

УДК 624.012:454

к.т.н., доцент, Задорожнікова І.В.,

к.т.н., доцент Ужегова О.А., к.т.н., доц.. Ротко С.В., Дудченко В.В.,

Луцький національний технічний університет

## МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ ЗГИНАЛЬНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЗА МІЦНІСТЮ НОРМАЛЬНИХ ПЕРЕРІЗІВ

*Подано методику та послідовність розрахунку непідсищених згиinalьних елементів за деформаційною моделлю, а також наведені дані співставлення про несучу здатність заданого перерізу дослідних залізобетонних балок, отримані експериментально та обчислені різними способами.*

**Ключові слова:** деформаційна модель, напруження, деформації, діаграма „ $\sigma_b - \epsilon_b$ ”, діаграма Прандтля, бетонні балки, арматура, розтягнута зона.

За останні роки світова практика істотно поповнилася експериментальними даними як про фізико-механічні властивості матеріалів, так і про роботу бетонних і залізобетонних конструкцій. Результати досліджень дозволяють з достатньою точністю та імовірністю описувати діаграми  $\sigma - \epsilon$  для бетону і арматури та широко використовувати у практиці проектування різноманітних об'єктів.

У розрахунках несучої здатності нормальних перерізів, що згинаються, використовуються такі гіпотези та припущення:

- зв'язок між напруженнями та деформаціями бетону приймають у вигляді діаграм, наведених на рис. 1;
- зв'язок між напруженнями та деформаціями арматури приймають у вигляді діаграм, наведених на рис. 2;
- для середніх деформацій стиснутого бетону та розтягнутої арматури вважають справедливим лінійний закон розподілу деформацій на висоті перерізу (гіпотеза плоских перерізів);
- за розрахунковий приймають переріз, деформації якого дорівнюють середнім деформаціям по довжині блоку між тріщинами, якщо вони утворюються;
- опір розтягнутої зони бетону допускається не враховувати, приймаючи при  $\epsilon_{bi} \leq 0$  напруження  $\sigma_{bi} = 0$  і для конструкцій, у яких не допускаються тріщини, розрахунок міцності виконують з урахуванням того, що деформації розтягнутого бетону не повинні бути меншими  $\epsilon_{bti} = 2R_{bti} / E_b$ ;

- напруження і деформації при стиску приймають зі знаком „плюс”, а при розтягу – зі знаком „мінус”.

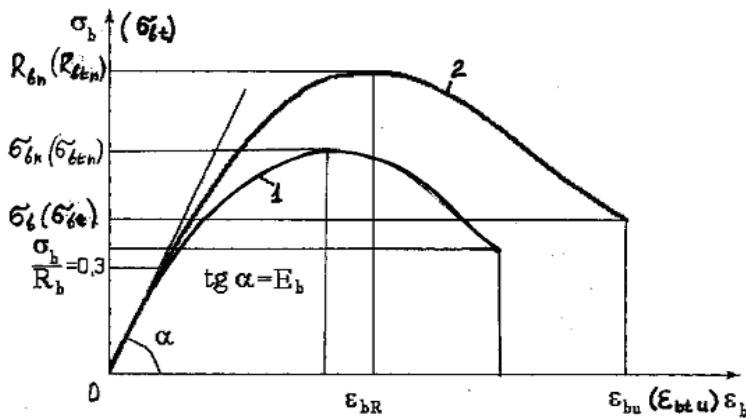


Рис. 1. Діаграма „ $\sigma_b - \varepsilon_b$ ” бетону для розрахунку за граничними станами першої (1) та другої (2) груп.

Розрахунки залізобетонних конструкцій за міцністю з урахуванням повної криволінійної діаграми  $\sigma_b - \varepsilon_b$  з додільною гілкою легко реалізуються на ЕОМ і можуть застосовуватися проектними і будівельними організаціями.

Існують багато пропозицій щодо описування повної діаграми  $\sigma_b - \varepsilon_b$  (див. напр. огляд у [1]), найбільш популярними з яких є діаграми, запропоновані Єврокодом [2, 3], М. І. Карпенком [4] та у роботах В. Я. Бачинського і А. М. Бамбури [5], А. Я. Барашикова [6, 7].

Зараз при розробці ДБН України прийнятий останній варіант описування діаграми деформування бетону [8]. Для математичної апроксимації запропонований поліном n-го ступеню, який достатньо точно відтворює експериментальні дані та зручний для використання при інтегруванні рівнянь рівноваги розрахункового перерізу.

Виходячи з фізичних посилань, які вимагають проходження кривої через початок координат, січного модуля, який дорівнює  $E_b$  при  $\sigma_b = 0,3R_b$ , умови  $\sigma_b = R_b$  при  $\varepsilon = \varepsilon_R$ , одного екстремума у точці  $\varepsilon = \varepsilon_R$ , прийнятий поліном п'ятого ступеню (рис. 3.8) набуває такого вигляду

$$\sigma_b = R_b \sum_{i=1}^5 a_i \left( \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{bR}} \right)^i, \quad (1)$$

де  $\sigma_b$  – напруження у бетоні;

$R_b$  – міцність бетону при осьовому стиску (призмова міцність);

$\varepsilon_b$  – деформації бетону, які відповідають напруженню  $\sigma_b$ ;

$\varepsilon_{bR}$  – максимальна деформація бетону, яка відповідає  $R_b$  ;  
 $a_i$  – коефіцієнт поліному (1).

Практика показує, що у багатьох випадках простота конструктивних рішень (наприкл., поперечні перерізи прямокутної, таврової або двотаврової форм), статична визначеність або недостатнє забезпечення вихідними даними (навантажень, характеристик матеріалів, умов експлуатації тощо) дає підстави для спрощення розрахунків до прийнятної точності.

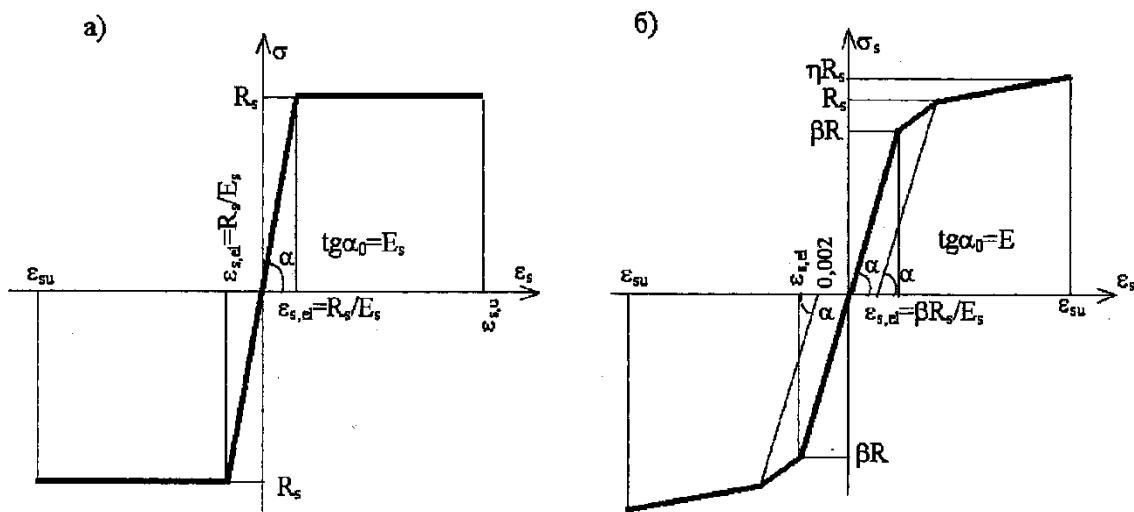


Рис. 2. Діаграми стану арматури:

а). – з фізичною межею текучості; б). – з умовною межею текучості

У цих випадках допускається використання досить простих методів розрахунку, які базуються на спрощених діаграмах деформування бетону та деформаційному способі розрахунку. За спрощену діаграму стану бетону для розрахунку за граничними станами першої групи приймають дволінійну діаграму зв'язку між напруженнями і відносними деформаціями (діаграму Прандтля) (рис. 3.).

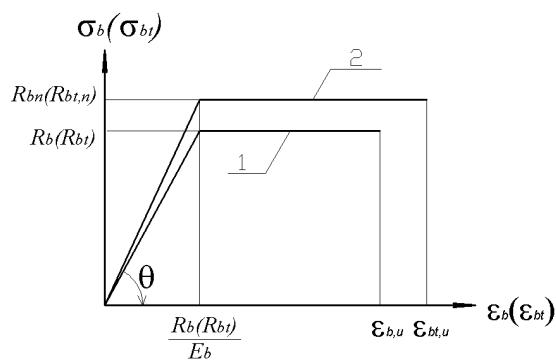


Рис. 3. Спрощена діаграма стану бетону для розрахунку за граничними станами першої (1) та другої (2) групи

Напруження стиску  $\sigma_b$  у залежності від відносних деформацій визначають за формулами

$$\text{для інтервалу } 0 \leq \varepsilon_b \leq \frac{R_b}{E_b} \quad \sigma_b = E_b \varepsilon_b; \quad (2)$$

$$\text{для інтервалу } \frac{R_b}{E_b} \leq \varepsilon_b \leq \varepsilon_{bu} \quad \sigma_b = R_b. \quad (3)$$

Значення величин міцності  $R_b$ , модуля пружності  $E_b$  та граничних деформацій  $\varepsilon_{bu}$  залежно від кубикової міцності (класу бетону) приймають за спеціальними таблицями [5], або обчислюють за формулами, наведеними у роботі [8].

Для арматури, як розрахункова, може бути прийнята дволінійна (див. рис. 2, а) або трилінійна (див. рис. 2, б) діаграма стану (деформування) залежно від наявності або відсутності фізичної межі текучості арматури.

Для арматури, яка має фізичну площину текучості (дволінійна діаграма – рис. 2, а) при деформаціях

$$\varepsilon_s = R_s / E_s \quad (4)$$

напруження обчислюють за формулою

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s. \quad (5)$$

При деформаціях

$$\varepsilon_s > R_s / E_s \quad (6)$$

напруження дорівнюють

$$\sigma_s = R_s. \quad (7)$$

Для арматури, яка не має фізичної площини текучості (трилінійна діаграма – рис. 2, б) при деформаціях

$$\varepsilon_s \leq \frac{0,8R_s}{E_s} \quad (8)$$

напруження визначають за формулою

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s. \quad (9)$$

При деформаціях, які знаходяться у межах

$$\frac{0,8R_s}{E_s} < \varepsilon_s < \frac{0,8R_s}{E_s} + 0,002 \quad (10)$$

напруження обчислюють за формулою

$$\sigma_s = \left[ 0,8R_s + 0,8R_s \frac{\varepsilon_s - \frac{0,8R_s}{E_s}}{0,002} \right] \quad (11)$$

За деформацій, які знаходяться за межами

$$\varepsilon_s > \frac{0,8R_s}{E_s} + 0,002 \quad (12)$$

напруження у арматурі обчислюють за формулою

$$\sigma_s = \left[ R_s + (\eta - 1) R_s \frac{\frac{R_s - \beta R_s}{E_s} - 0,002}{\frac{\varepsilon_s - \beta R_s}{E_s} - 0,002} \right] \quad (13)$$

де  $\eta$  – запас міцності розтягнутої арматури;

$$\eta = \sigma_{sb} / \sigma_{0,2}; \quad (14)$$

$\sigma_{sb}$ ,  $\sigma_{0,2}$  – позначені на рис. 2, б.

На рис. 4 наведені схеми деформацій, зусиль та напружень, які виникають у прямокутному перерізі згиального непідсиленого залізобетонного елемента.

Розрахункові формулі несучої здатності нормальних перерізів отримують з двох умов статики у розрахунковому граничному стані.

Перша умова визначає рівність нулю усіх зусиль, спроектованих на горизонтальну вісь (рис. 4, в).

$$N_b + N'_s - N_s = 0. \quad (15)$$

Друга умова, яка визначає суму моментів усіх зовнішніх зусиль відносно будь-якої осі, наприклад, тієї, що проходить через нейтральну лінію, записують так

$$M_{ult} = N_b z_b + N_s z_s + N'_s z'_s \quad (16)$$

При наявності заданих деформацій (рис. 4, б) в матеріалах рівнодіючі внутрішні зусиль у поперечному перерізі елементу прямокутного профілю у загальному вигляді знаходять за формулами [6]

$$N_b = b \int_0^{z_1} \sigma_b dz = b \frac{z_1}{\varepsilon_{b1}} \int_0^{\varepsilon_{b1}} \sigma_b d\varepsilon; \quad (17)$$

$$N_s = A_s \sigma_s = A_s E_s \frac{\varepsilon_{b1}}{z_1} (h_0 - z_1); \quad (18)$$

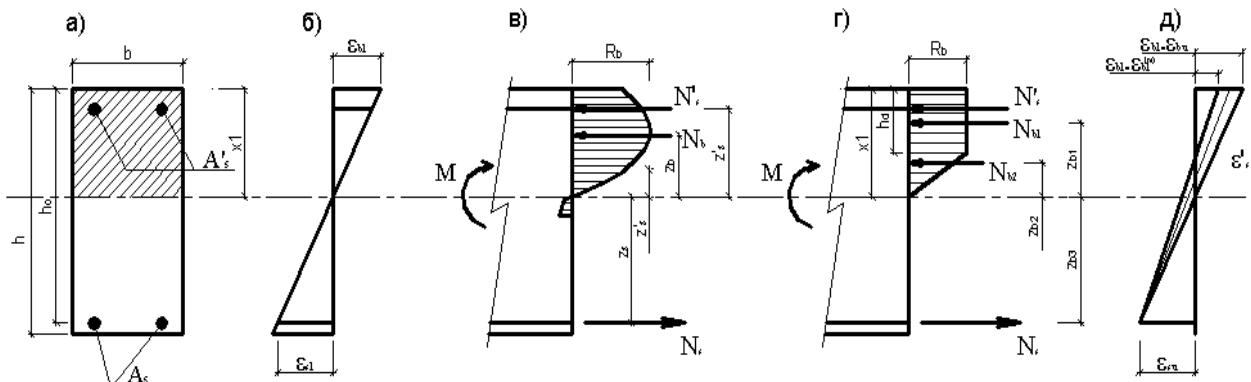


Рис. 4. Розрахункова схема деформацій та напруженів при визначенні несучої здатності непідсилених згиальних елементів: а – поперечний переріз; б – епюра деформацій; в – епюра дійсного розподілу напруження у перерізі; г – спрощена епюра напруженів; д – схема ітераційного методу визначення деформацій бетону.

$$M_b = b \int_0^{z_1} \sigma_b z dz = b \frac{z_1}{\varepsilon_{b1}} \int_0^{\varepsilon_{b1}} \sigma_b \varepsilon d\varepsilon; \quad (19)$$

$$N_s' = A_s' \sigma_s' = A_s' E_s' \frac{\varepsilon_{b1}}{z_1} (z_1 - a'); \quad (20)$$

$$M_s = A_s \sigma_s (h_0 - z_1) = A_s E_s \frac{\varepsilon_{b1}}{z_1} (h_0 - z_1)^2, \quad (21)$$

де  $x_1 = z_1$ ; решта позначень наведена на рис. 4.

У розглядуваному випадку дослідна конструкція уявляє собою однопролітну залізобетонну балку прямокутного профілю (серія Б), тому можливо скористатися спрощеною діаграмою  $\sigma_b - \varepsilon_b$  (рис. 3). Це дає можливість у розрахунках використати трапецевидну епюру напружень (рис. 4, г). У цьому випадку рівняння рівноваги (15) і (16), якщо знехтувати дуже малою величиною площину стиснутої арматури ( $2\varnothing 3$ ), тобто за умови  $N_s' = 0$  приймають [6] такий вигляд

$$\frac{R_b b}{2\xi} (2\varepsilon_{bu} - \varepsilon_{b,el}) - R_s A_s = 0; \quad (22)$$

$$M_{ult} = \frac{R_b b}{6\xi^2} (3\varepsilon_{b1}^2 - \varepsilon_{b,el}^2) + R_s A_s (h_0 - \varepsilon_{b1} / \xi) \quad (23)$$

У цих рівняннях:

$$\xi = \frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_{b1} + \varepsilon_s}{h_0}; \quad \chi_1 = \varepsilon_{b1} / \xi; \quad h_{el} = \varepsilon_{b,el} / \xi \quad (24)$$

Зважаючи на низький відсоток армування досліджуваних балок ( $\mu_s = 0,7\%$ ), стає очевидним, що при руйнуванні деформації розтягнутої арматури дорівнюють межовим, тобто  $\varepsilon_s = \varepsilon_{su}$ . У той же час деформації крайніх стиснутих волокон бетону будуть меншими за межові, тобто  $\varepsilon_{b1} < \varepsilon_{bu}$ . Напруження у цих волокнах можуть бути як менше, так і дорівнювати межевому опору бетону. Навпаки, напруження у арматурі досягають межі текучості. Ця обставина врахована у рівняннях (22) і (23), де записано  $\sigma_s = R_s$ .

Основною дією при визначені несучої здатності нормального перерізу згиального залізобетонного елемента є перевірка рівняння (22).

Нижче наведений алгоритм розрахунку згиального елемента прямокутного профілю з одночіною арматурою, у основу якого покладені рекомендації робіт [6, 9].

Згідно з цими рекомендаціями розрахунок слід проводити у такому порядку:

1. Перевірити рівняння рівноваги (22), приймаючи  $\varepsilon_{b1} = \varepsilon_{bu}$  та  $\varepsilon_s = \varepsilon_{su}$ . За результатами обчислення рівняння (22) можуть реалізуватися два випадки:

– перший: ліва частина більша за нуль, що свідчить про недостатність армування перерізу;

– другий: ліва частина менша за нуль, що означає переармування перерізу.

За умов проведених експериментальних досліджень [9] очевидно, що реалізується перший випадок.

2. При реалізації першого випадку, тобто коли ліва частина більша за нуль, необхідно виконати такі операції:

а) визначити нову величину деформації  $\varepsilon_{b_1}$ :

$$\varepsilon_{b_1}^{(1)} = \varepsilon_{bu} - \Delta\varepsilon_{b_1}^{(1)}, \quad (25)$$

при цьому на першому кроці (першій ітерації) рекомендується приймати

$$\Delta\varepsilon_{b_1}^{(1)} = 0,1\varepsilon_{bu}; \quad (26)$$

б) перевірити рівняння рівноваги (22) і, якщо ліва частина залишилася більшою за нуль, деформацію  $\varepsilon_{b_1}^{(2)}$  на другому кроці необхідно ще раз зменшити на величину

$$\Delta\varepsilon_{b_1}^{(2)} = \Delta\varepsilon_{b_1}^{(1)}, \quad (27)$$

тобто прийняти

$$\varepsilon_{b_1}^{(2)} = \varepsilon_{b_1}^{(1)} + \Delta\varepsilon_{b_1}^{(2)} = \varepsilon_{b_1}^{(1)} + 2\Delta\varepsilon_{b_1}^{(1)}, \quad (28)$$

в) покрокове зменшення деформацій виконують до тих пір, поки ліва частина рівняння (22) не зменшить знак.

3. Після зміни знаку рівняння рівноваги (22) оцінюють точність рішення.

Точність вважають достатньою при значенні

$$\Delta\varepsilon_{b_1}^{(k)} \leq 0,02\varepsilon_{bu}. \quad (29)$$

4. У випадку, коли точність рішення недостатня, тобто умова (29) не виконується, визначають нову величину деформації

$$\varepsilon_{b_1}^{(m)} = \varepsilon_{b_1}^{(m-1)} + \Delta\varepsilon_{b_1}^{(m)}, \quad (30)$$

де призначають нову величину прирошення деформацій

$$\Delta\varepsilon_{b_1}^{(m)} = 0,1\Delta\varepsilon_{b_1}^{(m-1)} = 0,01\varepsilon_{bu}. \quad (31)$$

Далі виконують обчислення за п.п.а), б), в) до тих пір, поки не буде досягнута достатня (задана) точність виконання умови (22) при значенні

$$\Delta\varepsilon_{b_1}^{(m)} \leq 0,02\varepsilon_{bu}. \quad (32)$$

5. Отримані на останніх кроках рішення рівняння (22) величини  $\varepsilon_{b_1}$  та  $\sigma$  використовують при обчисленні згиального моменту  $M_{ult}$  за формулою (23).

Тут треба відзначити, що далі розрахунки балок серії Б ведуть за спрощеною теорією з урахуванням діаграми стану бетону за графіком рис. 2, і арматури – за графіком рис. 2, а. Обидві діаграми відповідають діаграмі Прандтля.

Для порівняння експериментальних та розрахункових значень несучої здатності для еталонної серії балок Б були використані дослідні параметри, які визначають:

- розміри поперечного перерізу елемента:  $b=120$  мм;  $h=200$  мм;  $h_0=185$  мм;  $A_s=157$  мм<sup>2</sup>;
- характеристики опорів матеріалів:  $R_b=23,4$  МПа;  $R_s=542$  МПа;
- деформаційні характеристики матеріалів:  $\varepsilon_{bu}=2 \cdot 10^{-3}$ ;  $\varepsilon_{su}=4,14 \cdot 10^{-3}$ ;  $E_b=25,8 \cdot 10^3$ ;  $\varepsilon_{su}=10 \cdot 10^{-3}$ ;  $E_s=2,1 \cdot 10^5$  МПа.

Гранична деформація  $\varepsilon_{bu}$  прийнята для відповідної міцності бетону за рекомендаціями роботи [5], оскільки вона не була отримана у процесі випробування бетонних призм внаслідок відсутності додільної гілки діаграми деформування бетону. Гранична деформація арматури  $\varepsilon_{su}$  класа А-ІІІ теж не була отримана у дослідах і прийнята за рекомендаціями роботи [5].

Початкова перевірка рівняння (22) (так зване нульове наближення) виконана за умов:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{b_1} = \varepsilon_{su} &= 4,14 \cdot 10^{-3}; \quad \varepsilon_{b,el} = \frac{R_b}{E_b} = \frac{23,4}{25,8 \cdot 10^3} = 0,91 \cdot 10^{-3}; \quad \varepsilon_s = \varepsilon_{su} = 10 \cdot 10^{-3}; \\ \kappa &= \frac{\varepsilon_{b_1} + \varepsilon_s}{h_0} = \frac{(4,14+10) \cdot 10^{-3}}{185} = 7,64 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{мм}}. \end{aligned}$$

Розрахунок за нульовим наближенням з підставленням зазначених величин у рівнянні (22), показав такі результати

$$\frac{23,4 \cdot 120}{2 \cdot 7,64 \cdot 10^{-5}} [2(4,14 - 0,91) + 0,91] \cdot 10^{-3} - 542 \cdot 157 = 46556H > 0,$$

тобто отримано перший випадок, який свідчить про недостатність армування.

Отриманий результат підтверджує, що, в наслідок низького відсотку армування, руйнування відбувається через текучість розтягнутої арматури, а міцність стиснутої зони бетону лишається невикористаною.

Далі виконані дії з визначення дійсної несучої здатності перерізу відповідно до прийнятого алгоритму:

- проведені розрахунки рівняння (22) з покроковим зміненням деформацій на величину  $\Delta\varepsilon_{b_1}^{(k)} = 0,1\varepsilon_{bu} = 0,414 \cdot 10^{-3}$ ;
- після п'ятого наближення, тобто при  $5 \cdot \Delta\varepsilon_{b_1}^{(k)} = 2,07 \cdot 10^{-3}$  отримано зміну знака;
- перевірка умови (29) показує недостатню точність рівняння  $\Delta\varepsilon_{b_1}^{(5)} = 0,414 \cdot 10^{-3} > 0,02\Delta\varepsilon_{bu} = 0,0828 \cdot 10^{-3}$

Доводиться виконувати наступну серію кроків з призначенням, згідно з формулами (31), нових величин прирошень деформацій  $\Delta\varepsilon_{b_1}^{(m)} = 0,1\varepsilon_{bu}^{(k)} = 0,01\varepsilon_{bn}$ .

На чотирнадцятому кроці рішення рівняння (22) знову змінило знак. Це дає основу для перевірки точності рішення на попередньому, тринадцятому кроці наближення. Перевірка точності розрахунку, згідно з формули (32) показує достатню точність, оскільки

$$\Delta \varepsilon_{b_1}^{(13)} = 0,0414 \cdot 10^{-3} < 0,02 \Delta \varepsilon_{bu} = 0,0828 \cdot 10^{-3}.$$

Для розрахунку несучої здатності перерізу остаточно прийняті такі параметри:  $\varepsilon_{b_1} = 2,46 \cdot 10^{-3}$ ;  $\gamma = 6,94 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{мм}}$

За цими параметрами, згідно з формули (23), визначений згиальний момент, який може сприяти заданий переріз

$$M_{ult} = \frac{234 \cdot 120}{6 \cdot (6,94 \cdot 10^{-5})^2} [3(2,46 \cdot 10^{-3})^2 - (0,91 \cdot 10^{-3})^2] + 542 \cdot 157 (180 - \frac{2,46 \cdot 10^{-3}}{6,94 \cdot 10^{-5}}) = 14,49 \cdot 10^6 \text{Нмм} = 14,49 \text{kNm}$$

Корисним є порівняння викладеного методу розрахунку за деформаційною моделлю з існуючим методом граничних зусиль відповідно до чинних норм.

Як відомо, згідно зі СНІП [10] несучу здатність нормальногоперерізу можна визначити за міцністю стиснутої зони бетону

$$M_{ult} = R_b b x (h_0 - 0,5x) \quad (33)$$

або за міцністю розтягнутої арматури

$$M_{ult} = R_s A_s (h_0 - 0,5x) \quad (34)$$

При цьому висоту стиснутої зони визначають з рівняння

$$R_b b x - R_s A_s = 0 \quad (35)$$

Формули (33)...(35) дійсні за умови  $\xi \leq \xi_R$ ,

де  $\xi_R$  - відносна гранична висота стиснутої зони, яку визначають за формулою [10].

Нижче в таблиці наведені дані про несучу здатність заданого перерізу залізобетонної балки, отримані експериментально та обчислені різними способами. І як видно з цієї таблиці, теоретичні значення близькі до експериментальних, причому розрахункові величини майже не відрізняються між собою.

Таблиця

Співставлення експериментальних і теоретичних даних міцності непідсилених залізобетонних елементів

Параметри	Експеримент	Метод розрахунку	
		Деформаційний	за чинними нормами
$\varepsilon_b \cdot 10^3$	-	2,469	-
$\varepsilon_{du} \cdot 10^3$	-	10	-
x, мм	24,2	35,4	30,3
$M_{ult}$ , кНм	15,3	14,49	14,50

### Література

- ENV 1992 – 1 – 1: 1991. Eurocode 2: Design of Concrete Structures. Part 1: General Rules for Buildings. European Prestandart, 1990. – 253 p.

2. ENV 1992 – 2 Design of Concrete Structures. Part 2: Annex 3 Draft 8 May 1994.
3. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
4. Методические рекомендации по уточненному расчету железобетонных элементов с учетом полной диаграммы сжатия бетона / А.Н. Бамбура, В.Я. Бачинский, Н.В. Журавлева, И.Н. Пешкова. – К.: НИИСК, 1987. - 25 с.
5. Бамбура А.М., Барашиков А.Я., Гурківський О.Б. Основні положення розрахунку бетонних та залізобетонних конструкцій по національному нормативному документу (ДБН), що розробляється // Будівельні конструкції. - К.: НДІБК, 2005. - Вип. 62 (у двох томах). - Том 1.-С. 36 - 43.
6. Барашиков А.Я., Задорожнікова І.В. Спрощені розрахунки несучої здатності нормальніх перерізів згинальних залізобетонних елементів за деформаційною моделью // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. – Рівне: НУВГП, 2005. – Вип. 12. – С. 109 - 115.
7. Бамбура А.М. К оценке прочности железобетонных конструкций на основе деформационного подхода и реальных диаграмм деформирования бетона и арматуры // Бетон на рубеже третьего тысячелетия: Материалы 1-й Всеукраинской конференции по проблемам бетона и железобетона. – Москва: В Зкн, 2001. – Кн.3. – С. 750-756.
8. Бамбура А.М., Барашиков А.Я. Расчет изгибаемых и внецентренно сжатых элементов на основе упрощенных диаграмм деформирования // Бетон и железобетон – пути развития. Науч. труды 2-й Всеукраинской (Международной) конференции по бетону и железобетону, 2005. Москва: В 5-ти томах. НИИЖБ, 2005, том 2. - С. 312-318. 10. СНиП 2.03.01-84\* Бетонные и железобетонные конструкции. Нормы проектирования / Госстрой СССР. М.: ЦИТП, 1986 – 79с.

### **Аннотация**

Подана методика и последовательность расчета неусиленных согнутых элементов за деформационной моделью, а также приведены данные сопоставления о несущей способности заданного сечения исследуемых железобетонных балок, полученные экспериментально и рассчитанные разными способами.

### **Annotation**

A method and sequence of calculation of the unincreased bend elements is given after a deformation model, and also the resulted is given comparison about bearing ability set the cut of experimental reinforced-concrete beams, got experimentally and calculated in number of different ways.