УДК 539.3 + 681.3.06

д. т. н., проф. О.В. Горик,
С.Б. Ковальчук, Полтавська державна аграрна академія

МЕТОД ПОЧАТКОВИХ ПАРАМЕТРІВ В ІТЕРАЦІЙНІЙ МОДЕЛІ ЗГИНУ КОМПОЗИТНИХ БРУСІВ

Розроблено метод початкових параметрів для першого наближення ітераційної зсувної моделі згину композитних брусів з постійною структурою та розмірами поперечного перерізу по довжині. Метод дозволяє аналітично отримати функції вертикальних переміщень та зсувів у задачах згину композитних брусів з різними типами закріплення та зовнішнього навантаження. Для визначення невідомих початкових параметрів, від яких виявляються залежними шукані функції, отримані системи алгебраїчних рівнянь. Реалізація методу показана для випадку жорстко закріпленого на кінцях бруса, навантаженого зосередженою силою.

Ключові слова: *композитний брус, ітераційна модель, вертикальні переміщення, жорсткісні характеристики, функція Гріна, початкові параметри.*

Постановка проблеми. Основною проблемою при проектуванні композитних елементів конструкцій, що працюють на згин є врахування деформацій зсуву при визначенні компонентів напружено-деформованого стану. Ефективним засобом вирішення цієї проблеми є ітераційне моделювання. Ітераційна зсувна модель деформування композитних брусів апробована для широкого кола задач і добре підтверджена експериментально. Але в той же час розв'язання задач згину з використанням співвідношень даної моделі пов'язане із громіздкими аналітичними перетвореннями, що значно ускладнює застосування моделі в інженерній практиці. Тому актуальною є розробка аналітичних методів розрахунку, які поряд із відносною простотою застосування, дають ідентичні з безпосереднім інтегруванням диференціальних рівнянь результати. Таким вимогам відповідає прямий метод граничних елементів та його більш зручні у застосуванні варіанти, такі як метод початкових параметрів та метод кінцевих параметрів.

Аналіз існуючих досліджень. Стан ітераційної аналітичної теорії в механіці шаруватих композитних систем досліджено в огляді [1]. Механіка деформування брусів із прямою віссю на основі застосування ітераційної моделі детально описана в [2]. Тут же наведено аналітичний метод розв'язання системи рівнянь ітераційної моделі та приклади його застосування для отримання функції вертикальних переміщень бруса під рівномірно розподіленим навантаженням. Також висвітлено метод кінцевих параметрів для ітераційної зсувної моделі стосовно типових випадків навантаження і закріплення брусів. Застосування методу кінцевих параметрів для визначення переміщень у багато прольотних статично-невизначних балках показане у роботі [3], де розглядаються і випадки ускладнених умов деформування, наприклад, просідання проміжних опор. Розрахунок композитних балок з поперечною тріщиною та обтисненням розглянуто в [4]. Метод початкових параметрів для даної моделі невисвітлений, хоча саме цей метод превалює серед аналітичних методів розрахунку [5].

Мета та завдання досліджень. Розробка методу початкових параметрів для зсувної моделі згину композитних брусів з метою отримання співвідношень для розв'язання широкого кола практичних задач.

Результати досліджень. У [2] отримані диференціальні рівняння ітераційної моделі, що описують напружено-деформований стан брусів довільної композитної структури з урахуванням депланації поперечних перерізів. На довільному кроці уточнення m система визначальних диференціальних рівнянь даної моделі має наступний вигляд:

$$\begin{cases} D_{11} w_m^{(4)}(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} (-1)^i D_{1(i+1)} \chi_{mi}^{(4)}(x) = \Omega_{1m}(x) \\ D_{(j+1)1} w_m^{(4)}(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} (-1)^i D_{(j+1)(i+1)} \chi_{mi}^{(4)}(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} (-1)^i D_{(j+1)i} \chi_{mi}^{(2)}(x) = \Omega_{(j+1)m}(x), \end{cases} \tag{1}$$

де $w_m(x)$, $\chi_{mi}(x)$ – шукані функції вертикальних переміщень та зсувів відповідно; $\Omega_{1m}(x)$, $\Omega_{(j+1)m}(x)$ – зведені функції навантаження; D_{kl} –характеристики жорсткості; $f^{(k)}(x) = \dfrac{d^k}{dx^k} f(x)$; $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,m}$; $k = \overline{1,m+1}$; $l = \overline{1,m+1}$. Індекс j розгортає систему по вертикалі.

В загальному випадку розв'язання системи (1), зчепленої відносно шуканих функцій, на кроці уточнення m може бути зведене до інтегрування одного рівняння порядку $2(m+1)$ відносно функції $\chi_{mm}(x)$, одного рівняння 4-го порядку відносно функції вертикальних переміщень $w_m(x)$ та $m-1$ рівнянь 2-го порядку відносно решти функцій зсуву $\chi_{mi}(x)$. Дані рівняння є лінійними неоднорідними диференціальними рівняннями із постійними коефіцієнтами та самоспряженими диференціальними операторами (не містять похідних непарного порядку). В загальному випадку рівняння такого типу мають наступний вигляд:

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_2 y^{(n-2)}(x) + \ldots + a_n y(x) = \Omega(x). \tag{2}$$

Для рівняння (2) нами був отриманий загальний розв'язок, що відповідає вихідному виразу методу початкових параметрів:

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} y^{(n-j)}(x_0) \left(\sum_{i=1}^{j} \theta\left((-1)^{i-1}\right) a_{i-1} \frac{\partial^{j-i}}{\partial s^{j-i}} y^*(x, x_0) \right) + \int_{x_0}^{x_1} \Omega(s) y^*(x,s) ds, \tag{3}$$

де: $\theta\left((-1)^{i-1}\right)$ – функція Хевісайда; x_0, x_1 – координати відповідно початку та кінця проміжку інтегрування; $i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,n}$; $k=\overline{1,n}$.

Частинна узагальнена функція Гріна $y^*(x,s)$ рівняння (2) при однорідних умовах

$$y^*(x,\,x_1)=0,\ \frac{\partial}{\partial s}y^*(x,\,x_1)=0,\ \frac{\partial^2}{\partial s^2}y^*(x,\,x_1)=0,\ \ldots,\ \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}}y^*(x,\,x_1)=0\,, \tag{4}$$

є розв'язком такого рівняння:

$$a_0\frac{\partial^n}{\partial s^n}y^*(x,s)+a_2\frac{\partial^{n-2}}{\partial s^{n-2}}y^*(x,s)+\ldots+a_n y^*(x,s)=\delta(s-x), \tag{5}$$

де $\delta(s-x)$ – дельта функція Дірака локалізована в точці $s=x$.

На основі виразу (3) вихідні рівняння методу початкових параметрів можуть бути отримані для довільного кроку уточнення ітераційної зсувної моделі. Але в даній роботі для демонстрації методу обмежимось розглядом випадку $m=1$. Для багатьох задач вже на першому кроці уточнення параметрів НДС, досягається збіжність ітераційного процесу. При необхідності, для вищих кроків наближення ($m\geq 2$) метод початкових параметрів може бути побудований аналогічно наведеному нижче алгоритму.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь (1) на першому кроці ітераційного процесу за відсутності зовнішнього дотичного до поверхні бруса навантаження та без урахування деформацій поперечного обтиснення. В такому випадку система (1) матиме наступний вигляд:

$$\begin{cases} D_{11}w_1^{(4)}(x)-D_{12}\chi_{11}^{(4)}(x)=\Omega(x) \\ D_{21}w_1^{(4)}(x)-D_{22}\chi_{11}^{(4)}-D_{21}\chi_{11}^{(2)}=0. \end{cases} \tag{6}$$

Після розділення залежних змінних наведеної системи, отримаємо:

$$\begin{cases} w_1^{(4)}(x)=p_1\chi_{11}^{(4)}+p_2\Omega(x) \\ \chi_{11}^{(4)}-p_3^2\chi_{11}^{(2)}=p_4\Omega(x) \end{cases}. \tag{7}$$

Тут для спрощення подальших перетворень введено наступні позначення коефіцієнтів:

$$p_1=\frac{D_{12}}{D_{11}},\qquad p_2=\frac{1}{D_{11}},\qquad p_3=\sqrt{\frac{D_{11}D_{21}}{D_{21}D_{12}-D_{22}D_{11}}},\qquad p_4=\frac{D_{21}}{D_{22}D_{11}-D_{21}D_{12}}.$$

Відповідно до (3) для першого рівняння (7) вихідний вираз методу початкових параметрів матиме наступний вигляд:

$$w(x)=\sum_{j=1}^{4}(-1)^{j-1}w^{(4-j)}(x_0)\left(\sum_{i=1}^{j}\theta\left((-1)^{i-1}\right)a_{i-1}\frac{\partial^{j-i}}{\partial s^{j-i}}w^*(x,x_0)\right)+$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\left(p_1\chi_{11}^{(4)}(x)+p_2\Omega(x)\right)w_1^*(x,\,s)ds\,, \tag{8}$$

де $a_0 = 1$, $a_2 = 0$.

Перший член правої частини виразу (8) є загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння, а другий (інтеграл) – деякий частинний розв'язок рівняння з правою частиною. Зауважимо, що частинний розв'язок може відповідати будь-яким крайовим умовам, але в даному випадку він відповідатиме умовам (4), оскільки цим умовам відповідає узагальнена функція Гріна.

Інтеграл у правій частині виразу (8) запишемо наступним чином:

$$p_1 \int_{x_0}^{x_1} \chi_{11}^{(4)}(x) w_1^*(x, s) ds + p_2 \int_{x_0}^{x_1} \Omega(s) w_1^*(x, s) ds = w_{\chi_{11}}(x) + w_\Omega(x).$$

Функції $w_\Omega(x)$, $w_{\chi_{11}}(x)$ є окремими частинними розв'язками першого рівняння (3), і відповідно до принципу суперпозиції можуть бути визначені окремо з наступних рівнянь

$$w_\Omega^{(4)}(x) = p_1 \Omega(x), \qquad w_{\chi_{11}}^{(4)}(x) = p_2 \chi_{11}^{(4)}(x). \tag{9}$$

Але частинним розв'язком другого рівняння (9) є $w_{\chi_{11}}(x) = p_2 \chi_{11}(x)$. Тоді загальний розв'язок (8) можемо записати так:

$$w_1(x) = \sum_{j=1}^{4} (-1)^{j-1} w_1^{(4-j)}(x_0) \left(\sum_{i=1}^{j} \theta\left((-1)^{i-1}\right) a_{i-1} \frac{\partial^{j-i}}{\partial s^{j-i}} w_1^*(x, x_0) \right) +$$
$$+ p_1 \chi_{11}(x) + p_2 \int_{x_0}^{x_1} \Omega(s) w_1^*(x, s) ds. \tag{10}$$

Для другого рівняння (7) отримаємо аналогічно

$$\chi_{11}(x) = \sum_{j=1}^{4} (-1)^{j-1} \chi_{11}^{(4-j)}(x_0) \left(\sum_{i=1}^{j} \theta\left((-1)^{i-1}\right) a_{i-1} \frac{\partial^{j-i}}{\partial s^{j-i}} \chi_{11}^*(x, x_0) \right) +$$
$$+ p_4 \int_{x_0}^{x_1} \Omega(s) \chi_{11}^*(x, s) ds, \tag{11}$$

де $a_0 = 1$, $a_2 = p_3^2$.

Частинні узагальнені функції Гріна $w^*(x, s)$ та $\chi_{11}^*(x, s)$, що входять до виразів (8) та (9), отримаємо відповідно до (5) з наступних рівнянь:

$$\frac{\partial^4 w_1^*(x, s)}{\partial s^4} = \delta(s - x), \qquad \frac{\partial^4 \chi_{11}^*(x, s)}{\partial s^4} - p_3^2 \frac{\partial^2 \chi_{11}^*(x, s)}{\partial s^2} = \delta(s - x). \tag{12}$$

Розв'язавши дані рівняння сумісно з умовами (4), отримаємо шукані функції Гріна:

$$\begin{aligned} w^*(x, s) &= (1/6)(x - s)^3 \theta(x - s), \\ \chi_{11}^*(x, s) &= (1/p_3)^3 (\mathrm{sh}(p_3(x - s)) - p_3(x - s)) \theta(x - s). \end{aligned} \tag{13}$$

Методика, що пропонується, ефективно може бути використана при розв'язанні задач згину композитних брусів з постійною по всій довжині структурою та розмірами перерізу. В такому випадку доцільним є обрання системи координат, в якій брус розташований з боку додатного напрямку осі OX, а її початок співпадає з лівим крайнім перерізом. Якщо загальна довжина бруса l, то координати початку та кінця проміжку, для якого записані вирази (10) та (11) відповідно, дорівнюватимуть $x_0 = 0$, $x_1 = l$. З урахуванням цього, використавши вирази узагальнених функцій Гріна (13), можемо записати в розгорнутому вигляді вирази (10) та (11):

$$w_1(x) = w_1^{(3)}(0)(1/6)x^3 + w_1^{(2)}(0)(1/2)x^2 + w_1^{(1)}(0)x + w_1^{(0)}(0) + p_1\chi_{11}(x) + \Phi_{w_1}(x), \quad (14)$$

$$\chi_{11}(x) = \chi_{11}^{(3)}(0)(1/p_3)^3(\mathrm{sh}(p_3x) - p_3x) + \chi_{11}^{(2)}(0)(1/p_3)^2(\mathrm{ch}(p_3x) - 1) + \\ + \chi_{11}^{(1)}(0)(1/p_3)(2\,\mathrm{sh}(p_3x) - p_3x) + \chi_{11}^{(0)}(0)(2\,\mathrm{ch}(p_3x) + 1) + \Phi_{\chi_{11}}(x). \quad (15)$$

Тут введено функції впливу зовнішнього навантаження:

$$\begin{aligned} \Phi_{w_1}(x) &= \frac{1}{6}p_2\int_0^l \Omega(s)(x-s)^3\theta(x-s)ds, \\ \Phi_{\chi_{11}}(x) &= \frac{p_4}{p_3^3}\int_0^l \Omega(s)(\mathrm{sh}(p_3(x-s)) - p_3(x-s))\theta(x-s)ds. \end{aligned} \quad (16)$$

Отримані вирази (14), (15) дозволяють записати функції вертикальних переміщень $w(x)$ та зсуву $\chi_{11}(x)$ для композитного бруса. Але отримані функції залежатимуть загалом від 8-ми невідомих початкових параметрів – значень функцій та їх похідних в початковому перерізі. Для їх визначення потрібно скористатись крайовими умовами, кількість яких у коректно поставленій задачі повинна відповідати кількості невідомих параметрів. При розв'язанні задач згину брусів крайові умови приймаються виходячи з умов закріплення крайніх перерізів. Типові випадки закріплення для першої ітерації зсувної моделі згину описані у [2]. Підстановка виразів (14) та (15) до заданих крайових умов дозволить отримати систему алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих параметрів. Але в кожному випадку використання такого підходу потребуватиме проведення операцій диференціювання, що створює незручності для практичного використання. Більш зручний підхід полягає в наступному. Послідовно диференціюємо три рази вираз (14) і після перетворень при $x = l$ отримаємо:

$$\begin{cases} w_1^{(3)}(0)(1/6)l^3 + w_1^{(2)}(0)(1/2)l^2 + w_1^{(1)}(0)l + w_1^{(0)}(0) + p_1\chi_{11}(l) - w_1(l) = -\Phi_{w_1}(l) \\ w_1^{(3)}(0)(1/2)l^2 + w_1^{(2)}(0)l + w_1^{(1)}(0) + p_1\chi_{11}^{(1)}(l) - w_1^{(1)}(l) = -\Phi_{w_1}^{(1)}(l) \\ w_1^{(3)}(0)l + w_1^{(2)}(0) + p_1\chi_{11}^{(2)}(l) - w_1^{(2)}(l) = -\Phi_{w_1}^{(2)}(l) \\ w_1^{(3)}(0) + p_1\chi_{11}^{(3)}(l) - w_1^{(3)}(l) = -\Phi_{w_1}^{(3)}(l). \end{cases} \quad (17)$$

Диференціюючи тричі вираз (15) аналогічно отримаємо

$$\begin{cases} \chi_{11}^{(3)}(0)(1/p_3)^3(\mathrm{sh}(p_3l)-p_3l)+\chi_{11}^{(2)}(0)(1/p_3)^2(\mathrm{ch}(p_3l)-1)+ \\ \quad +\chi_{11}^{(1)}(0)(1/p_3)(2\,\mathrm{sh}(p_3l)-p_3l)+\chi_{11}^{(0)}(0)(2\,\mathrm{ch}(p_3l)+1)-\chi_{11}(l)=-\Phi_{\chi_{11}}(l) \\ \chi_{11}^{(3)}(0)(1/p_3)^2(\mathrm{ch}(p_3l)-1)+\chi_{11}^{(2)}(0)(1/p_3)\mathrm{sh}(p_3l)+\chi_{11}^{(1)}(0)(2\,\mathrm{ch}(p_3l)-1)+ \\ \qquad +\chi_{11}^{(0)}(0)2p_3\,\mathrm{sh}(p_3l)-\chi_{11}^{(1)}(l)=-\Phi_{\chi_{11}}^{(1)}(l) \\ \chi_{11}^{(3)}(0)(1/p_3)\mathrm{sh}(p_3l)+\chi_{11}^{(2)}(0)\mathrm{ch}(p_3l)+\chi_{11}^{(1)}(0)2p_3\,\mathrm{sh}(p_3l)+ \\ \qquad +\chi_{11}^{(0)}(0)2p_3^2\,\mathrm{ch}(p_3l)-\chi_{11}^{(2)}(l)=-\Phi_{\chi_{11}}^{(2)}(l) \\ \chi_{11}^{(3)}(0)\mathrm{ch}(p_3l)+\chi_{11}^{(2)}(0)p_3\,\mathrm{sh}(p_3l)+\chi_{11}^{(1)}(0)2p_3^2\,\mathrm{ch}(p_3l)+ \\ \qquad +\chi_{11}^{(0)}(0)2p_3^3\,\mathrm{sh}(p_3l)-\chi_{11}^{(3)}(l)=-\Phi_{\chi_{11}}^{(3)}(l) \end{cases} \tag{18}$$

Системи рівнянь (17) та (18) пов'язують значення параметрів шуканих функцій у крайніх перерізах бруса. Вони загалом складаються з 8-ми алгебраїчних рівнянь, що містять 16-ть невідомих параметрів. Принаймні 8-м параметрів має бути задано у вигляді крайових умов. В такому випадку системи (17) та (18) набудуть коректного вигляду і дозволять визначити решту невідомих параметрів.

Реалізація методу. Для прикладу реалізації запропонованої методики наведемо результати розрахунку композитного бруса жорстко затисненого на кінцях. Систему координат обрано таким чином, що вісь X співпадає з поздовжньою віссю балки, а осі Y та Z лежать в площині лівого крайнього поперечного перерізу. Довжина балки l. Тип зовнішнього навантаження поки що не обумовлюємо.

Для такої балки умовами на кінцях є відсутність згинальних і зсувних вертикальних переміщень та кутів повороту

$$w_1(x)\big|_0^l=0,\ \chi_{11}(x)\big|_0^l=0; \qquad w_1^{(1)}(x)\big|_0^l=0,\ \chi_{11}^{(1)}(x)\big|_0^l=0.$$

Використавши наведені крайові умови, систему рівнянь (17) отримаємо в наступному вигляді:

$$\begin{cases} w_1^{(3)}(0)(1/6)l^3+w_1^{(2)}(0)(1/2)l^2=-\Phi_{w_1}(l) \\ w_1^{(3)}(0)(1/2)l^2+w_1^{(2)}(0)l=-\Phi_{w_1}^{(1)}(l) \\ w_1^{(3)}(0)l+w_1^{(2)}(0)+p_1\chi_{11}^{(2)}(l)-w_1^{(2)}(l)=-\Phi_{w_1}^{(2)}(l) \\ w_1^{(3)}(0)+p_1\chi_{11}^{(3)}(l)-w_1^{(3)}(l)=-\Phi_{w_1}^{(3)}(l). \end{cases}$$

Для визначення 2-х невідомих початкових параметрів $w_1^{(2)}(0)$ та $w_1^{(3)}(0)$ достатньо використати перші два з наведених рівнянь. Решту рівнянь розв'язувати не потрібно, якщо не стоїть задача визначення і кінцевих параметрів $w_1^{(2)}(l)$, $w_1^{(3)}(l)$. Розв'язавши перші з двох наведених рівнянь визначимо невідомі початкові параметри функції $w_1(x)$:

$$w_1^{(2)}(0)=-6(1/l)^2\Phi_{w_1}(l)+2(1/l)\Phi_{w_1}^{(1)}(l), \qquad w_1^{(3)}(0)=12(1/l)^3\Phi_{w_1}(l)-6(1/l)^2\Phi_{w_1}^{(1)}(l).$$

Система рівнянь (18), з урахуванням прийнятих крайових умов, запишеться так:

$$\begin{cases} \chi_{11}^{(3)}(0)(1/p_3)^3(\mathrm{sh}(p_3 l)-p_3 l)+\chi_{11}^{(2)}(0)(1/p_3)^2(\mathrm{ch}(p_3 l)-1)=-\Phi_{\chi_{11}}(l) \\ \chi_{11}^{(3)}(0)(1/p_3)^2(\mathrm{ch}(p_3 l)-1)+\chi_{11}^{(2)}(0)(1/p_3)\mathrm{sh}(p_3 l)=-\Phi_{\chi_{11}}^{(1)}(l) \\ \chi_{11}^{(3)}(0)(1/p_3)\mathrm{sh}(p_3 l)+\chi_{11}^{(2)}(0)\mathrm{ch}(p_3 l)-\chi_{11}^{(2)}(l)=-\Phi_{\chi_{11}}^{(2)}(l) \\ \chi_{11}^{(3)}(0)\mathrm{ch}(p_3 l)+\chi_{11}^{(2)}(0)p_3\,\mathrm{sh}(p_3 l)-\chi_{11}^{(3)}(l)=-\Phi_{\chi_{11}}^{(3)}(l). \end{cases}$$

Сумісне розв’язання перших двох рівнянь отриманої системи дозволяє отримати невідомі початкові параметри функції $\chi_{11}(x)$:

$$\chi_{11}^{(2)}(0)=\frac{\left(\Phi_{\chi_{11}}(l)p_3^2(\mathrm{ch}(p_3 l)-1)-\Phi_{\chi_{11}}^{(1)}(l)p_3(\mathrm{sh}(p_3 l)-p_3 l)\right)}{2(\mathrm{ch}(p_3 l)-1)-\mathrm{sh}(p_3 l)p_3 l},$$

$$\chi_{11}^{(3)}(0)=\frac{\left(-\Phi_{\chi_{11}}(l)p_3^3\,\mathrm{sh}(p_3 l)+\Phi_{\chi_{11}}^{(1)}(l)p_3^2(\mathrm{ch}(p_3 l)-1)\right)}{2(\mathrm{ch}(p_3 l)-1)-\mathrm{sh}(p_3 l)p_3 l}.$$

Розглянемо випадок коли на відстані a від крайнього лівого перерізу бруса прикладена зосереджена сила інтенсивністю F. Таке навантаження може бути змодельоване наступним чином: $\Omega(x)=F\delta(x-a)$, де $\delta(x-a)$ – дельта-функція зміщена на відстань a відносно початку координат.

Використовуючи властивості дельта-функції Дірака, функції впливу зовнішнього навантаження (16), отримаємо у вигляді:

$$\Phi_{w_1}(x)=Fp_2(1/6)(x-a)^3\theta(x-a),$$

$$\Phi_{\chi_{11}}(x)=F\left(p_4/p_3^3\right)(\mathrm{sh}(p_3(x-a))-p_3(x-a))\theta(x-a).$$

Тоді значення функцій впливу зовнішнього навантаження та їх перших похідних в перерізі з координатою $x=l$ дорівнюватимуть:

$$\Phi_{w_1}(l)=Fp_2(1/6)(l-a)^3, \qquad \Phi_{\chi_{11}}(l)=F\left(p_4/p_3^3\right)(\mathrm{sh}(p_3(l-a))-p_3(l-a)),$$

$$\Phi_{w_1}^{(1)}(l)=Fp_2(1/2)(l-a)^2, \qquad \Phi_{\chi_{11}}^{(1)}(l)=F\left(p_4/p_3^2\right)(\mathrm{ch}(p_3(l-a))-1).$$

Використавши отримані вирази, невідомі початкові параметри функцій $w_1(x)$ та $\chi_{11}(x)$ отримаємо у такому вигляді:

$$w_1^{(2)}(0)=Fp_2 a(1-a/l)^2, \qquad w_1^{(3)}(0)=-Fp_2(1-a/l)^2(1+2a/l);$$

$$\chi_{11}^{(2)}(0)=F\,\frac{p_4}{p_3}\frac{((\mathrm{sh}(p_3 b)-p_3 b)(\mathrm{ch}(p_3 l)-1)-(\mathrm{ch}(p_3 b)-1)(\mathrm{sh}(p_3 l)-p_3 l))}{2(\mathrm{ch}(p_3 l)-1)-\mathrm{sh}(p_3 l)p_3 l},$$

$$\chi_{11}^{(3)}(0)=Fp_4\frac{(-\mathrm{sh}(p_3 l)(\mathrm{sh}(p_3 b)-p_3 b)+(\mathrm{ch}(p_3 b)-1)(\mathrm{ch}(p_3 l)-1))}{2(\mathrm{ch}(p_3 l)-1)-\mathrm{sh}(p_3 l)p_3 l},$$

де $b=l-a$.

Шукані функції вертикальних переміщень (14) та зсуву (15) отримаємо у такому вигляді:

$$w_1(x)=w_1^{(3)}(0)(1/6)x^3+w_1^{(2)}(0)(1/2)x^2+p_1\chi_{11}(x)+Fp_2(1/6)(x-a)^3\theta(x-a),$$

$$\chi_{11}(x)=\chi_{11}^{(3)}(0)(1/p_3)^3(\mathrm{sh}(p_3x)-p_3x)+\chi_{11}^{(2)}(0)(1/p_3)^2(\mathrm{ch}(p_3x)-1)+$$
$$+F\left(p_4/p_3^3\right)(\mathrm{sh}(p_3(x-a))-p_3(x-a))\theta(x-a).$$

Якщо виключити з отриманої функції вертикальних переміщень складову $p_1\chi_{11}(x)$, то отримаємо вираз, який повністю відповідатиме розв'язку даної задачі за класичною моделлю згину:

$$w_{кл}(x)=w_1^{(3)}(0)(1/6)x^3+w_1^{(2)}(0)(1/2)x^2+Fp_2(1/6)(x-a)^3\theta(x-a).$$

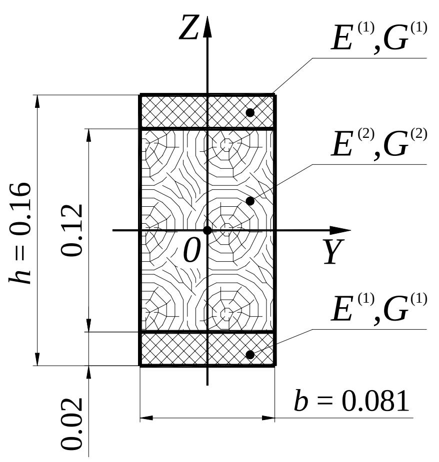
Тоді $p_1\chi_{11}(x)$ є ніщо інше як зсувна складова прогину, функція якої матиме наступний вигляд:

$$w_{зс}(x)=\chi_{11}^{(3)}(0)\left(p_1/p_3^3\right)(\mathrm{sh}(p_3x)-p_3x)+\chi_{11}^{(2)}(0)\left(p_1/p_3^2\right)(\mathrm{ch}(p_3x)-1)+$$
$$+F\left(p_1p_4/p_3^3\right)(\mathrm{sh}(p_3(x-a))-p_3(x-a))\theta(x-a).$$

Загальні ж переміщення можуть бути записані як сума отриманих виразів $w=w_{кл}+w_{зс}$.

Для числової реалізації отриманих виразів задамо конкретні значення параметрів балки. Довжина $l=2м$, $a=0.7м$, $F=10кН$. Розміри та структура поперечного перерізу (рис.1, а) незмінні по довжині. Зовнішні шари балки – склопластик з $E_x^{(1)}=4.4\cdot10^{10}\,Па$, $G_{xz}^{(1)}=8\cdot10^9\,Па$, середній – деревина з, $E_x^{(2)}=0.12\cdot10^{11}\,Па$, $G_{xz}^{(2)}=0.055\cdot10^{10}\,Па$.

Графіки функцій вертикальних переміщень наведені на рис.1, б. Зсувна піддатливість композитного матеріалу бруса призводить до значного збільшення величини прогинів, в даному випадку 162.74%. Аналітичні розрахунки за наведеним тут методом, та методами наведеними в [2] повністю співпадають, що дозволяє впевнитись в їх аналітичній достовірності.



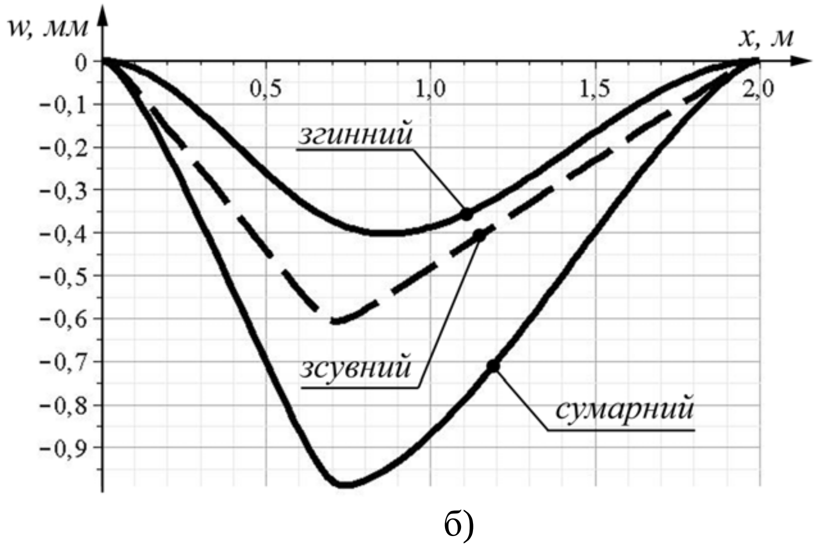


Рис. 1. а) структура перерізу, б) графіки прогинів

Висновки. Побудований метод початкових параметрів для зсувної моделі згину дозволяє аналітично отримувати функцію вертикальних переміщень для композитних елементів інженерних конструкцій з урахуванням депланації поперечних перерізів. Даний метод є універсальним, оскільки дозволяє розв'язувати задачі згину з різними умовами закріплення та навантаження. Отримані вирази є досить компактними, що полегшує їх практичну реалізацію для широкого кола задач. Наведений приклад реалізації методу та його порівняння з існуючими розв'язками показує правильність отриманих співвідношень.

Як було показано на прикладі, для типових випадків закріплення бруса можуть бути отримані вирази початкових параметрів шуканих функцій в загальному вигляді без урахування типу навантаження прикладеного до бруса. Також можуть бути отримані в загальному вигляді функції впливу зовнішнього навантаження для найбільш розповсюджених його типів. В такому випадку розв'язання задач зведеться до оперування готовими виразами, що значно полегшить використання розробленого методу.

Література

1. Пискунов В.Г. Итерационная аналитическая теория в механике слоистых композитных систем / Пискунов В.Г. // Механика композит. Материалов. – 2003. – Т.39, №1. – С.2-24.
2. Горик О.В. Механіка деформування композитних брусів / О.В. Горик, В.Г. Піскунов, В.М. Чередніков. – Полтава-Київ: АСМІ, 2008. – 402с.
3. Горик О.В. Ітераційна зсувна модель у статично невизначних задачах згину композитних брусів / Горик О.В., Ковальчук С.Б. // Состояние современной строительной науки – 2010. Сб. научн. трудов. Полтава: Полтавский ЦНТЭИ. – 2010. –С.47-53.
4. Шваб'юк В.І. Згин композитної балки з поперечною тріщиною / Шваб'юк В.І. // Наукові нотатки Луцьк. індустр. ін-ту. – Луцьк. – 1994. – Вип. 3. – С.190-197
5. Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов / В. А. Баженов, В. Ф. Оробей, А. Ф. Дащенко, Л. В. Коломиец. – Одесса: Астропринт, 2001. – 288с.

Аннотация

Разработан метод начальных параметров для первого приближения итерационной сдвиговой модели изгиба композитных элементов с постоянной структурой и размерами поперечного сечения по длине. Метод позволяет аналитически получить функции вертикальных перемещений и сдвигов в задачах изгиба композитных брусьев с различными типами закрепления и внешней нагрузки. Для определения неизвестных начальных параметров, от которых оказываются зависимыми искомые функции, получены системы алгебраических уравнений. Реализация метода показана для случая жестко закрепленного на концах бруса, нагруженного сосредоточенной силой.

Ключевые слова: композитный брус, итерационная модель, вертикальные перемещения, жесткостные характеристики, функция Грина, начальные параметры.

Abstract

A method for the initial parameters for the first approximation of the iterative model of bending shear composite elements with constant structure and cross-sectional dimension along its length. Method allows us to analytically obtain the functions of vertical displacement and shifts in the bending problem of composite beams with various types of external fixation and on-load. To determine the unknown initial parameters that turn out to be dependent on the desired functions are obtained system of algebraic equations. Implementation of the method is shown for the case firmly fixed on the ends of beams loaded by a concentrated force.

Keywords: composite squared beam, model, vertical moving, descriptions, function of Grina, initial parameters.