

УДК 539.3

д.т.н., професор Чибіряков В.К.,
к.т.н., доцент Станкевич А.М., Левківський Д.В.,
Київський національний університет будівництва та архітектури

НЕСТАЦІОНАРНА ДИНАМІКА ТОВСТОЇ ПЛАСТИНИ

В будівельній галузі часто зустрічаються конструкції, при розрахунку яких необхідно використовувати розрахункову модель - товсту пластину, яка має співрозмірними три габаритних розміри. Це, наприклад, плити перекриття, плити покриття, підпирні стінки, конструкції дорожнього одягу, що навантажені інтенсивним транспортним рухом, здебільшого локальної дії. Існує багато різноманітних підходів до розв'язання задач, що при цьому виникають, але вони часто використовують спрощені моделі, побудовані на гіпотезах, що не досить точно відтворюють НДС конструкцій. Метою даної роботи є підвищення точності дослідження роботи згаданих конструкцій під динамічними впливами.

Розглядається циліндричне тіло довжиною L , товщиною h та шириною b , яке навантажене динамічним навантаженням $q(x, z, t)$.

Для спрощення досліджується випадок, коли навантаження стало по одній координаті, в даному випадку z (рис. 1).

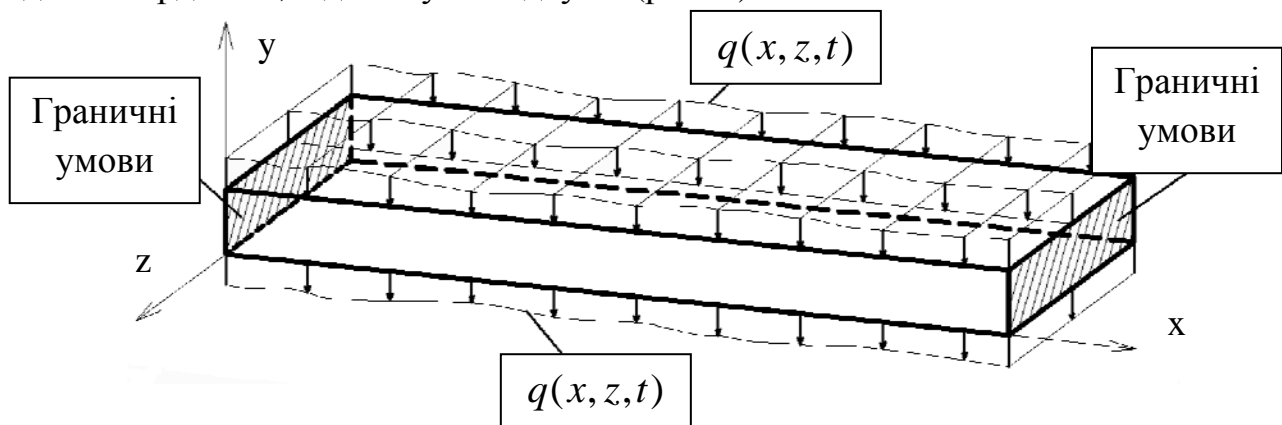


Рис. 1 Товста пластина

Завдяки переносній симетрії геометрії тіла та навантаження по координаті z , тривимірну задачу можна звести до двовимірної моделі – плоскої задачі динамічної теорії пружності (рис. 2). Ставиться задача про дослідження зміни в часі напружено – деформованого стану пластини при дії динамічного навантаження $q(x, t)$.

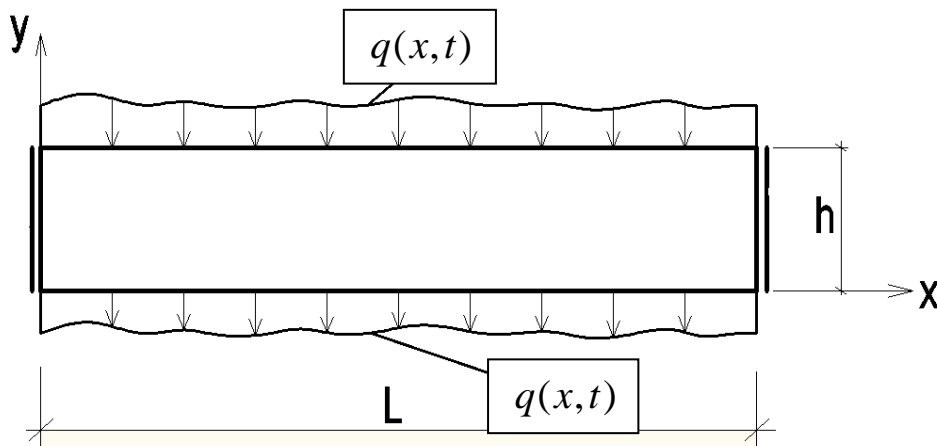


Рис. 2 Двовимірна модель

Даний процес можна описати диференціальними рівняннями (1).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X(x, y, t) &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y(x, y, t) &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

Тут

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_y &= \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

де λ , μ - коефіцієнти Ляме;

Невідомі компоненти вектора переміщень u, v та компоненти вектора напружень σ_x , τ_{xy} , σ_y повинні задовольняти граничним умовам на граничних площинах ($x = 0$, $x = l$, $y = 0$, $y = h$) та початковим умовам.

Граничні умови на граничних площинах запишемо в найбільш загальній формі, вважаючи, що кожна точка граничної поверхні з'єднана з відповідною точкою оточуючого середовища пружними в'язями заданої жорсткості в напрямку компонентів вектора переміщень (рис. 3-6). Це призводить до граничних умов вигляду:

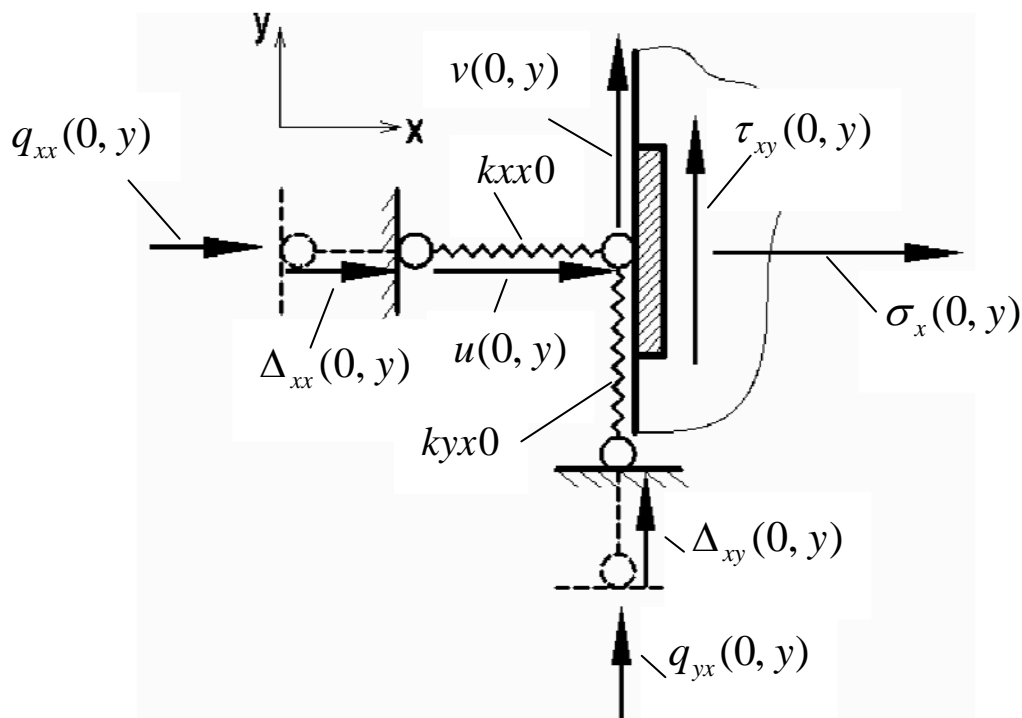


Рис. 3 Модельні закріплення точок площини $x = 0$

При $x = 0$:

$$\begin{cases} k_{xx0} \cdot u(0, y) - \sigma_x(0, y) = k_{xx0} \cdot \Delta_{xx}(0, y) + q_{xx}(0, y) \\ k_{yx0} \cdot v(0, y) - \tau_{xy}(0, y) = k_{yx0} \cdot \Delta_{yx}(0, y) + q_{yx}(0, y) \end{cases} \quad (3)$$

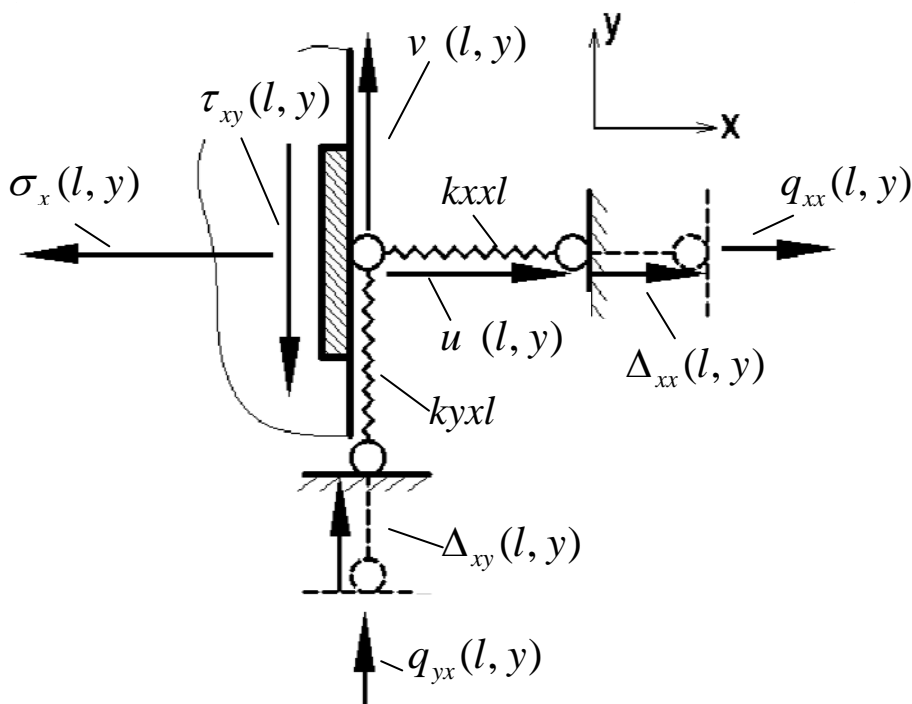


Рис. 4 Модельні закріплення точок площини $x = l$

При $x = l$:

$$\begin{cases} k_{xxl} \cdot u(l, y) + \sigma_x(l, y) = k_{xxl} \cdot \Delta_{xx}(l, y) + q_{xx}(l, y) \\ k_{yxl} \cdot v(l, y) + \tau_{xy}(l, y) = k_{yxl} \cdot \Delta_{yx}(l, y) + q_{yx}(l, y) \end{cases} \quad (4)$$

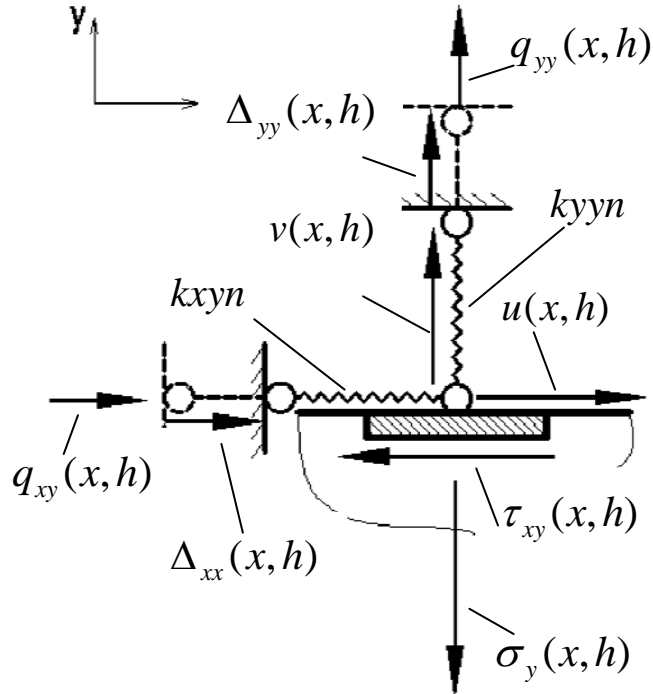


Рис. 5 Модельні закріплення точок площини $y = h$

При $y = h$:

$$\begin{cases} \sigma_y(x, h) = -k_{yyn} \cdot (v(x, h) - \Delta_{yy}(x, h)) + q_{yy}(x, h) \\ \tau_{xy}(x, h) = -k_{xyn} \cdot (u(x, h) - \Delta_{xy}(x, h)) + q_{xy}(x, h) \end{cases} \quad (5)$$

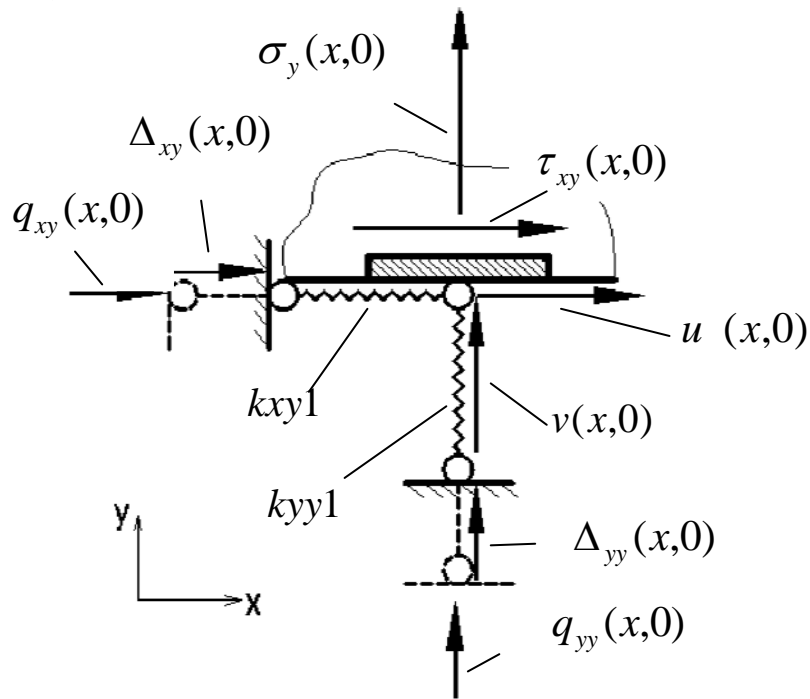


Рис. 6 Модельні закріплення точок площини $y = 0$

При $y = 0$:

$$\begin{cases} \sigma_y(x,0) = -k_{yy1} \cdot (v(x,0) - \Delta_{yy}(x,0)) - q_{yy}(x,0) \\ \tau_{xy}(x,0) = k_{xy1} \cdot (u(x,0) - \Delta_{xy}(x,0)) - q_{xy}(x,0) \end{cases} \quad (6)$$

Варіювання значеннями жорсткостей k дозволяє розглядати стандартні варіанти граничних умов на граничних площинах.

Початкові умови мають вигляд:

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= u_0(x, y) \\ v(x, y, 0) &= v_0(x, y) \\ \dot{u}(x, y, 0) &= u_{s0}(x, y) \\ \dot{v}(x, y, 0) &= v_{s0}(x, y) \end{aligned} \quad (7)$$

Одним з найбільш ефективних методів спрощення задач будівельної механіки є зниження вимірності вихідних рівнянь (1), (2). Для цього застосовується метод прямих. Пластина розбивається по висоті на $(n - 1)$ шарів за допомогою n прямих та по поперечній координаті обираються базисні кусково-лінійні фінітні функції $\varphi_i(y)$ (рис. 7).

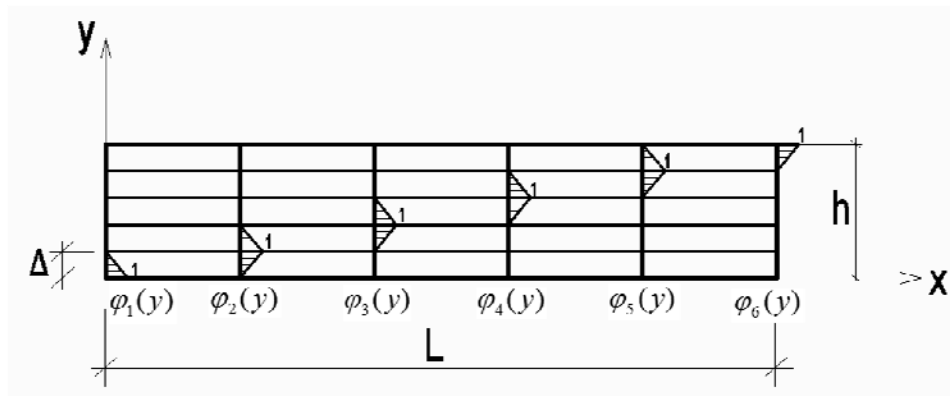


Рис. 7 Базисні кусково-лінійні фінітні функції $\varphi_i(y)$

Невідомі функції, що входять до рівнянь (1), (2) будемо шукати наближено у вигляді $f(x, y) \approx f^j(x) \cdot \varphi_j(y)$. Тут і надалі використовується формалістика індексних позначень, зазначених у роботі [1]. Вихідні рівняння (1), (2) послідовно множаться на базисні функції та інтегруються по поперечні координаті. В результаті дій, що докладно описані в [1] отримаємо систему одновимірних по просторовій координаті рівнянь, до яких входять як коваріантні так і контраваріантні компоненти шуканих функцій. Виключаючи з рівнянь (8) коефіцієнти напружень за допомогою співвідношень (9) отримаємо рівняння (10), в яких невідомі – контраваріантні компоненти (коефіцієнти) переміщень.

$$\rho \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_x^\alpha}{\partial x} + g^{ai} \cdot [\tau_{xy} \cdot \varphi_i(y) \Big|_0^h] - g^{ai} \cdot b_{ji} \cdot \tau_{xy}^j + X^\alpha$$

$$\rho \frac{\partial^2 v^{*\alpha}}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{xy}^\alpha}{\partial x} + g^{ai} \cdot [\sigma_y \cdot \varphi_i(y) \Big|_0^h] - g^{ai} \cdot b_{ji} \cdot \sigma_y^j + Y^\alpha$$
(8)

$$\tau_{xy}^\alpha = \frac{dv^{*\alpha}}{dx} + g^{ai} b_{ij} v^{*j}$$

$$\sigma_x^\alpha = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{du^{*\alpha}}{dx} + g^{ai} b_{ij} u^{*j}$$

$$\sigma_y^\alpha = \frac{\lambda}{\mu} \frac{du^{*\alpha}}{dx} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} g^{ai} b_{ij} v^{*j}$$
(9)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u^{*\alpha}}{dt^2} &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \cdot \frac{d^2 u^{*\alpha}}{dx^2} + \left(\frac{\lambda}{\rho} g^{ai} b_{ij} - \frac{\mu}{\rho} g^{ai} b_{ji} \right) \frac{dv^{*j}}{dx} - \\ &\frac{\mu}{\rho} g^{ai} b_{ji} g^{jk} b_{k\gamma} u^{*\gamma} + \frac{\mu}{\rho} g^{ai} \tau_{xy} \cdot \varphi_i(y) \Big|_0^h + \frac{\mu}{\rho} X^\alpha \\ \frac{d^2 v^{*\alpha}}{dt^2} &= \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{d^2 v^{*\alpha}}{dx^2} + \left(\frac{\mu}{\rho} g^{ai} b_{ij} - \frac{\lambda}{\rho} g^{ai} b_{ji} \right) \frac{du^{*j}}{dx} - \\ &- \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} g^{ai} b_{ji} g^{jk} b_{k\gamma} v^{*\gamma} + \frac{\mu}{\rho} g^{ai} \sigma_y \cdot \varphi_i(y) \Big|_0^h + \frac{\mu}{\rho} Y^\alpha \end{aligned} \quad (10)$$

де $g_{ij} = (\varphi_i(y), \varphi_j(y))$ - коваріантний метричний тензор;

$g^{ij} = (\varphi^i(y), \varphi^j(y))$ - контраваріантний метричний тензор;

$\delta_i^j = (\varphi_i(y), \varphi^j(y))$ - змішаний метричний тензор;

$b_{ij} = (\varphi_i(y), \varphi_j'(y))$ - скалярний добуток функції $\varphi_i(y)$ на її похідну;

$u^* = u \cdot \mu$, $v^* = v \cdot \mu$.

Для постановки початково-граничної задачі необхідно визначити граничні та початкові умови для невідомих вектор-функцій. Граничні умови для одновимірної по просторовій координаті задачі (10) впливають з граничних умов вихідної двовимірної задачі (1), (2). На (рис. 3-6) наведено варіант закріплення точок граничних площин ($x = 0$, $x = l$, $y = 0$, $y = h$) пластини, з яких варіюванням жорсткостями пружних в'язей можна отримати всі стандартні варіанти закріплень. Граничні умови, що відповідають цим закріпленням, мають вигляд:

При $x = 0$:

$$\begin{cases} k_{xx0} \cdot u^i(0) - \sigma_x^i(0) = k_{xx0} \cdot \Delta_{xx}^i(0) + q_{xx}^i(0) \\ k_{yx0} \cdot v^i(0) - \tau_{xy}^i(0) = k_{yx0} \cdot \Delta_{yx}^i(0) + q_{yx}^i(0) \end{cases} \quad (11)$$

При $x = l$:

$$\begin{cases} k_{xxl} \cdot u^i(l) + \sigma_x^i(l) = k_{xxl} \cdot \Delta_{xx}^i(l) + q_{xx}^i(l) \\ k_{yxl} \cdot v^i(l) + \tau_{xy}^i(l) = k_{yxl} \cdot \Delta_{yx}^i(l) + q_{yx}^i(l) \end{cases} \quad (12)$$

При $y = h$:

$$\begin{cases} \sigma_y^n = -k_{yyn} \cdot \left(\frac{1}{\mu} v^{*n} - \Delta_{yy}^n \right) + q_{yy}^n \\ \tau_{xy}^n = -k_{xyn} \cdot \left(\frac{1}{\mu} u^{*n} - \Delta_{xy}^n \right) + q_{xy}^n \end{cases} \quad (13)$$

При $y = 0$:

$$\begin{cases} \sigma_y^1 = -k_{yy} \cdot \left(\frac{1}{\mu} v^{*1} - \Delta_{yy}^1 \right) - q_{yy}^1 \\ \tau_{xy}^1 = k_{xy} \cdot \left(\frac{1}{\mu} u^{*1} - \Delta_{xy}^1 \right) - q_{xy}^1 \end{cases} \quad (14)$$

Редукуючи (7), як зазначено вище, отримуємо необхідні початкові умови:

$$\begin{aligned} u^i(x, 0) &= u_0^i(x) \\ v^i(x, 0) &= v_0^i(x) \\ \dot{u}^i(x, 0) &= \dot{u}_{s_0}^i(x) \\ \dot{v}^i(x, 0) &= \dot{v}_{s_0}^i(x) \end{aligned} \quad (15)$$

Початково-граничну задачу (10-15) пропонується розв'язувати за допомогою метода скінченних різниць, використовуючи явну різницеву схему типу «хрест» (рис. 8).

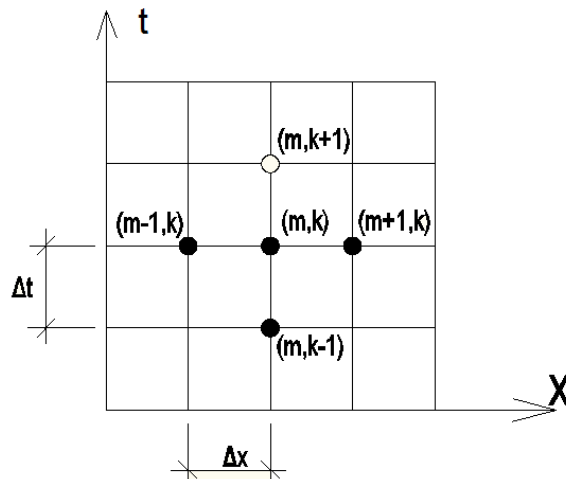


Рис. 8 Шаблон явної різницевої схеми типу «хрест»

$$\begin{aligned} \text{У якій } \frac{d^2 u^{*\alpha}}{dt^2} \Big|_{(m,k)} &= \frac{u^{*\alpha}(m, k+1) - 2u^{*\alpha}(m, k) + u^{*\alpha}(m, k-1)}{(\Delta t)^2} \\ \frac{d^2 u^{*\alpha}}{dx^2} \Big|_{(m,k)} &= \frac{u^{*\alpha}(m+1, k) - 2u^{*\alpha}(m, k) + u^{*\alpha}(m-1, k)}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

В результаті отримуємо редуковані співвідношення:

$$\begin{aligned}
u^*(\alpha, m, k+1) = & \left[2\left(1 - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \cdot \delta_{\gamma}^{\alpha} - \Delta t^2 \frac{\mu}{\rho} g^{ai} b_{ji} g^{jk} b_{k\gamma} \right) \cdot \right. \\
& \cdot u^*(\gamma, m, k) + \left(\frac{\lambda}{\rho} g^{ai} b_{ij} - \frac{\mu}{\rho} g^{ai} b_{ji} \right) \frac{\Delta t^2}{2\Delta x} \cdot (v^*(j, m+1, k) - \\
& \left. - v^*(j, m+1, k)) + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} (u^*(\alpha, m+1, k) + u^*(\alpha, m-1, k)) - \right. \\
& \left. - u^*(\alpha, m, k) + \frac{\mu}{\rho} \Delta t^2 g^{ai} \tau_{xy}(x, y) \cdot \varphi_i(y) \Big|_0^h + \frac{\mu}{\rho} \Delta t^2 X(\alpha, m, k) \right]
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
v^*(\alpha, m, k+1) = & \left[2\left(1 - \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \cdot \delta_{\gamma}^{\alpha} - \Delta t^2 \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} g^{ai} b_{ji} g^{jk} b_{k\gamma} \right) \cdot \right. \\
& \cdot v^*(\gamma, m, k) + \left(\frac{\mu}{\rho} g^{ai} b_{ij} - \frac{\lambda}{\rho} g^{ai} b_{ji} \right) \frac{\Delta t^2}{2\Delta x} \cdot (u^*(j, m+1, k) - \\
& \left. - u^*(j, m+1, k)) + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{\mu}{\rho} (v^*(\alpha, m+1, k) + v^*(\alpha, m-1, k)) - \right. \\
& \left. - v^*(\alpha, m, k) + \frac{\mu}{\rho} \Delta t^2 g^{ai} \sigma_y(x, y) \cdot \varphi_i(y) \Big|_0^h + \frac{\mu}{\rho} \Delta t^2 Y(\alpha, m, k) \right]
\end{aligned} \tag{17}$$

Для знаходження переміщень в крайніх точках скористаємось рівняннями (11) та (12) по просторовій координаті за допомогою співвідношень (18) перетворюються на алгебраїчні рівняння.

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx} \Big|_{(1,k)} & \approx \frac{u(2,k) - u(1,k)}{\Delta x}, \\
\frac{dv}{dx} \Big|_{(1,k)} & \approx \frac{v(2,k) - v(1,k)}{\Delta x} \\
\frac{dv}{dx} \Big|_{(mk,k)} & = \frac{v(mk,k) - v(mk-1,k)}{\Delta x}, \\
\frac{du}{dx} \Big|_{(mk,k)} & = \frac{u(mk,k) - u(mk-1,k)}{\Delta x}
\end{aligned} \tag{18}$$

Запропонована чисельна методика для наближеного розв'язання початково-граничної задачі (1) – (17) реалізована у вигляді програми для ПОЕМ, написаної алгоритмічною мовою FORTRAN.

Для тестування розробленої програми та порівняння з результатами, отриманими по альтернативній методиці, розроблено алгоритм розрахунку динаміки тонкої пластини при циліндричному згині, рівняння якої при поперечних переміщеннях співпадають з відповідними рівняннями балки, якщо жорсткість балки EI замінити циліндричною жорсткістю пластини D .

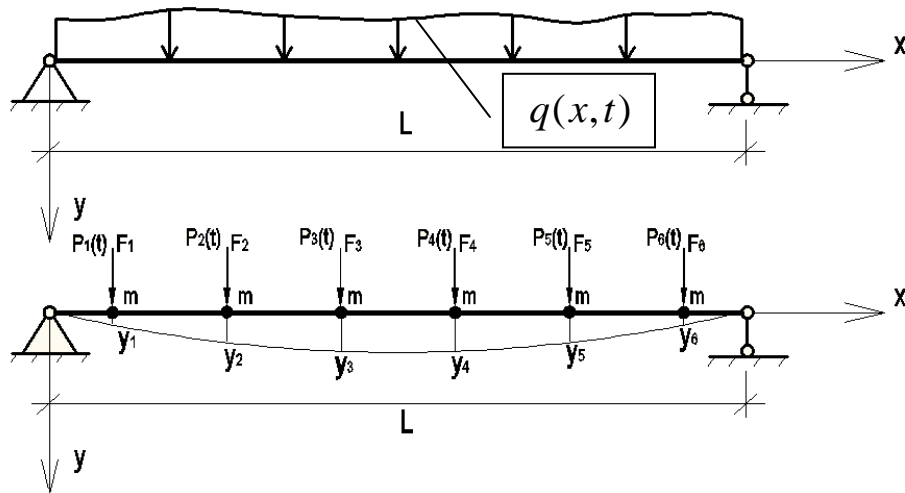


Рис.9 Розрахункова спрощена модель пластини

Зведена балка (рис. 9) розбивається на n ділянок, в центри яких зосереджуються маси, що дорівнюють $m = h \cdot \rho \cdot \frac{L}{n}$. Кожна маса при циліндричному згині має один степінь вільності y_i , якому відповідає сила інерції $F_i = -m\ddot{y}_i$. Для цього з попереднього розрахунку формується матриця впливу Π . На кожному масу діє зовнішня сила $P_i(t)$. Статичним розрахунком визначаються елементи матриці впливу $\Pi = \{\delta_{ij}\}$, де δ_{ij} - переміщення від дії j -ї сили в напрямку i -ї сили.

Динамічний стан такої балки описується системою звичайних диференціальних рівнянь, які в матричній формі мають вигляд (19).

Диференціальні рівняння матимуть вигляд:

$$\Pi T \frac{d^2 \vec{Y}}{dt^2} + \vec{Y} = B_p \vec{P}(t) \quad (19)$$

Π - матриця піддатливості, T - матриця мас, \vec{Y} - вектор вертикальних переміщень, $\vec{P}(t)$ - вектор зосереджених сил.

Єдиний розв'язок рівнянь (19) забезпечується початковими умовами при $t = 0$: $\vec{Y}(0) = \vec{Y}_0$, $\dot{\vec{Y}}(0) = \vec{V}_0$.

Система рівнянь (19) зводиться до симетричного вигляду за допомогою перетворень (20).

$$\sqrt{T} \cdot \Pi \cdot \sqrt{T} \cdot \sqrt{T} \cdot \frac{d^2 \vec{Y}}{dt^2} + \sqrt{T} \cdot \vec{Y} = \sqrt{T} \cdot B_p \cdot \vec{P}(t) \quad (20)$$

Заміна: $\sqrt{T} \cdot \Pi \cdot \sqrt{T} = \Pi^*$, $\sqrt{T} \cdot \vec{Y} = \vec{Y}^*$, $(\sqrt{T})^{-1} \cdot \vec{P}(t) = \vec{P}^*(t)$, оскільки зовнішні сили прикладені в центри зосередження мас, то матриця $B_p = \Pi$.

Остаточно рівняння (20) запишемо у вигляді (21)

$$\begin{cases} \frac{d\vec{Y}^*}{dt} = \vec{V}^* \\ \frac{d\vec{V}^*}{dt} = -(\Pi^*)^{-1} \cdot \vec{Y}^* + E \cdot \vec{P}^*(t) \end{cases} \quad (21)$$

Для чисельної реалізації систему диференціальних рівнянь (21) розв'язуємо методом Рунге-Кутта (варіант Мерсона).

Для тестування розробленої методики за допомогою порівняння з результатами, отриманими по іншій методиці, розглянута досить тонка пластина $\frac{h}{L} = \frac{1}{10}$.

$$\frac{h}{L} = \frac{1}{10}$$

Досліджувалась пластина довжиною 2 м, товщиною 0,2 м, навантажена розподіленим динамічним навантаженням $q = 20$ кг, $\rho = 2,5$ кг/м³, $\nu = 0,3$, $E = 2,4 \cdot 10^6$ кг/м².

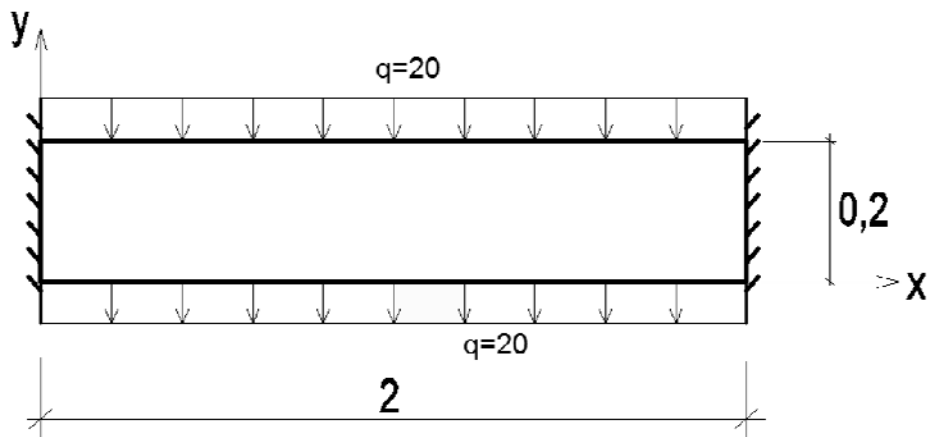


Рис. 10 Розрахункова модель (плоска задача динамічної теорії пружності)

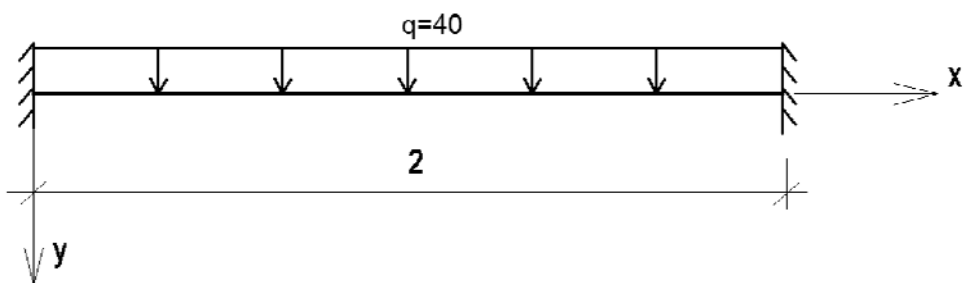


Рис. 11 Розрахункова модель (циліндричний згин)

Початкові переміщення і швидкості дорівнюють нулю, крок $\Delta t = 10^{-8}$ с. Розподілене навантаження діє впродовж періоду від $t = 0$ до $t = 0,01$.

Вертикальні коливання точки, що має координати $x = 1$, $y = 0,1$ показані на (рис. 12).

Коливання пластини

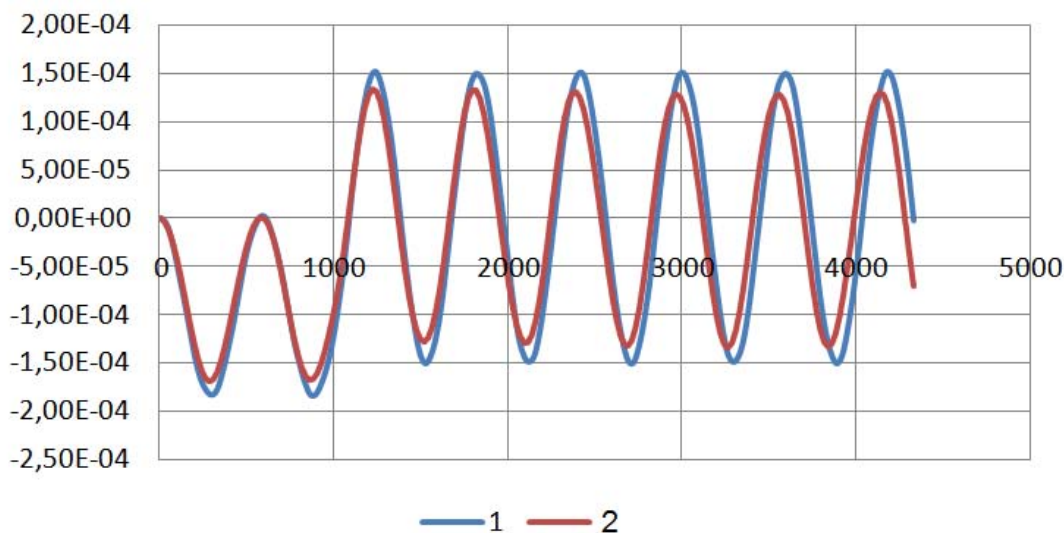


Рис. 12 Вертикальні коливання пластини

1 – циліндричний згин

2 – плоска задача динамічної теорії пружності
(за розробленою методикою)

Література:

1. Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т., Левківський Д.В. До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 36 – К.: КНУБА, 2010 – с. 413 – 423.
2. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений// Успехи математических наук. – 1961. – т.16 – вып.3. – с.171 - 174.
3. Чибіряков В.К., Смоляр А.М. Теорія товстих пластин та оболонок: Монографія. – Черкаси: ЧДТУ, 2002. – 160 с: іл.
4. Жемочкин Б.Н. Теория упругости. – 2-е изд., перераб. – М – 1957, 250 с.
5. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач// Перевод со второго английского издания – М: 1972 – с 380.
6. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле// перевод с английского Корнейчука Л.Г. – М: «Машиностроение» 1985, 470 с.

Аннотация

В строительной отрасли очень часто встречаются конструкции, при расчете которых можно использовать расчетную модель - толстую пластину,

которая имеет соизмеримы три габаритных размера, например, плита перекрытия, плита покрытия, подпорные стенки, конструкция дорожной одежды, постоянно нагруженная интенсивным транспортным движением, в основном локального действия. Существует много различных подходов к решению данных задач, но они часто используют модели, построенные на гипотезах, какие не достаточно точно воспроизводят НДС конструкций. Главной целью данной работы является повышение точности исследования работы конструкции под динамическими воздействиями.

Abstract

In the construction industry is very common design in the calculation that you can use the estimated model - thick plate that has three of proportionate dimensions, for example, slab floors, stove cover, retaining walls, construction of pavement that is constantly loaded with heavy vehicular traffic, mostly local actions. There are many different approaches to solving data problems, but they often use models based on hypotheses that do not accurately reflect the VAT structure. The main purpose of this paper is to improve the accuracy of the research design under dynamic influences.