УДК 515.2

к.т.н., професор Ткач Д.И., Кистол А.Д.,
Приднепровская государственная академия
строительства и архитектуры, г. Днепропетровск

ГЕОМЕТРИЯ И ГРАФИКА ЗОЛОТОЙ ЛЕМНИСКАТЫ БЕРНУЛЛИ

Работа посвящена графическому построению и синтетическому описанию позиционных и метрических свойств золотой лемнискаты Бернулли и их взаимосвязи с конструктивными особенностями золотой гиперболы и золотого эллипса.

Постановка проблемы. В рамках зародившейся в начале XXI века и бурно развивающейся Математики гармонии как «золотой» парадигмы современной науки [1] большой познавательный интерес имеет геометро-графическое моделирование, в частности, золотых линий, к числу которых,
кроме описанных ранее золотого эллипса и золотой гиперболы [2], можно отнести кривую 4-го порядка – лемнискату Бернулли как разновидность овала Кассини. Наличие у неё двух фокусов даёт основание полагать, что она может стать золотой при исходном закладывании в её конструкцию зо-лотой пропорции.

Анализ исследований и публикаций. История изучения лемниска-ты восходит к 1694 году, в котором швейцарский математик Якоб Бернул-ли опубликовал её уравнение в статье *Curvatura Laminae Elasticae* в журнале *Acta eruditorum*. Бернулли назвал эту кривую «лемнискатой» так как она похожа на бантик, с помощью которого в Древней Греции прикре-пляли венок к голове победителя на спортивных играх. И он не знал, что 14-ю годами раньше знаменитый французский астроном Джованни Доминико Кассини уже исследовал более общий случай своих овалов, к числу которых относится лемниската как частный случай. Зная законы Кеплера о движении планет солнечной системы по эллиптическим траек-ториям, он предположил, что такой траекторией может быть не сумма, а произведение расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная. В результате было получено уравне-ние овальной кривой 4-го порядка на основе следующих соображений.

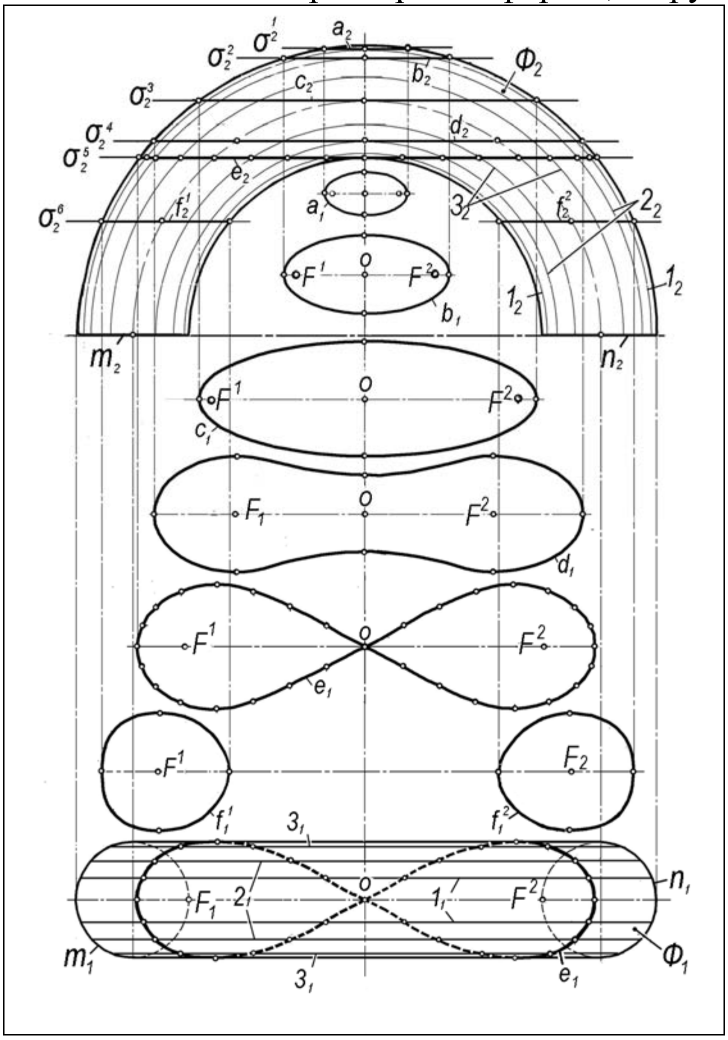
Если обозначить через a половину расстояния между фокусами овала, а через b^2 – величину произведения расстояний от его точек до фокусов, то
его уравнение приобретает следующий вид:

$$[(x-a)^2+y^2]\,[(x+a)^2+y^2]=b^4 .$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получается уравнение овалов Кассини в следующем виде:

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 – 4\, a^2x^2 = b^4.$$

В соответствии с этим уравнением геометрические фигуры овала Кассини имеют 4 характерные формы, структура которых зависит от соотношений между параметрами a и b. Если $b\geq 2a$, то овал Кассини подобен эллипсу, (рис.1, a,b,c),если $a < b < 2a$, то в нем возникает отрица-тельная кривизна (рис.1,d), если $a = b$, то он превраща-ется в фигуру знака бесконе-чности, называемую «лем-нискатой Бернулли».



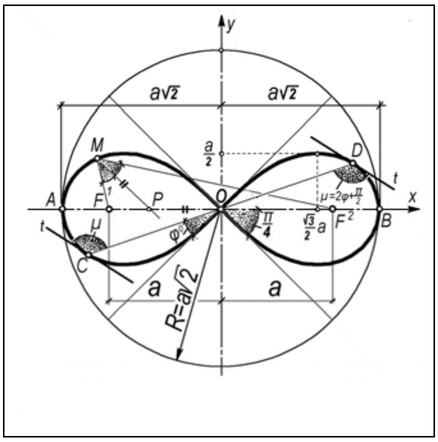


Рис.1. Овалы Кассини как сечения тора **Рис.2.** Лемниската Бернулли

Классическая математика опре-деляет её как *геометричес-кое место точек, для кото-рых произведение расстоя-ний от двух фокусов равно квадрату половины расстояния между фоку-сами* (рис.2).

Позиционно эти линии являются плоскими сечениями открытого кругового тора (рис.1).

Замечательным метрическим свойством этой линии является равенст-во площади одного её крыла квадрату половины расстояния между её фокусами.

К числу конструктивно-композиционных свойств лемнискаты Бернулли относится её способность в результате инверсии относительно окружности с центром в её узловой точке преобразоваваться в равнобочную гиперболу, по отношению к которой она выступает как подера, а, в свою очередь, её подерой является синусоидальная спираль [3].

Эти и некоторые другие свойства двухфокусной алгебраической кривой 4-го порядка как системы вызывают познавательный интерес к возможности её конструирования при исходном закладывании в её структуру золотой пропорции. Отсюда вытекает постановка задачи: *сконструировать золотую лемнискату и изучить её позиционные и метрические свойства.*

Основная часть. В качестве исходного условия следует принять некоторый отрезок *MN* длиною 2 единицы с точкой *o* посередине. Приняв отрезок *oM* за больший катет треугольника Дюрера, разделить его в золотой пропорции точкой F^1: $MF^1 : F^1o = 0{,}386 : 0{,}618$. (рис.3).

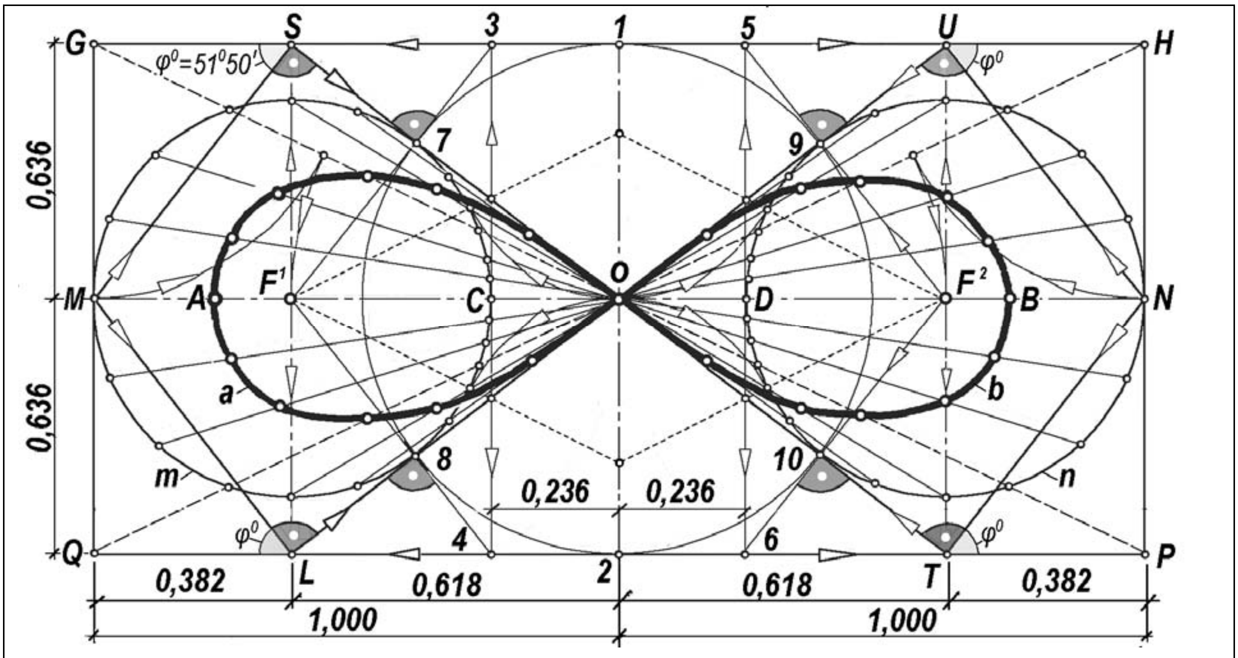


Рис.3. Золотая лемниската Бернулли

Последующие построения производить в такой последовательности:

1. На отрезке *oN* построить точку F^2, которая разбивает его в пропорции *0,618 : 0,382* ;
2. Через точку *O* провести вертикальную ось симметрии;
3. Из точек F^1 и F^2 как из центров провести окружности *m* и *n* радиусами *0,382;*
4. Из точки о провести пучок лучей, пересекающих окружности *m* и *n* в необозначенных точках и касающихся их в точках 7, 8, 9 и 10;

5. Замеряя величины хорд окружностей *m* и *n* между точками их пересечения с лучами пучка *o*, отложить их от точки *o* по этим лучам (метод Маклорена);
6. Полученные на лучах пучка о точки соединить гладкой линией, которая образует два лепестка *a* и *b* искомой золотой лемнискаты.

О золотом содержании этой линии свидетельствует наличие в его структуре двух А-ромбов И.Шевелёва (*oSML* и *oUNT*), состоящие из 4-х треугольников Прейса, по два из которых образуют профили пирамиды фараона Хеопса (*oSL* и *oUT*). Практически весь габаритный прямоугольник *QGHP* структурирован 16-ю прямоугольными треугольниками Прейса, длины сторон которых составляют ряд золотого сечения.

Приведенная метрика рис.3 говорит о его золотой пропорциональности.

Взаимосвязь между золотой лемнискатой и золотой гиперболой определяется позиционными и метрическими особенностями их конструктивных структур. Оказывается, что точки искомой гиперболы, соответственные точкам лемнискаты на лучах пучка *o* удалены от центра *o* на расстояния, обратно-пропорциональные расстояниям точек лемнискаты от этого центра. Это положение невозможно смоделировать геометро-графически не прибегая к вычислению обратных величин искомых расстояний. Поэтому целесообразно прибегнуть к построению искомой гиперболы подерным преобразованием окружности *e* относительно фокусов F^1 и F^2 искомой золотой гиперболы как полюсов её директрис d^1 и d^2.

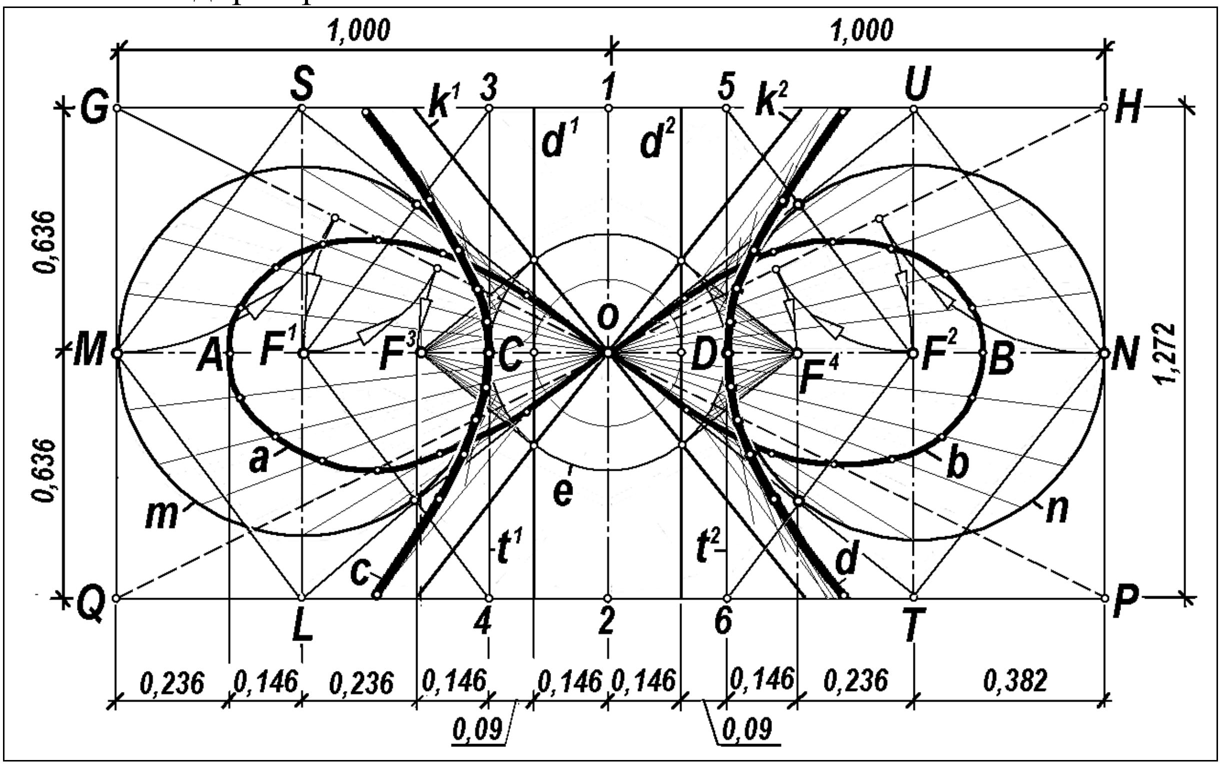


Рис. 4. Золотая лемниската и обратно-пропорциональная ей золотая гипербола

О золотом содержании этой композиции свидетельствуют А-ромбы И.Шевелёва и профили пирамиды фараона Хеопса, образуемые асимптота-ми k^1 и k^2 золотой гиперболы с ветвями *c* и *d*.

Интересна графическая композиция, состоящая из взаимосвязанных линий золотой лемнискаты и золотого эллипса (рис.5). Её конструктивной особенностью является софокусность этих линий, которая определила равенство расстояния между вершинами *M* и *N* лемнискаты величине малой оси *CD* золотого эллипса *e*.

Вывод: Сконструированная в работе золотая лемниската Бернулли является эксклюзивной алгебраической линией 4-го порядка, конструктивная структура которой позиционно и метрически сгармонизирована по законам золотой пропорции и поэтому наряду с золотыми эллипсом и гиперболой может служить элементом линейных каркасов объектов дизайна.

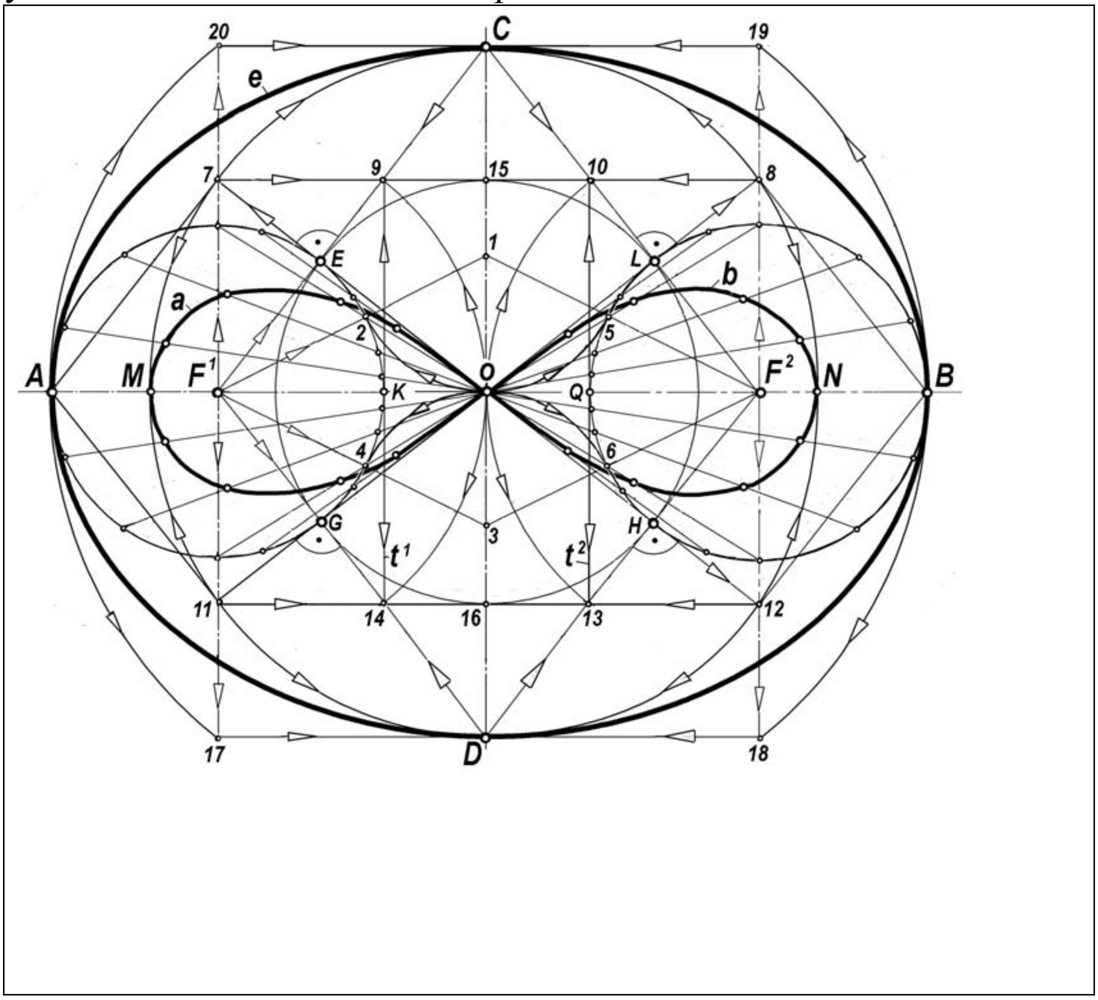


Рис.5. Композиция софокусных золотой лемнискаты и золотого эллипса

Перспективы дальнейших исследований. Геометро-графическое моделирование новых золотых линий и конструирование на их основе новых золотых поверхностей.

Литература

1.*Стахов А.П.* Математика Гармонии как «золотая парадигма современной науки. //www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321168.htm.

2.*Ткач Д.И.* Золотые коники. //Сборник трудов V международной научно-практической конференции «Современные проблемы геометрического моделирования», ТГАТА, Мелитополь, 1998. С.5-10.

3. *Лемниската Бернулли* //Материал из Википедии – свободной энциклопе-дии. http: //ru.wikipedia.org/ wiki.

Анотація

Робота присвячена графічній побудові и синтетичному опису позиційних та метричних властивостей золотої лемніскати Бернуллі та їх взаємозв'язку з конструктивними особливостями золотої гіперболи та золотого еліпсу.

Abstract

Work is devoted to graphical construction and synthetic description of the positional and metric properties of gold lemniscate of Bernoulli and their relationship with structural features of gold hyperbola and gold ellipse.