розв'язків, тобто, перехід від наведеної системи до ортонормованої системи $\{\vec{Z}_1, \vec{Z}_2, \vec{Z}_3, \ldots, \vec{Z}_{N/2}\}$ в певних точках відрізка $[0, l]$, до яких обов'язково відносяться початкова та кінцева точки відрізка. З цих ортонормованих векторів утворюємо матрицю Z, стовпчиками якої є ці вектори. Розв'язок системи (4) в поточній точці ортогоналізації має вигляд: $\vec{Y}(s_i) = Z\vec{b}$, де $\vec{b}$ - вектор довільних сталих, що має вимірність $N/2$. Оскільки граничні умови на правому кінці можна записати у матричному вигляді: $C_e\vec{Y}(e) = 0$, де матриця C_e має розмір $N/2 \times N$, то для знаходження компонент вектора $\vec{b}$ отримуємо систему $N/2$ рівнянь з $N/2$ невідомими

$$C_e Z\vec{b} = 0 \tag{7}$$

Це система однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь, яка має нетривіальний розв'язок, якщо детермінант матриці коефіцієнтів $A = C_e Z$ дорівнює нулю. Оскільки матриця $A = A(\omega)$ залежить від ω, то те значення ω, при якому $\det A = 0$ є власною частотою. В зв'язку з цим розглядається послідовність певних значень ω, для яких контролюється значення детермінанта. Якщо $\det A < \varepsilon$ з наперед заданим досить малим значенням ε, то вважається, що відповідне значення ω є частотою власних коливань.

Для побудови відповідної форми власних коливань досліджується ранг матриці $A = C_e Z$ і будується загальний розв'язок $\vec{b}$ цієї системи алгебраїчних рівнянь. Далі виконується зворотній хід алгоритма С.К.Годунова, що дає форму власних коливань.

Побудований в даній роботі алгоритм реалізовано у вигляді програми, написаної алгоритмічною мовою FORTRAN для ПЕОМ. Тестування розробленого алгоритму виконувалось на задачі про власні коливання товстої пластини($l = 1m$, $h = 0.5$, $E = 2.4 \cdot 10^6 \frac{kH}{m^2}$, $\rho = 2.5 \frac{t}{m^3}$, $\nu = 0.3$ з шарнірним опиранням при $x = 0, x = l$), для якої двома альтернативними чисельно-аналітичними методами знайдено частоти власних коливань. [2]

В таблиці 1 наведено порівняння знайдених частот власних коливань, де 1, 2 – результати, наведені в роботі [2], 3 – результати, отримані за даною методикою.

Таблиця 1

	ω_1	ω_2	ω_3
1	3151	4875	5076
2	3151	4885	5076
3	3126	4849	5076

Висновок

Знайдено частоти та форми власних коливань товстої пластини з тими ж параметрами защемленої по торцевих площинах $x = 0, x = l$. В таблиці 2 подано отримані частоти вільних коливань, на рис 1, наведені деякі форми коливань у вигляді розподілу переміщень u , v вздовж певних прямих.

Таблиця 2

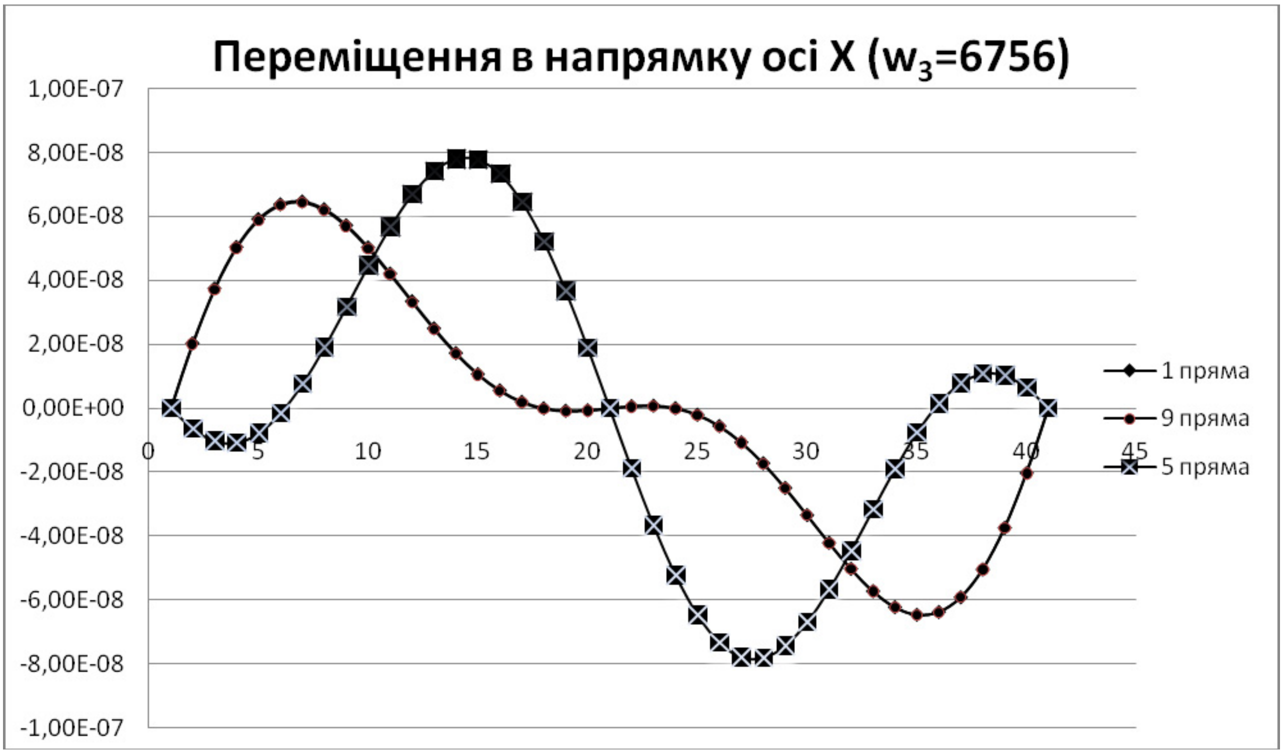
ω_1	ω_2	ω_3
1617	5027	6756


Переміщення в напрямку осі X ($w_{1=}$1617)
2,50E-08
2,00E-08
1,50E-08
1,00E-08
5,00E-09
0,00E+00
-5,00E-09
-1,00E-08
-1,50E-08
-2,00E-08
-2,50E-08
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
1 пряма
9 пряма


Переміщення в напрямку осі Y (w_1=1617)
1,20E-07
1,00E-07
8,00E-08
6,00E-08
4,00E-08
2,00E-08
0,00E+00
-2,00E-08
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
1 пряма
9 пряма
5 пряма


Переміщення в напрямку осі X (w_2=5027)
8,00E-08
6,00E-08
4,00E-08
2,00E-08
0,00E+00
-2,00E-08
-4,00E-08
-6,00E-08
-8,00E-08
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
1 пряма
9 пряма


Переміщення в напрямку осі Y (w_2=5027)
1,20E-07
1,00E-07
8,00E-08
6,00E-08
4,00E-08
2,00E-08
0,00E+00
-2,00E-08
-4,00E-08
-6,00E-08
-8,00E-08
-1,00E-07
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
1 пряма
9 пряма
5 пряма


Переміщення в напрямку осі X (w_3=6756)
1,00E-07
8,00E-08
6,00E-08
4,00E-08
2,00E-08
0,00E+00
-2,00E-08
-4,00E-08
-6,00E-08
-8,00E-08
-1,00E-07
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
1 пряма
9 пряма
5 пряма


Переміщення в напрямку осі Y (w_3=6756)
2,50E-07
2,00E-07
1,50E-07
1,00E-07
5,00E-08
0,00E+00
-5,00E-08
-1,00E-07
-1,50E-07
-2,00E-07
-2,50E-07
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
1 пряма
9 пряма

Рис 1

Література:

1. Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т., Д.В. Левківський До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих // Містобудування та територіальне планування. – 2010. – випуск 36 – с. 413 – 423.
2. Жупаненко І.В., Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т. Частоти вільних коливань товстої шарнірно-опертої пластини. // Науково-технічний збірник «Опір матеріалів і теорія споруд» - 2010 - випуск №85, - с.109 – 117.

Аннотация

В работе предлагается комбинированный подход к решению динамической задачи теории упругости в постановке плоской деформации для Толстых пластин с любым опиранием. Двумерные по пространственным координатам выходные уравнения редуцируются до одномерных с помощью разработанного авторами варианта метода прямых. Подальше численное решение задач частот и форм собственных колебаний делаеться с использованием метода дискретной ортогонализации С.К. Годунова.

Abstract

The combined going is in-process offered near the decision of dynamic task of theory of resiliency in raising of flat deformation for thick plastins with any leaning. Two-dimensional for initial equalizations transportation spatial co-ordinates to unidimensional by means of the variant of method of lines worked out by authors. The further numeral decision of tasks of frequencies and forms of eigentones is executed with the use of method of the discrete orthogonalizing of S.K.Godunova.