УДК 528.48/517.9

д.т.н., проф., В. К. Чибіряков,
к.т.н., проф., В. С. Старовєров, З. М. Кравченко,
Київський національний університет будівництва і архітектури

МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЕЛЕМЕНТАРНИХ КОНСТРУКЦІЙ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

Розглянуто математичну основу вирішення задачі згину балки на пружній основі, а також застосування цієї математичної основи для моделювання різних об'єктів інженерного середовища (фундаментів, огороджувальних конструкцій, висотних споруд).

Постановка проблеми. Розглянемо методику розв'язання задачі деформування конструктивних елементів під дією навантаження. Ця задача розв'язується з застосуванням диференціальних рівнянь. Саме диференціальні рівняння дають математичну можливість описати фізичні (природні) явища певного об'єкта чи середовища та проаналізувати характер їх зміни. Математична основа визначення напружено-деформованого стану конструктивних елементів інженерного середовища базується на розв'язанні граничних задач диференціальних рівнянь, що встановлюють зв'язки між навантаженням та деформаціями досліджуваного об'єкта.

Аналіз останніх досліджень. Задача визначення напружено-де формованого стану елементарних конструктивних елементів інженерного середовища є досить вивченою. Це дозволяє нам при розв'язанні подібних задач застосовувати ті підходи та методи, що перевірені науковим досвідом.

Мета статті. Метою статті є визначення напружено деформованого стану елементарного конструктивного елементу інженерного середовища, що взаємодіє з ґрунтовою основою. Отримані величини деформацій об'єкта спостережень, дадуть змогу оцінити та обґрунтувати точність виконання геодезичних робіт за різних умов моделювання навантаження та фізико-механічних властивостей ґрунтової основи.

Викладення основного матеріалу. Перед тим, як почати розв'язувати певну інженерно-технічну задачу, необхідно визначитись з об'єктом дослідження. Наступним кроком є побудова фізичної моделі об'єкта дослідження, що обумовлена різними гіпотезами щодо ідеалізації та спрощення фізичних та геометричних параметрів конструктивного елемента. Гіпотези про матеріал об'єкта описуються теорією пружних, пластичних і т.п. деформацій. Також застосовуються гіпотези, що передбачають вплив дії зовнішніх факторів, а саме: силові навантаження; температурний, динамічний та сейсмічний вплив. І, зрештою, гіпотези, що характеризують взаємодію об'єкта дослідження з навколишнім середовищем – як оточуюче середовище обмежує переміщення об'єкта в просторі (граничні умови).

На основі фізичної моделі будується математична модель конструктивного елемента. В механіці є три напрямки моделювання об'єктів та явищ, що мають основою:

1. Диференційні рівняння.
2. Інтегральні рівняння.
3. Варіаційну постановку задачі.

Пропонується використовувати саме диференціальні рівняння. На наш час розроблено наближені методи розв'язання: метод скінчених елементів (варіаційний підхід); метод скінчених різниць; варіаційно-різницевий метод; метод граничних інтегральних рівнянь. Ці методи лежать в основі програмних комплексів. Для того щоб спростити обчислення, бажано звести задачу до одновимірної моделі, яка описуватиметься звичайними диференційними рівняннями. У випадку розв'язання динамічних задач – зведенням до двовимірних моделей. Але деякі звичайні диференційні рівняння досить важко розв'язуються, тому зведення диференційних рівнянь до більш простих, для яких побудовано теорію розв'язання, залишається актуальним завданням. До таких рівнянь відносяться лінійні диференційні рівняння. Подібна лінійність досягається за рахунок певних гіпотез: відносні деформації є дуже малими; переміщення досить незначні в порівнянні з габаритами об'єкта (стержні, плити та оболонки). Характерною рисою цих конструктивних елементів є те, що деформації можуть бути малими, а переміщення значними. Будь яке лінійне звичайне диференційне рівняння можна звести до системи звичайних диференційних рівнянь першого порядку (в формі Коші).

Запишемо диференційне рівняння згину балки:

$$EJ\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)=q \qquad (1)$$

Форма Коші матиме наступний вигляд:

$$\frac{d\vec{Y}}{dx}=A(x)\vec{Y}+\vec{F} \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix}\omega\\ \varphi\\ Q\\ M\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\ 0&0&0&-\frac{1}{EJ}\\ 0&0&0&0\\ 0&0&1&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}\omega\\ \varphi\\ Q\\ M\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -q\\ 0\end{bmatrix} \qquad (3)$$

Загальний розв'язок такого рівняння (5) складається з двох етапів: спочатку будується загальний розв'язок однорідного рівняння (або системи рівнянь) (4), а потім одного часткового розв'язку неоднорідного рівняння. Рівняння (4) є загальним розв'язком, тобто лінійною комбінацією елементів фундаментальної системи розв'язків (базису лінійного простору часткових розв'язків однорідного рівняння).

$$\overrightarrow{Y_{одн}} = C_1\vec{Y}_1(x) + C_2\vec{Y}_2(x) + \ldots + C_n\vec{Y}_n(x) \tag{4}$$

$$\vec{Y}(x) = C_1\vec{Y}_1(x) + C_2\vec{Y}_2(x) + \ldots + C_n\vec{Y}_n(x) + \overrightarrow{Y_{ч.н.}} \tag{5}$$

Задачі Коші вирішуються за допомогою методів чисельного інтегрування. Під час процесу чисельного інтегрування відбувається втрата чисельної стійкості (накопичення похибок округлення). У нашому випадку використовується метод Рунге-Кутти-Мерсона четвертого порядку точності, що має ряд переваг. Для того, щоб уникнути втрати стійкості, С. К. Годунов запропонував метод дискретної ортогоналізації. Ця методика полягає в ортогоналізації лінійно-незалежної системи векторів в певних точках (точках ортогоналізації) за Грамом-Шмідтом.

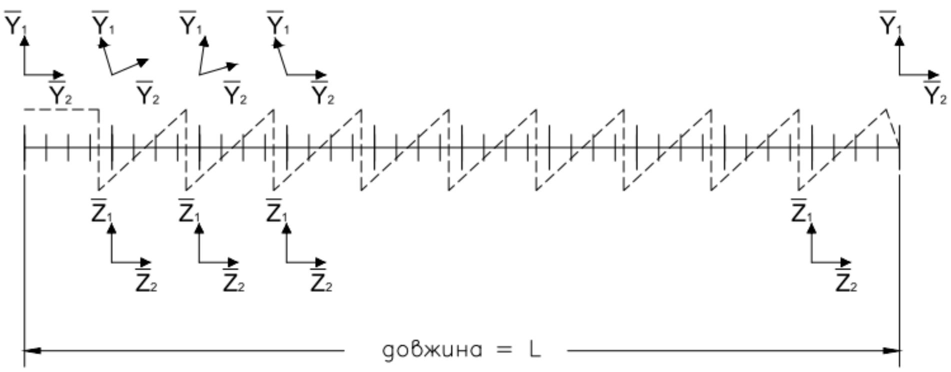

Рисунок 1 – Дискретна ортогоналізація

Запишемо рівняння балки на пружній основі (6). А потім у формі Коші (7).

$$EJ\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) = q^0(x) - kw \tag{6}$$

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix}\omega\\ \varphi\\ Q\\ M\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{EJ}\\ -k & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\omega\\ \varphi\\ Q\\ M\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ -q^0\\ 0\end{bmatrix} \tag{7}$$

Рівняння (6) дає змогу проаналізувати сумісну роботу балки та ґрунтової основи. Алгоритм розв'язання цієї задачі має вищезгадану послідовність.

З'ясуємо, які ж саме об'єкти інженерного середовища можуть бути змодельовані за допомогою одновимірної математичної моделі балки (рівняння

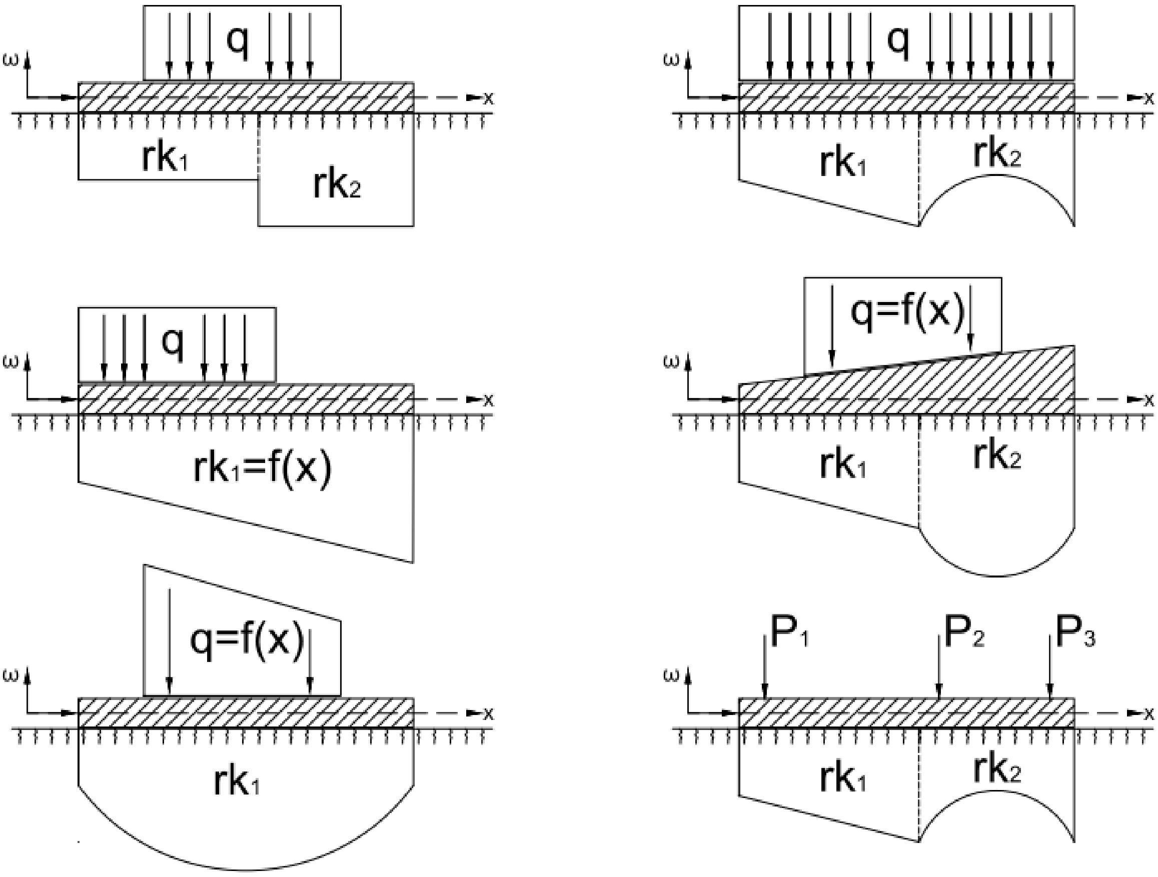

Рисунок 2 – Різні випадки моделювання

має одну змінну величину x Насамперед стрічкові фундаменти; підпірні стінки котлованів (в постановці плоскої задачі теорії пружно-циліндричного згину); протяжних земляних об'єктів; також є можливість замінити висотну споруду моделлю балки змінної товщини, що защемлена знизу. за допомогою додаткових підпрограм можна змоделювати різні умови навантаження (зосереджене чи розподілене); змоделювати фізичні параметри балки (змінна товщина (рис.2)).

Проаналізуємо, які саме моделі ґрунтової основи можна застосувати при наближеному моделюванні взаємної роботи балки та ґрунтової основи. Пропонується використовувати в правій частині диференційного рівняння модель Вінклера-Фусса; та двопараметричну модель (рис.3) ґрунтової основи (Пастернака), що дозволяє наближено врахувати розподільчу властивість ґрунтової основи. Диференційне рівняння матиме наступний вигляд [2]:

$$\frac{d^4w}{dx^{*4}} - 2r^2\frac{d^2w}{dx^{*2}} + s^4w = \frac{pL}{EJ} \tag{8}$$

Використання моделі пружної півплощини або простору передбачає вирішення інтегральних рівнянь, що значно ускладнює розв'язання задачі визначення напружено-деформованого стану конструкцій на ґрунтовій основі.

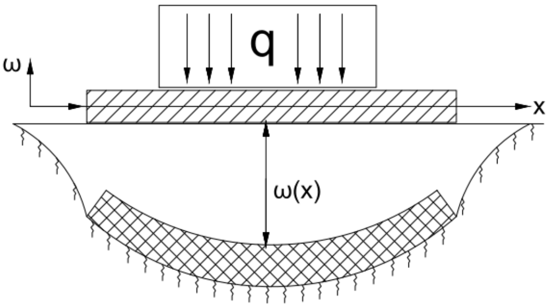

Рисунок 3 – Двопараметрична модель Пастернака

Визначимо на прикладі величини деформацій та напруження в балці. Нехай довжина балки становить 10м; висота балки 1м; модуль деформації ґрунтової основи становить $1{,}8{*}10^4$ Н/м^3; навантаження складає 250кПа.

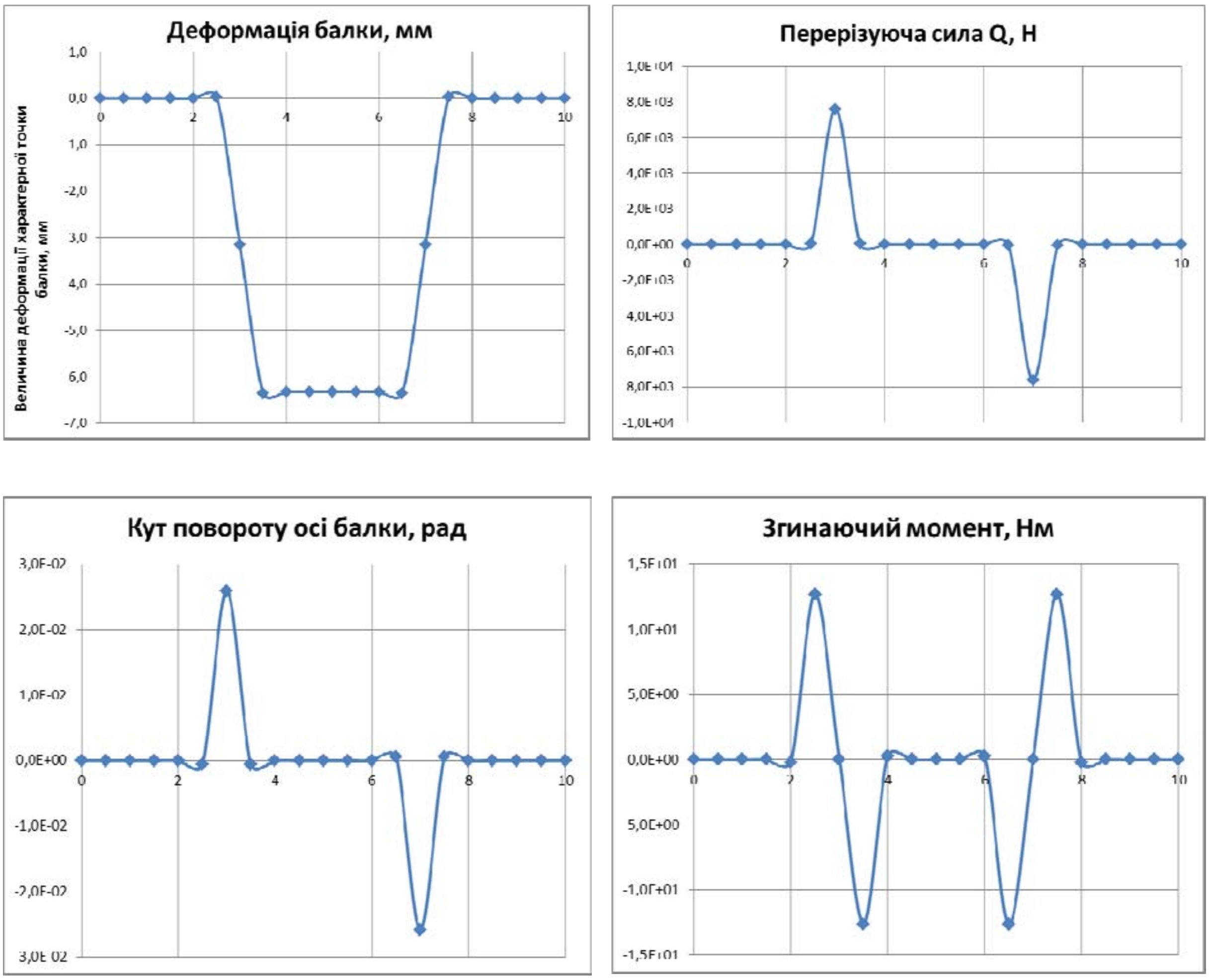

Рисунок 4 – Графіки НДС балки під дією навантаження

Таким чином, маючи інформацію про характер навантаження (величину навантаження та час, протягом якого діє відповідне навантаження), а також про фізико-механічні характеристики ґрунтової основи, що узагальнюються за допомогою одного чи двох коефіцієнтів пружності ґрунтової основи, ми маємо змогу змоделювати процес деформування конструктивного елемента інженерного середовища.

Обґрунтування точності виконання геодезичних робіт спирається на результати подібного моделювання деформації, а саме на величину деформації, місце проявлення деформації, час розвитку деформації.

Висновки. Задача визначення напружено-деформованого стану елементарних конструкцій на ґрунтовій основі є досить складною. Тому необхідно використовувати методи, що дозволяють значно спростити розв'язання цієї задачі та наближено моделювати сумісну роботу конструкції на ґрунтовій основи. З геодезичної точки зору важливими є питання, що стосуються місць розміщення точок спостереження та величин деформацій

Перспективи наступних досліджень. Наступним кроком є аналіз результатів моделювання сумісної роботи конструкцій на ґрунтовій основі при змінних параметрах навантаження, що моделюють процес поступового зведення споруди, а також змінних фізико-механічних характеристик ґрунтової основи, що моделюють процес зміни характеристик ґрунту за тих чи інших умов. Визначення характерних точок балки, що найбільш адекватно відображають процес напруження та деформування, що дозволить обґрунтовано розміщувати геодезичні марки для спостереження. Подібний підхід дозволяє перейти від визначених величин деформацій конструкцій до обґрунтування точності виконання геодезичних робіт.

Література

1. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. Москва, 1975. – 632с.
2. *Власов В.З.* Балки и плиты на упругом основании. Москва, 1959. – 74с.

Аннотация

Рассмотрена математическая основа решения задачи изгиба балки на упругом основании, а также использование этой методики для моделирования разных объектов инженерной среды (фундаментов, ограждающих конструкций, высотных сооружений).

Annotation

The mathematical method of the pile bending at elastic ground base and using of this method for modeling the different engineering objects, such as: foundations; fencing constructions; high-rise buildings, are reviewed.