

УДК 530.12; 531.51

канд. фіз.-мат. наук Ф.Є. Хлистун

Київський національний університет будівництва і архітектури.

## ПОВНИЙ НАБІР ТЕНЗОРІВ ТА ІНВАРІАНТІВ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОГО ТЕНЗОРА МАКСВЕЛЛА З ВИКОРИСТАННЯМ БІКОМПЛЕКСНОГО ВЕКТОРА РІМАНА – ЗІЛЬБЕРШТЕЙНА.

В роботі запропоновано метод коваріантного описання величин доступних при спостереженнях електромагнітного випромінювання, для описання якого використовують тензор Максвелла в комплексній формі, в будь якому ізотропному середовищі через компоненти бікомплексного вектора Рімана-Зільберштейна.

В багатьох випадках при розгляді конкретних задач зручно користуватись електричними і магнітними векторами в комплексній формі. В роботі [1] показано, що будь яке електромагнітне поле в однорідному середовищі може бути описане компонентами комплексного тензора і вектора Рімана-Зільберштейна, де ми використали уявну одиницю « $i$ ».

$$\Phi^{nm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ f^{nm} + i\hat{f}^{nm} \right]; \quad \hat{\Phi}^{nm} = -i\Phi^{nm}; \quad z_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ uD_n + iH_n \right];$$

$$\Phi^{nm} = \begin{bmatrix} 0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ -z_1 & 0 & -iz_3 & iz_2 \\ -z_2 & iz_3 & 0 & -iz_1 \\ -z_3 & -iz_2 & iz_1 & 0 \end{bmatrix}; \quad f^{nm} = \begin{bmatrix} 0 & uD_1 & uD_2 & uD_3 \\ -uD_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -uD_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -uD_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Тут  $\vec{D}; \vec{H}$  - дійсні значення електричного і магнітного векторів.

Для квазімонохроматичного випромінювання, яке розповсюджується вздовж фазових поверхонь  $\psi(x^v) = const$ , компоненти векторів  $\vec{D}; \vec{H}$  мають вигляд:

$$D_n = {}_1d_n \cos \psi - {}_2d_n \sin \psi = \text{Re}_j \left[ d_n e^{j\psi} \right]; \quad d_n = {}_1d_n + j {}_2d_n;$$

$$H_n = {}_1h_n \cos \psi - {}_2h_n \sin \psi = \text{Re}_j \left[ h_n e^{j\psi} \right]; \quad h_n = {}_1h_n + j {}_2h_n. \quad (2)$$

Тут ми використали іншу уявну одиницю « $j$ », тому що в  $z_n$  ми уже використали уявну одиницю « $i$ ». Виходячи з визначення  $z_n$  в (1), маємо:

$$z_n = [a_n \cos \psi - b_n \sin \psi] = \operatorname{Re}_j [(a_n + jb_n) \exp(j\psi)] = \operatorname{Re}_j Z_n; \quad (3)$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}} [u_1 d_n + i_1 h_n]; \quad c_n = (a_n + jb_n); \quad Z_n = c_n e^{j\psi}.$$

Замість тензора Максвелла  $f^{nm}$  з дійсними векторами напруженості електричного і магнітного поля  $\vec{D}; \vec{H}$  введемо комплексний тензор Максвелла  $\psi^{nm}$ , матриця якого матиме вигляд матриці  $f^{nm}$ , але вектори електричного і магнітного поля будуть комплексними по уявної одиниці « $j$ ». За аналогією з комплексним тензором Рімана-Зільберштейна  $\Phi^{nm}$  введемо бікомплексний тензор з тим же іменем:

$$F^{nm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi^{nm} + i\hat{\psi}^{nm}) = \begin{bmatrix} 0 & Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ -Z_1 & 0 & -iZ_3 & iZ_2 \\ -Z_2 & iZ_3 & 0 & -iZ_1 \\ -Z_3 & -iZ_2 & iZ_1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{F}^{nm} = -iF^{nm}. \quad (4)$$

Тут  $\hat{\psi}^{nm}$  означає дуальний тензор, а  $F^{nm}$  - самодульний тензор. Вектор  $Z_n$  є бікомплексною величиною, яка містить дві незалежні уявні одиниці:  $i \neq j$ ;  $i^2 = j^2 = -1$ ;  $ij = ji$ . Комплексну спряженість від бікомплексних величин по уявній одиниці « $i$ » будемо позначати:  $\tilde{F}^{nm}; \tilde{Z}_n$ , комплексну спряженість по « $j$ »:  $\bar{F}^{nm}; \bar{Z}_n$ , а комплексну спряженість по обох одиницях так:  $\tilde{\bar{F}}^{nm}; \tilde{\bar{Z}}_n$ .

Знайдемо інваріанти і всі можливі суми по одному індексу тензорів  $F^{nm}$ . Для цього будемо використовувати метрику:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2; \quad g_{kr} = (1; -1; -1; -1), \quad (5)$$

де  $dx^0 = udt$ ;  $u = (c / \sqrt{\epsilon\mu}) \leq c$  - швидкість світла в однорідному середовищі;  $dt$  - проміжок власного часу спостерігача;  $dx^n$  - проміжки просторових координат. Оскільки тензор  $F^{nm}$  - самодульний, то для нього (без урахування комплексних спряжень по двох уявних одиницях!) існує тільки чотири можливі суми по одному індексу тензорів  $F^{nm}$ :

$${}_0S^{nm} = F^{nk} F^{mk} g_{kk}; \quad {}_1S^{nm} = F^{nk} \bar{F}^{mk} g_{kk}; \quad {}_2S^{nm} = F^{nk} \tilde{F}^{mk} g_{kk}; \quad {}_3S^{nm} = F^{nk} \tilde{\bar{F}}^{mk} g_{kk}. \quad (6)$$

Позначимо через  ${}_n l$  чотири можливих скалярних добутки бікомплексного вектора  $Z_n$ .

$$\begin{aligned}
 {}_0 l &= \vec{Z}\vec{Z} = [\vec{a}\vec{a} - \vec{b}\vec{b} + 2j\vec{a}\vec{b}]e^{j\psi}; & {}_3 l &= \vec{Z}\vec{Z} = [\vec{a}\vec{a} + \vec{b}\vec{b} + j(\vec{a}\vec{b} - \vec{a}\vec{b})] \\
 {}_1 l &= \vec{Z}\vec{Z} = [\vec{a}\vec{a} + \vec{b}\vec{b}]; & {}_2 l &= \vec{Z}\vec{Z} = [\vec{a}\vec{a} - \vec{b}\vec{b} + j(\vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{b})]e^{j\psi};
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Скалярні добутки векторів  $\vec{a}; \vec{b}$  запишемо використовуючи формули (3).

$$\begin{aligned}
 \vec{a}^2 &= \frac{1}{2}[u^2 {}_1 \vec{d}^2 - {}_1 \vec{h}^2 + 2iu {}_1 \vec{d} {}_1 \vec{h}]; & \vec{b}^2 &= \frac{1}{2}[u^2 {}_2 \vec{d}^2 - {}_2 \vec{h}^2 + 2iu {}_2 \vec{d} {}_2 \vec{h}]; \\
 \vec{a}\vec{b} &= \frac{1}{2}[u^2 {}_1 \vec{d} {}_2 \vec{d} - {}_1 \vec{h} {}_2 \vec{h} + iu({}_1 \vec{d} {}_2 \vec{h} + {}_2 \vec{d} {}_1 \vec{h})]; & \vec{a}\vec{a} &= \frac{1}{2}[u^2 {}_1 \vec{d}^2 + {}_1 \vec{h}^2]; \\
 \vec{b}\vec{a} &= \frac{1}{2}[u^2 {}_1 \vec{d} {}_2 \vec{d} + {}_1 \vec{h} {}_2 \vec{h} + iu({}_1 \vec{d} {}_2 \vec{h} - {}_2 \vec{d} {}_1 \vec{h})]; & \vec{b}\vec{b} &= \frac{1}{2}[u^2 {}_2 \vec{d}^2 + {}_2 \vec{h}^2].
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

З наведених формул видно, що інваріанти  ${}_0 l; {}_1 l$  дорівнюють нулю, якщо в обох хвилях вектори  $u\vec{d}; \vec{h}$  взаємно ортогональні та рівні за модулями. При цьому кожна пара векторів може бути повернута в своїй площині відносно іншої на довільний кут  $\alpha$  та їхні модулі можуть відрізнятись на довільний множник  $k$ .

Інваріанти  ${}_2 l; {}_3 l$  пропорційні комбінаціям густин енергій кожної з двох хвиль, причому в інваріанті  ${}_3 l$  дійсна частина пропорційна повній густині енергії електромагнітної хвилі, а другий дійсний доданок має множник  $(ij)$ .

Можна показати, що матриці тензорів (6) мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 {}_0 S^{nm} &= \begin{bmatrix} -{}_0 l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}_0 l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}_0 l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}_0 l \end{bmatrix}; & {}_1 S^{nm} &= \begin{bmatrix} -{}_1 l & {}_1 q_1 i & {}_1 q_2 i & {}_1 q_3 i \\ -{}_1 q_1 i & {}_1 l & {}_1 q_3 & -{}_1 q_2 \\ -{}_1 q_2 i & -{}_1 q_3 & {}_1 l & {}_1 q_1 \\ -{}_1 q_3 i & {}_1 q_2 & -{}_1 q_1 & {}_1 l \end{bmatrix}; \\
 {}_2 S^{nm} &= \begin{bmatrix} -{}_2 l & -{}_2 q_1 i & -{}_2 q_2 i & -{}_2 q_3 i \\ -{}_2 q_1 i & {}_2 \sigma^{11} & {}_2 \sigma^{12} & {}_2 \sigma^{13} \\ -{}_2 q_2 i & {}_2 \sigma^{21} & {}_2 \sigma^{22} & {}_2 \sigma^{23} \\ -{}_2 q_3 i & {}_2 \sigma^{31} & {}_2 \sigma^{32} & {}_2 \sigma^{33} \end{bmatrix}; & {}_3 S^{nm} &= \begin{bmatrix} -{}_3 l & -{}_3 q_1 i & -{}_3 q_2 i & -{}_3 q_3 i \\ -{}_3 q_1 i & {}_3 \sigma^{11} & {}_3 \sigma^{12} & {}_3 \sigma^{13} \\ -{}_3 q_2 i & {}_3 \sigma^{21} & {}_3 \sigma^{22} & {}_3 \sigma^{23} \\ -{}_3 q_3 i & {}_3 \sigma^{31} & {}_3 \sigma^{32} & {}_3 \sigma^{33} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Тут  ${}_1 q_n; {}_2 q_n; {}_3 q_n$  означають компоненти векторних добутків:

$$\begin{aligned}
{}_1\vec{q} &= \left[ \vec{\tilde{Z}\tilde{Z}} \right] = -j \left\{ \left( u^2 \left[ {}_1\vec{d} \ {}_2\vec{d} \right] - \left[ {}_1\vec{h} \ {}_2\vec{h} \right] \right) + iu \left( \left[ {}_1\vec{d} \ {}_2\vec{h} \right] - \left[ {}_2\vec{d} \ {}_1\vec{h} \right] \right) \right\}; \\
{}_2\vec{q} &= \left[ \vec{\tilde{Z}\tilde{Z}} \right] = -i \left\{ {}_1\vec{P} + j {}_2\vec{P} \right\} e^{2j\psi}; \quad {}_3\vec{q} = \left[ \vec{\tilde{Z}\tilde{Z}} \right] = -i \left\{ {}_0\vec{P} + ij {}_k\vec{P} \right\}; \\
{}_1\vec{P} &= u \left( \left[ {}_1\vec{d} \ {}_1\vec{h} \right] - \left[ {}_2\vec{d} \ {}_2\vec{h} \right] \right); \quad {}_0\vec{P} = u \left( \left[ {}_1\vec{d} \ {}_1\vec{h} \right] + \left[ {}_2\vec{d} \ {}_2\vec{h} \right] \right); \\
{}_2\vec{P} &= u \left( \left[ {}_1\vec{d} \ {}_2\vec{h} \right] + \left[ {}_2\vec{d} \ {}_1\vec{h} \right] \right); \quad {}_k\vec{P} = \left( u^2 \left[ {}_1\vec{d} \ {}_2\vec{d} \right] + \left[ {}_1\vec{h} \ {}_2\vec{h} \right] \right);
\end{aligned} \tag{10}$$

які характеризують певні потоки енергії:  ${}_0\vec{P}$  - повний потік;  ${}_k\vec{P}$  - потік поляризованого по колу випромінювання;  ${}_1\vec{P}$ ;  ${}_2\vec{P}$  - потоки двох незалежних складових лінійної поляризації.

Можна показати, що при  ${}_0l = {}_1l \equiv 0$ :

$$\begin{aligned}
{}_1\vec{q} &\equiv 0; \quad {}_0\vec{P} = (1+k^2)\vec{e}; \quad {}_1\vec{P} = (1-k^2)\vec{e}; \quad {}_2\vec{P} = 2\vec{e}k \cos \alpha; \quad {}_k\vec{P} = 2\vec{e}k \sin \alpha; \\
{}_2l &= \left[ w(1-k^2) + jwk \cos \alpha \right] e^{2j\psi}; \quad {}_3l = \left[ w(1+k^2) - ijwk \sin \alpha \right], \tag{11}
\end{aligned}$$

де позначено:  $\vec{e} = u \left[ {}_1\vec{d} \ {}_1\vec{h} \right]$ ;  $w = \frac{1}{2} \left( u^2 \left[ {}_1\vec{d} \ {}_1\vec{d} \right] + \left[ {}_1\vec{h} \ {}_1\vec{h} \right] \right)$ ; множник  $k$  - коефіцієнт пропорційності між довжинами відповідних векторів, кут між якими складає  $\alpha$ . Не важко переконатись, що  ${}_0\vec{P}^2 = {}_1\vec{P}^2 + {}_2\vec{P}^2 + {}_k\vec{P}^2$ , тобто квадрат повного потоку дорівнює сумі квадратів потоків з лінійною та круговою поляризаціями. Відповідні просторові симетричні тензори напружень побудовано таким чином:

$$\begin{aligned}
{}_2\sigma^{nm} &= \left\{ \left[ {}_2\sigma_{nm} + j {}_2\sigma_{nm} \right] e^{2j\psi} - {}_2l\delta_{nm} \right\}; \\
{}_1\sigma_{nm} &= \left[ u^2 \left( {}_1d_{n1}d_m - {}_2d_{n2}d_m \right) + \left( {}_1h_{n1}h_m - {}_2h_{n2}h_m \right) \right] \\
{}_2\sigma_{nm} &= \left[ u^2 \left( {}_1d_{n2}d_m + {}_2d_{n1}d_m \right) + \left( {}_1h_{n2}h_m + {}_2h_{n1}h_m \right) \right] \tag{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_3\sigma^{nm} &= \left\{ \left[ {}_2\sigma_{nm} + ij {}_2\sigma_{nm} \right] - {}_3l\delta_{nm} \right\}; \\
{}_0\sigma_{nm} &= \left[ u^2 \left( {}_1d_{n1}d_m + {}_2d_{n2}d_m \right) + \left( {}_1h_{n1}h_m + {}_2h_{n2}h_m \right) \right] \\
{}_3\sigma_{nm} &= u \left[ \left( {}_1d_{n2}h_m + {}_1d_{m2}h_n \right) - \left( {}_2d_{n1}h_m + {}_2d_{m1}h_n \right) \right] \tag{13}
\end{aligned}$$

Можна перевірити, що всі компоненти бікомплексного тензора  ${}_3S^{nm}$  складаються з суми двох дійсних величин одна з яких має множник  $(ij)$ , тоді як  ${}_2S^{nm}$  є комплексним лише по « $j$ » і має множник  $\exp(j2\psi)$ . Таким чином ці два тензори можна представити у вигляді:

$$I^{nm} + ijK^{nm} = -\mu\mu_0 {}_3S^{nm} ; L^{nm} = -\mu\mu_0 {}_2S^{nm} \exp(-j2\psi) \quad (14)$$

Множник  $(-\mu\mu_0)$  тут підібрано таким чином, щоб компоненти тензора  $I^{nm}$  співпадали з компонентами тензора енергії-імпульсу електромагнітного поля в системі **СІ**.

В роботі [2] показано, що тензори  ${}_2S^{nm}; {}_3S^{nm}$  мають такі самі властивості, як і тензор енергії-імпульсу електромагнітного поля (а саме мають нульовий слід і нульову коваріантну дивергенцію!), а їх складові характеризують, відповідно:  $I^{nm}$  - повний світловий потік;  $K^{nm}$  - його частину з круговою та  $L^{nm}$  - з лінійною поляризацією. Тензор лінійної поляризації  $L^{nm}$  не має високочастотного множника, а дві його комплексно спряжені по уявної одиниці « $j$ » частини характеризують дві незалежні складові лінійної поляризації.

Можна показати, що у випадку коли  ${}_0l = {}_1l \equiv 0$ , то відмінні від нуля компоненти тензорів напружень дорівнюють:

$${}_2\sigma^{nm} = -w \left[ (1 - k^2) + 2jk \cos \alpha \right] e^{2j\psi}; \quad {}_3\sigma^{nm} = -w \left[ (1 + k^2) - 2ijk \sin \alpha \right]. \quad (15)$$

**Висновок.** В роботі наведено повний комплект матриць для дослідження властивостей електромагнітного випромінювання з ненульовими інваріантами ( ${}_0l = {}_1l \neq 0$ ) як у вакуумі так і в однорідному ізотропному середовищі. Ці формули дають більш повну інформацію про потоки енергії і викликані полем напруження в середовищі навіть у випадку випромінювання з нульовими інваріантами, яке приблизно реалізується у дальній хвильовій зоні.

### Список літератури.

1. Ф.Є. Хлыстун. Запис рівнянь Максвелла в коваріантній формі з використанням вектора Рімана-Зильберштейна. – Містобудування та територіальне планування. Київ КНУБА 2011, вип.39, 421-424.
2. Ф.Е. Хлыстун. Тензоры и параметры поляризации электромагнитного излучения. – Вестник Киевского университета. «Астрономия», 1977, вып.19, 68-74.

### Аннотация.

В работе получен полный комплект тензоров и инвариантов, характеризующий электромагнитное излучения, описываемое комплексным тензором Максвелла, через компоненты I. вектора Римана-Зильберштейна.

### Abstract.

A complete set of tensors and invariants which characterize the electromagnetic radiation described by a complex tensor Maxwell through the components of the Riemann-Silberstein vector was obtained