

УДК 530.12; 531.51

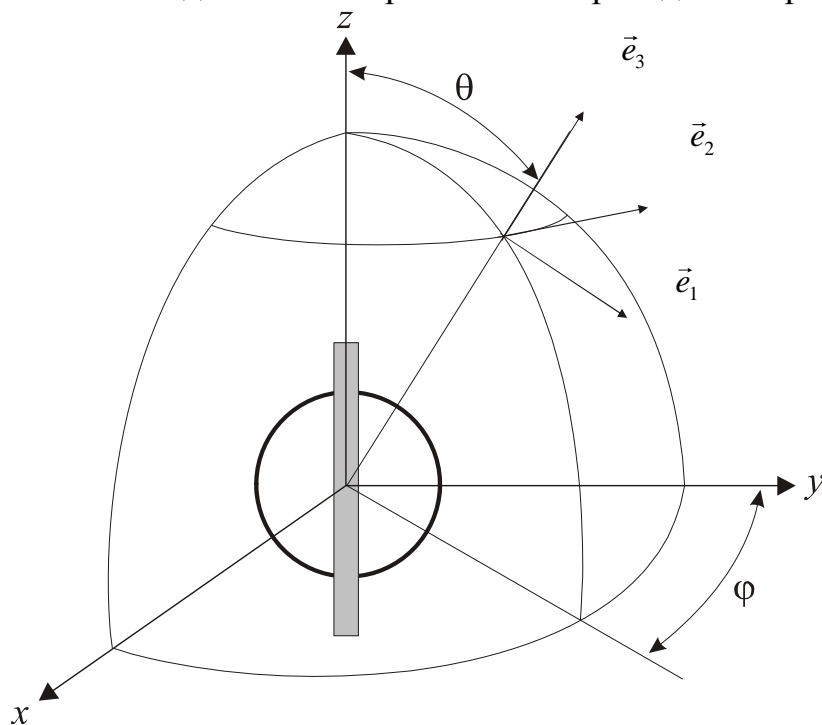
канд. фіз.-мат. наук Ф.Є. Хлистун,  
канд. фіз.-мат. наук С.М. Пономаренко,  
Київський національний університет будівництва і архітектури.

## ДОСЛІДЖЕННЯ ВИПРОМІНЮВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ДИПОЛЯ

*В роботі застосовано повний набір тензорів та інваріантів, запропонований в роботі, опублікованій у випуску за №42 збірника "Містобудування та територіальне планування", для дослідження випромінювання електричного диполя в ближній і дальній зонах.*

Останнім часом підвищився інтерес до дослідження впливу на людину електромагнітного випромінювання від мобільних телефонів оскільки тіло близько розташоване від джерела випромінювання. На таких відстанях (в зоні Френеля) поле випромінювання має складну структуру і тому доцільно для дослідження використати комплект тензорів, отриманих в роботі [1], які повністю характеризують енергетичні властивості будь-яких полів. Оскільки в якості випромінювача в мобільних телефонах використовують як електричний так і магнітну рамку або їх комбінацію, то доцільно дослідити поля випромінювання в кожному з цих випадків. З цією метою ми використаємо розв'язки для електричного і магнітного диполів, наведені в роботі [2] в одній системі позначень і координат, що значно спростить порівняння результатів.

Наведені нижче розв'язки справедливі при таких умовах: електричний



диполь орієнтовано вздовж осі  $Z$  а його довжина  $l \ll \lambda$ ; магнітна рамка радіусом  $a \ll \lambda$  лежить в площині  $YZ$ ;  $\lambda$  – довжина хвилі; початок координат співпадає з центрами рамки і диполя, а кути і ортонормований базис орієнтовано так, як показано на малюнку. Електромагнітне поле розглядають на відстанях, які задовольняють умовам:  $r \gg l$ , та  $r \gg a$ .

Розв'язки для електричного диполя:

$$H_2 \equiv H_\varphi = j \frac{A_e e^{j\psi}}{\rho} \eta \sin \theta; H_1 \equiv H_\theta = 0; H_3 \equiv H_r = 0; E_2 \equiv E_\varphi = 0$$

$$E_1 \equiv E_\theta = jZ_0 \frac{A_e e^{j\psi}}{\rho} (\eta - \rho^{-2}) \sin \theta; E_3 \equiv E_r = Z_0 \frac{2A_e e^{j\psi}}{\rho^2} \eta \cos \theta \quad (1)$$

Розв'язки для магнітного диполя:

$$H_1 \equiv H_\theta = -\frac{A_m e^{j\psi}}{\rho} (\eta - \rho^{-2}) \cos \theta \cos \varphi, H_3 \equiv H_r = 0;$$

$$H_2 \equiv H_\varphi = \frac{A_m e^{j\psi}}{\rho} (\eta - \rho^{-2}) \sin \varphi, E_3 \equiv E_r = 0 \quad (2)$$

$$E_1 \equiv E_\theta = Z_0 \frac{A_m e^{j\psi}}{\rho} \eta \sin \varphi, E_2 \equiv E_\varphi = -Z_0 \frac{A_m e^{j\psi}}{\rho} \eta \cos \theta \cos \varphi$$

В цих формулах використано такі позначення:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}; \omega = \frac{2\pi}{T}; Z_0 = \frac{k}{\omega \epsilon \epsilon_0} = \frac{1}{u \epsilon \epsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\epsilon \epsilon_0}}; \rho = kr; \eta = (1 - j\rho^{-1}) \quad (3)$$

$$A_e = \frac{1}{4\pi} I_e k^2 l; A_m = \frac{1}{4} I_m k^3 a^2 \exp(j\psi_0)$$

де  $I_e; I_m$  – амплітуди струмів, відповідно, в диполі і рамці;  $\psi_0$  – різниця фаз між струмами в диполі і рамці, яку будемо вважати відмінною від нуля тільки у випадку суперпозиції полів диполя і рамки.

Знайдемо вирази для компонент бікомплексного вектора Рімана–Зільберштейна для наведених вище розв'язків:

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{2}} [u D_n + i H_n] = \frac{1}{\sqrt{2}} [u \epsilon \epsilon_0 E_n + i H_n] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{Z_0} E_n + i H_n \right], \quad (4)$$

причому через  ${}_e Z_n$  будемо позначати поле електричного диполя, через  ${}_m Z_n$  – поле магнітної рамки, а через  $Z_n = {}_e Z_n + {}_m Z_n$  позначатимемо суперпозицію цих полів.

Поле електричного диполя:

$${}_e Z_1 = j \frac{A_e e^{j\psi}}{\sqrt{2}\rho} (\eta - \rho^{-2}) \sin \theta; {}_e Z_2 = ij \frac{A_e e^{j\psi}}{\sqrt{2}\rho} \eta \sin \theta; {}_e Z_3 = \frac{\sqrt{2} A_e e^{j\psi}}{\rho^2} \eta \cos \theta. \quad (5)$$

Поле магнітного диполя:

$$\begin{aligned}
{}_m Z_1 &= \frac{A_m e^{j\psi}}{\sqrt{2}\rho} \left[ \eta \sin \varphi - i(\eta - \rho^{-2}) \cos \theta \cos \varphi \right]; \\
{}_m Z_2 &= \frac{A_m e^{j\psi}}{\sqrt{2}\rho} \left[ -\eta \cos \theta \cos \varphi + i(\eta - \rho^{-2}) \sin \varphi \right]; \quad {}_m Z_3 = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

У зв'язку з відміченою в роботі [1] проблемою з інтерпретацією деяких з отриманих інваріантів і тензорів, застосуємо їх для добре вивченого розв'язку випромінювання електричного диполя. Розв'язки для магнітного диполя в формі (6) ми використаємо в наступній роботі, що забезпечить зручність у порівнянні результатів дослідження.

Наведемо вирази для інваріантів поля випромінювання електричного диполя, використовуючи формули (7) з роботи [1].

$$\begin{aligned}
{}_{e_0} l &= \frac{A_e^2}{2\rho^4} \left[ 2(1 + \cos^2 \theta) - \rho^{-2}(1 + 3\cos^2 \theta) - j2\rho^{-1}(1 + 3\cos^2 \theta) \right] e^{2j\psi}; \\
{}_{e_1} l &= \frac{A_e^2}{2\rho^4} \left[ -2 + 6\cos^2 \theta + \rho^{-2}(1 + 3\cos^2 \theta) \right]; \\
{}_{e_2} l &= \frac{A_e^2}{2\rho^2} \left[ -2\sin^2 \theta + \frac{4}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^4}(1 + 3\cos^2 \theta) + \frac{2j}{\rho} \left( 2\sin^2 \theta - \frac{1}{\rho^2}(1 + 3\cos^2 \theta) \right) \right] e^{2j\psi}; \\
{}_{e_3} l &= \frac{A_e^2}{2\rho^2} \left[ 2\sin^2 \theta + 4\rho^{-4} \cos^2 \theta + \rho^{-4}(1 + 3\cos^2 \theta) \right].
\end{aligned} \tag{7}$$

Використовуючи формули (10) з названої роботи порахуємо компоненти, які характеризують потоки енергії в тензорах (9).

$$\begin{aligned}
i_{e_1} \vec{q} &= j \frac{A_e^2}{\rho^3} \left[ \vec{e}_3 \sin^2 \theta - \vec{e}_1 (1 + \rho^{-2}) \sin 2\theta - i\vec{e}_2 \sin 2\theta \right]; \\
{}_1 \vec{P} + j {}_2 \vec{P} &= i {}_{e_2} \vec{q} e^{-2j\psi} = -\frac{A_e^2}{\rho^2} \left[ \vec{e}_3 \eta (\eta - \rho^{-2}) \sin^2 \theta + j\vec{e}_1 \rho^{-1} \eta^2 \sin 2\theta \right]; \\
{}_0 \vec{P} + ij {}_k \vec{P} &= i {}_{e_3} \vec{q} = \frac{A_e^2}{\rho^2} \left[ \vec{e}_3 \sin^2 \theta - ij\vec{e}_2 \rho^{-1} \sin 2\theta \right].
\end{aligned} \tag{8}$$

Використовуючи формули (11), (12) з роботи [1] порахуємо компоненти, які характеризують напруження в тензорах (9).

$$\begin{aligned}
e_2 \sigma^{12} = e_2 \sigma^{23} = 0; \quad e_2 \sigma^{13} &= j \frac{A_e^2 e^{2j\psi}}{\rho^3} \eta (\eta - \rho^{-2}) \sin 2\theta; \\
e_2 \sigma^{11} &= \frac{A_e^2 e^{2j\psi}}{2\rho^4} \left[ (2\eta - \rho^{-2}) \sin^2 \theta - 4\eta^2 \cos^2 \theta \right]; \\
e_2 \sigma^{22} &= \frac{A_e^2 e^{2j\psi}}{2\rho^4} \left[ -(2\eta - \rho^{-2}) \sin^2 \theta - 4\eta^2 \cos^2 \theta \right]; \\
e_2 \sigma^{33} &= \frac{A_e^2 e^{2j\psi}}{2\rho^2} \left[ \left( \eta^2 + (\eta - \rho^{-2})^2 \right) \sin^2 \theta + 4\rho^{-2} \eta^2 \cos^2 \theta \right].
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
e_3 \sigma^{13} &= ij \frac{A_e^2}{\rho^5} \sin^2 \theta; \quad e_3 \sigma^{13} = \frac{A_e^2}{\rho^6} \sin 2\theta; \quad e_3 \sigma^{23} = ij \frac{A_e^2}{\rho^3} (1 + \rho^{-2}) \sin 2\theta; \\
e_3 \sigma^{11} &= \frac{A_e^2}{2\rho^4} \left[ -2(1 + \cos^2 \theta) + \rho^{-2} (1 - 5 \cos^2 \theta) \right]; \\
e_3 \sigma^{22} &= \frac{A_e^2}{2\rho^4} \left[ 2(1 - 3 \cos^2 \theta) + \rho^{-2} (1 + 3 \cos^2 \theta) \right]; \\
e_3 \sigma^{33} &= \frac{A_e^2}{2\rho^2} \left[ -(2 + \rho^{-4}) \sin^2 \theta + 4(1 + \rho^{-2}) \rho^{-2} \cos^2 \theta \right].
\end{aligned} \tag{10}$$

**Дальня хвильова зона.** В цьому випадку в формулах (7)–(10) треба залишити тільки члени з  $\rho^{-2}$ , а решту членів будемо вважати нульовими.

$$\begin{aligned}
e_3 l = \frac{A_e^2}{\rho^2} (1 + \cos^2 \theta); \quad e_2 l = \frac{A_e^2}{\rho^2} \sin^2 \theta; \quad {}_0 \vec{P} = -{}_1 \vec{P} = \vec{e}_3 \frac{A_e^2}{\rho^2} \sin^2 \theta; \\
e_3 \sigma^{13} = -e_2 \sigma^{13} e^{-2j\psi} = \frac{A_e^2}{\rho^6} \sin 2\theta; \quad e_2 \sigma^{33} e^{-2j\psi} = -e_3 \sigma^{33} = \frac{A_e^2}{\rho^2} \sin^2 \theta.
\end{aligned} \tag{11}$$

Порівнюючи ці вирази з відповідними формулами з роботи [1] для випромінювання з нульовими інваріантами (дивись (11), (14)) бачимо, що розподіл густини енергії відповідає значенню  $k = \cos \theta$ , а відсутність кругової поляризації забезпечить кут  $\alpha = 0$ . При цих значеннях параметрів нульового випромінювання ми отримаємо правильні значення  ${}_1 \vec{P}$ ;  ${}_2 \sigma^{33}$  тоді як решта виразів не співпадає. Але ж отримані в (11) формули правильно описують потоки і просторовий розподіл енергії дипольного випромінювача, отриманий експериментально. Більше того вони дають розподіл напруженостей, які виникають в середовищі, і які потребують експериментальної перевірки.

**Ближня хвильова зона.** В цьому випадку в формулах (7)–(10) треба залишити тільки члени з  $\rho^{-6}$ , а решту членів будемо вважати нульовими.

$$\begin{aligned}
 {}_{e_3}l &= {}_{e_1}l = - {}_{e_2}le^{-2j\psi} = - {}_{e_0}le^{-2j\psi} = \frac{A_e^2}{2\rho^6}(1+3\cos^2\theta); \\
 {}_{e_3}\sigma^{11} &= {}_{e_2}\sigma^{22}e^{-2j\psi} = \frac{A_e^2}{2\rho^6}(1-5\cos^2\theta); \\
 {}_{e_3}\sigma^{22} &= {}_{e_2}\sigma^{33}e^{-2j\psi} = - {}_{e_2}\sigma^{11}e^{-2j\psi} = \frac{A_e^2}{2\rho^6}(1+3\cos^2\theta); \\
 {}_{e_3}\sigma^{13} &= - {}_{e_2}\sigma^{13}e^{-2j\psi} = \frac{A_e^2}{\rho^6}\sin 2\theta; \quad {}_{e_3}\sigma^{33} = -\frac{A_e^2}{2\rho^6}\sin^2\theta.
 \end{aligned}
 \tag{12}.$$

Ці формули теж правильно описують розподіл енергії в ближній зоні, але містять і додаткову інформацію яка потребує перевірки.

**ПРОМІЖНА ХВИЛЬОВА ЗОНА.** Більшість користувачів стільникового зв'язку в Україні мають мобільні телефони, які працюють на частотах близьких 1800 МГц, яким відповідає довжина хвилі приблизно 17см. Якщо розмір випромінюючої антени телефону вважати рівною 1см, то наведені вище розв'язки справедливі при  $r \geq 10$  см, тобто в наших формулах  $\rho = \frac{2\pi r}{\lambda} \geq 3,7$ . В тілі людини довжина хвилі зменшується приблизно на 60% внаслідок чого  $\rho \geq 6$ . Тому на цих відстанях відкидати якісь члени недоцільно бо для вивчення впливу випромінювання мобільних телефонів важлива повна інформація про розподіл у просторі густини енергії і напружень, які викликає випромінювання.

**Висновок.** Повний набір інваріантів та тензорів які характеризують електромагнітні поля є потужним інструментом в дослідженні поширення електромагнітних хвиль в середовищі. За допомогою математичного формалізму, розвиненого в роботі, з'являється зручна можливість досліджувати вплив електромагнітного випромінювання на організм людини, зокрема, вплив випромінювання антен стільникових телефонів на органи черепної коробки.

### Список літератури.

1. Ф.Є. Хлыстун. Повний набір тензорів та інваріантів для комплексного тензора Максвелла з використанням бікомплексного вектора Рімана–Зільберштейна. – Містобудування та територіальне планування. Київ КНУБА 2011, вип.42.
2. Ф.Е. Хлыстун. Тензоры и параметры поляризации электромагнитного излучения. – Вестник Киевского университета. «Астрономия», 1977, вып. 19, 68–74.

**Аннотація.**

Полный комплект тензоров и инвариантов, изложенный в работе: *Ф.Є. Хлисту́н. Повний набір тензорів та інваріантів для комплексного тензора Максвелла з використанням бікомплексного вектора Рімана–Зільберштейна. – Містобудування та територіальне планування. Київ КНУБА 2011, вип.42.,* применен для исследования электромагнитного излучения электрического диполя в ближней и дальней волновых зонах.

**Abstract.**

A complete set of tensors and invariants described in : *Ф.Є. Хлисту́н. Повний набір тензорів та інваріантів для комплексного тензора Максвелла з використанням бікомплексного вектора Рімана–Зільберштейна. – Містобудування та територіальне планування. Київ КНУБА 2011, вип.42.,* is used to study the electromagnetic radiation of an electric dipole in the near and far wave zones.